ARISTIDE HALANAY

# TEORIA CALITATIVĂ A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

A. HALANAY

# TEORIA CALITATIVĂ A ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE

## STABILITATEA DUPĂ LIAPUNOV. OSCILAŢII. SISTEME CU ARGUMENT ÎNTÎRZIAT

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
1963

# *PREFAȚĂ*

*Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale cunoaște în ultima vreme o dezvoltare constatată prin numărul mare de cărți și lucrări originale care-i sînt dedicate. Se știe că începuturile teoriei calitative a ecuațiilor diferențiale sînt nemijlocit legate în lucrările lui Poincaré, Liapunov, Birkhoff, de probleme clasice ale mecanicii și mecanicii cerești. Așa au apărut și teoria stabilității și teoria matematică a oscilațiilor cu metoda parametrului mic și teoria generală a sistemelor dinamice. Perioada de mare avînt, din jurul anului 1930, a teoriei calitative a ecuațiilor diferențiale în Uniunea Sovietică a pornit pe de o parte de la reluarea, la Institutul de aviație din Kazan, a problemelor teoriei stabilității cu aplicație la studiul stabilității avionului, iar, pe de altă parte, la Moscova, datorită observației lui A. A. Andronov asupra utilității aparatului matematic al teoriei soluțiilor periodice ale ecuațiilor neliniare pentru explicarea unor fenomene ale radiotehnicii. Este perioada fixată de exemplu de celebra carte de teoria oscilațiilor a lui A. A. Andronov, Haikin și Witt la care se adaugă la fel de cunoscuta carte de „mecanică neliniară" a lui Krîlov și Bogoliubov.*

*Începînd din 1930, la Universitatea din Moscova funcționează seminarul de teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale, orientat în special spre problemele teoretice fundamentale. Bilanțul activității seminarului în prima perioadă este fixat în cele două ediții ale monografiei lui V. V. Nemîțki și V. V. Stepanov „Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale" a căror circulație largă a și dat denumirea acestei direcții de cercetare.*

*În ultimii 10—15 ani, atît teoria stabilității, cît și teoria soluțiilor periodice (la care se adaugă problema soluțiilor aproape-periodice), au primit un nou impuls prin faptul că ele reprezintă o parte din aparatul matematic al teoriei reglării automate.*

*Caracteristic pentru dezvoltarea teoriei calitative a ecuațiilor diferențiale este faptul că, pentru rezolvarea problemelor ei, se folosește un aparat matematic tot mai variat: topologia și analiza funcțională, algebră liniară și teoria funcțiilor de o variabilă complexă.*

*Ţinînd seama de marea varietate a problemelor, alegerea materialului pentru o carte dedicată teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale este o problemă grea. În această monografie autorul a fost călăuzit de ideea unei expuneri sistematice, închegate, a teoriei stabilităţii (bazată în primul rînd pe metoda funcţiei lui Liapunov) şi a teoriei oscilaţiilor, inclusiv teoria sistemelor cu parametru mic. În această expunere accentul a fost pus tocmai pe teoremele generale, pe acea dezvoltare a teoriei care clarifică ideile şi metodele. A fost introdus un capitol relativ la teoria stabilităţii sistemelor de reglare, în care accentul cade de asemenea pe cele mai generale teoreme obţinute în această direcţie, în particular pe prezentarea contribuţiei esenţiale adusă aici de V. M. Popov, membru corespondent al Acad. R.P.R. Ultimul capitol reia problemele teoriei stabilităţii şi teoriei oscilaţiilor în cadrul sistemelor cu întîrziere, care în ultima vreme ocupă un loc din ce în ce mai mare atît în preocupările matematicienilor cît şi ale celor ce lucrează în domeniul aplicaţiilor. În întreaga lucrare au fost cuprinse o serie de rezultate obţinute la noi în ţară; în particular, ultimul capitol reprezintă o expunere sistematică şi perfecţionată a rezultatelor autorului în teoria sistemelor cu întîrziere.*

*Comentariile bibliografice de la sfîrşitul fiecărui capitol au în primul rînd menirea de a indica acele izvoare care au fost nemijlocit folosite pentru redactarea lucrării sau ale căror idei sînt dezvoltate în lucrare. Există şi un număr mic de excepţii — semnalarea unor lucrări fundamentale care nu au fost cuprinse în lucrare deoarece ar fi cerut dezvoltări prea mari. De altfel, nici chiar în sensul limitat despre care s-a vorbit mai sus, bibliografia nu are pretenţia de a fi completă.*

*AUTORUL*

# TABLA DE MATERII

*Capitolul IV*



ANEXĂ

# INTRODUCERE

La baza întregii teorii calitative a ecuațiilor diferențiale stau teoremele generale de existență, unicitate și dependență continuă de condițiile inițiale și de parametri. De aceea vom începe prin a reaminti aceste teoreme generale, stabilind cu acest prilej unele leme care vor fi întîlnite adesea în cele ce urmează. De asemenea vor fi precizate cele mai frecvente notații.

## § 1. SCRIEREA VECTORIALĂ A SISTEMELOR DE ECUAȚII DIFERENȚIALE

Să considerăm un sistem de ecuații diferențiale de forma

$$\frac{d x_i}{d t} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Vom nota cu $x$ vectorul coloană

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Vom folosi de obicei norma euclidiană $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. În unele cazuri sînt convenabile și normele echivalente $|x| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$ sau $|x| = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|$; cînd vom folosi aceste norme vom menționa special acest lucru.

Derivata vectorului $x(t)$ este prin definiție vectorul

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d x_1}{d t} \\ \vdots \\ \dfrac{d x_n}{d t} \end{pmatrix}.$$

Aceasta nu este o definiţie formală; ea coincide cu $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$, limita fiind definită cu ajutorul normei introduse. De asemenea integrala vectorului $x(t)$ pe $[a, b]$ este prin definiţie vectorul

$$\begin{pmatrix} \int_a^b x_1(t)\,\mathrm{d}t \\ \vdots \\ \int_a^b x_n(t)\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}.$$

Nici aceasta nu este o definiţie formală; se poate ajunge la ea definind integrala în mod obişnuit cu ajutorul sumelor Riemann.

Foarte adesea vom folosi evaluarea

$$\left|\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |x(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Avem

$$\left|\int_a^b x(t)\mathrm{d}t\right| = \left\{\left(\int_a^b x_1(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 + \left(\int_a^b x_2(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 + \ldots + \left(\int_a^b x_n(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\right\}^{1/2}.$$

Notăm $J_k = \int_a^b x_k(t)\mathrm{d}t$, $\quad b_k = \dfrac{J_k}{\sqrt{\sum_l J_l^2}}$. Rezultă

$$\sum_k b_k J_k = \frac{\sum_k J_k^2}{\sqrt{\sum_l J_l^2}} = \sqrt{\sum_k J_k^2} = \left|\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

Pe de altă parte,

$$\sum_k b_k J_k = \sum_k b_k \int_a^b x_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_k b_k x_k(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \sqrt{\sum_k b_k^2}\sqrt{\sum_k x_k^2(t)}\mathrm{d}t.$$

Dar $\sum_k b_k^2 = 1$, deci

$$\sum_k b_k J_k \leqslant \int_a^b \sqrt{\sum_k x_k^2(t)}\mathrm{d}t = \int_a^b |x(t)|\,\mathrm{d}t,$$

ceea ce demonstrează evaluarea scrisă mai sus.

## § 2. TEOREMA DE EXISTENŢĂ

În notaţiile vectoriale introduse, sistemul de ecuaţii diferenţiale se scrie

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x). \qquad (1)$$

Vom presupune în cele ce urmează că $f$ e continuă într-un domeniu $D \subset R^{n+1}$.

DEFINIŢIE. *O funcţie $\varphi$ definită şi continuă pe un interval $I$ al axei reale (cu valori în $R^n$) se numeşte $\varepsilon$-soluţie a sistemului (1) pe $I$ dacă:*

*a)* $(t, \varphi(t)) \in D$ pentru $t \in I$;

*b)* *$\varphi$ are derivată continuă* pe *$I$ cu excepţia eventual a unui număr finit de puncte din $I$;*

*c)* $\left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} - f[t, \varphi(t)]\right| \leqslant \varepsilon$, *acolo unde* $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ *există şi este continuă.*

LEMA 0.1. *Fie* $D: |t - t_0| \leqslant a,\ |x - x_0| \leqslant b,\ M = \max|f(t, x)|,$ $\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$.

*Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există o $\varepsilon$-soluţie a sistemului* (1) *pe* $|t - t_0| \leqslant \alpha$ *astfel ca* $\varphi(t_0) = x_0$.

*Demonstraţie.* Deoarece $f$ e continuă pe mulţimea compactă $D$, ea este uniform continuă, deci pentru $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel ca $|f(t, x) - f(\tilde{t}, \tilde{x})| \leqslant \varepsilon$ pentru $(t, x) \in D$, $(\tilde{t}, \tilde{x}) \in D$, $|t - \tilde{t}| \leqslant \delta(\varepsilon)$, $|x - \tilde{x}| \leqslant \delta(\varepsilon)$. Considerăm o diviziune a intervalului $[t_0, t_0 + \alpha]$ cu ajutorul punctelor $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = t_0 + \alpha$ astfel ca

$$\max |t_k - t_{k-1}| \leqslant \min\left(\delta(\varepsilon), \frac{\delta(\varepsilon)}{M}\right).$$

Definim funcţia $\varphi$ pe $[t_0, t_0 + \alpha]$ prin relaţiile

$$\varphi(t_0) = x_0,\ \varphi(t) = \varphi(t_{k-1}) + f[t_{k-1}, \varphi(t_{k-1})](t - t_{k-1})$$

pentru $t_{k-1} < t \leqslant t_k$. Funcţia astfel definită este continuă, derivabilă în interiorul intervalelor $(t_k, t_{k+1})$. În plus $|\varphi(t) - \varphi(\tilde{t})| \leqslant M|t - \tilde{t}|$. Pentru $t \in (t_{k-1}, t_k)$ rezultă $t - t_{k-1} < \delta(\varepsilon)$ şi $|\varphi(t) - \varphi(t_{k-1})| \leqslant \delta(\varepsilon)$ deci

$$\left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} - f[t, \varphi(t)]\right| = |f[t_{k-1}, \varphi(t_{k-1})] - f[t, \varphi(t)]| < \varepsilon,$$

deci $\varphi$ este $\varepsilon$-soluţie. La fel se construieşte $\varepsilon$-soluţia şi în intervalul $[t - \alpha, t_0]$.

TEOREMA 0.1. *Fie* $D: |t - t_0| \leqslant a, |x - x_0| \leqslant b, M = \max_D |f(t,x)|,$

$$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

*Atunci există pe $|t - t_0| \leqslant \alpha$ o soluţie $\varphi$ a sistemului* (1) *cu* $\varphi(t_0) = x_0$.

*Demonstraţie.* Fie $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$, $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$; pentru fiecare $\varepsilon_n$ există pe baza lemei 0.1 o $\varepsilon_n$-soluţie $\varphi_n$ definită pe $|t - t_0| \leqslant \alpha$ şi astfel ca $\varphi_n(t_0) = x_0$; în plus $|\varphi_n(t) - \varphi_n(\tilde{t})| \leqslant M|t - \tilde{t}|$.

Rezultă că funcţiile $\varphi_n$ sînt uniform mărginite şi egal continue pe $|t - t_0| \leqslant \alpha$, deci pe baza teoremei lui Arzelà (Ascoli) există un subşir $\varphi_{n_k}$

uniform convergent pe $|t - t_0| \leqslant \alpha$ către o funcție $\varphi$. Această funcție rezultă continuă și în plus $|\varphi(t) - \varphi(\tilde{t})| \leqslant M|t - \tilde{t}|$. Fie

$$\Delta_n(t) = \frac{d\varphi_n}{dt} - f[t, \varphi_n(t)]$$

în punctele în care $\varphi_n$ e derivabilă și

$$\Delta_n(t) = 0$$

în punctele în care $\varphi_n$ nu e derivabilă. Avem

$$\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [f(s, \varphi_n(s)) + \Delta_n(s)]\,ds, \quad |\Delta_n(t)| \leqslant \varepsilon_n.$$

Deoarece $f[t, \varphi_{n_k}(t)]$ converge uniform pe $|t - t_0| \leqslant \alpha$ către $f[t, \varphi(t)]$ iar $\Delta_{n_k}$ tinde uniform către zero, se poate trece la limită sub semnul de integrare și rezultă

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f[s, \varphi(s)]\,ds$$

Deoarece $f$ e continuă, rezultă că $\varphi$ e derivabilă pe $|t - t_0| \leqslant \alpha$ și $\dot{\varphi}(t) = f[t, \varphi(t)]$. Teorema este demonstrată.

## § 3. INEGALITĂȚI DIFERENȚIALE

Înainte de a trece la teoremele de unicitate și de dependență continuă de condițiile inițiale, vom stabili cîteva leme cu interes în sine.

LEMA 0.2. *Fie $\varphi$ o funcție reală definită pentru* $t_0 \leqslant t < t_0 + \alpha$; notăm

$$D_- \varphi(t) = \liminf_{h \to -0} \frac{\varphi(t + h) - \varphi(t)}{h}.$$

*Fie $\varphi$ și $\psi$ continue în* $[t_0, t_0 + \alpha)$ *și cu proprietățile*:

*a*) $\varphi(t_0) < \psi(t_0)$.

*b*) $D_-\varphi(t) < f[t, \varphi(t)]$,

$D_-\psi(t) \geqslant f[t, \psi(t)]$, *pentru* $t \in [t_0, t_0 + \alpha)$.

*Atunci* $\varphi(t) < \psi(t)$ pe $[t_0, t_0 + \alpha)$.

*Demonstrație*. Considerăm mulțimea valorilor $t$ din $[t_0, t_0 + \alpha)$ în care $\varphi(t) \geqslant \psi(t)$; această mulțime nu conține pe $t_0$ conform ipotezei. Dacă nu e vidă, fie $\xi$ marginea ei inferioară.

Avem $\varphi(\xi) = \psi(\xi)$ deci $D_-\varphi(\xi) < f[\xi, \varphi(\xi)] = f[\xi, \psi(\xi)] \leqslant D_-\psi(\xi)$. De aici rezultă că există $t_0 \leqslant t < \xi$ astfel încît

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(\xi)}{t - \xi} < \frac{\psi(t) - \psi(\xi)}{t - \xi},$$

deci

$$\varphi(t) - \varphi(\xi) > \psi(t) - \psi(\xi),$$

deci $\varphi(t) > \psi(t)$, ceea ce contrazice definiția lui $\xi$ ca margine inferioară. Mulțimea considerată rezultă deci vidă și lema e demonstrată.

LEMA 0.3. *Fie f continuă pentru* $|t - t_0| \leqslant a$, $|y - y_0| \leqslant b$.

*Fie* $M = \max |f(t, y)|$, $\alpha = \min \left(a, \frac{b}{M}\right)$, $\beta < \alpha$. *Atunci există o soluție* $y(t)$ *a ecuației* $y' = f(t, y)$ *definită pe* $[t_0, t_0 + \beta]$ *astfel ca* $y(t_0) = y_0$ *și cu proprietatea că dacă* $z(t)$ *e soluție a ecuației cu* $z(t_0) = y_0$ *să rezulte* $z(t) \leqslant y(t)$ *pe* $[t_0, t_0 + \beta]$.

*Demonstrație.* Există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încît dacă $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$ ecuația $y' = f(t, y) + \varepsilon$ admite soluții pe $[t_0, t_0 + \beta]$. Fie $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n < \varepsilon_0$, $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, $y_n$ un șir monoton descrescător tinzînd către $y_0$. Dacă $y_n(t)$ sînt soluții ale ecuațiilor $y' = f(t, y) + \varepsilon_n$ cu $y_n(t_0) = y_n$, rezultă pe baza lemei 0.2 că $z(t) < y_{n+1}(t) < y_n(t)$ pe $[t_0, t_0 + \beta]$.

Rezultă că pentru orice $t \in [t_0, t_0 + \beta]$ avem

$$\lim_{n\to\infty} y_n(t) = y(t),$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} [f(t, y_n(t)) + \varepsilon_n] = f(t, y(t)),$$

deci

$$y'_n(t) \to f(t, y(t)).$$

Șirul $y_n(t)$ fiind monoton descrescător, funcțiile $y_n(t)$ rezultă uniform mărginite, iar șirul derivatelor $y'_n(t)$ fiind uniform mărginit, funcțiile $y_n(t)$ rezultă egal continue. Dar atunci, pe baza teoremei lui Arzelà, șirul $y_n(t)$ rezultă unifom convergent pe $[t_0, t_0 + \beta]$ și $y(t)$ rezultă soluție a ecuației $y' = f(t, y)$.

Deoarece $y_n \to y_0$, rezultă $y(t_0) = y_0$. Fie $z(t)$ o soluție oarecare cu $z(t_0) = y_0$. Avem pentru toți $n$, pe baza lemei 0.2, $z(t) < y_n(t)$ pentru $t \in [t_0, t_0 + \beta]$. Pentru $n \to \infty$ se capătă $z(t) \leqslant y(t)$ pe $[t_0, t_0 + \beta]$ și lema e demonstrată.

LEMA 0.4. *Fie f continuă pentru* $|t - t_0| \leqslant a$, $|y - y_0| \leqslant b$, $M = \max |f(t, y)|$, $\alpha = \min \left(a, \frac{b}{M}\right)$, $\beta < \alpha$, $y(t)$ *soluția a cărei existență este afirmată de lema* 0.3, $\omega(t)$ *o funcție derivabilă pe* $[t_0, t_0 + \beta]$ astfel ca $\omega'(t) \leqslant f[t, \omega(t)]$, $\omega(t_0) \leqslant y(t_0)$. *Atunci* $\omega(t) \leqslant y(t)$ *pe* $[t_0, t_0 + \beta]$.

*Demonstrație.* Fie $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$, $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, $y_n$ un șir tinzînd monoton descrescător către $y(t_0)$. Avem

$$\omega'(t) \leqslant f[t, \omega(t)] < f[t, \omega(t)] + \varepsilon_n, \quad \omega(t_0) \leqslant y(t_0) < y_n,$$

deci pe baza lemei 0.2, $\omega(t) < y_n(t)$ pe $[t_0, t_0 + \beta)$. De aici pentru $n \to \infty$ rezultă $\omega(t) \leqslant y(t)$ pe $[t_0, t_0 + \beta]$.

LEMA 0.5. Ecuaţia

$$y' = a(t)y + b(t),$$

*unde* $a(t)$ *şi* $b(t)$ *sînt continue pe* $|t - t_0| \leqslant \alpha$, *are pe acest interval soluţia*

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(u)\mathrm{d}u} b(s)\,\mathrm{d}s$$

*şi această soluţie este unica soluţie pentru care* $y(t_0) = y_0$.

*Demonstraţie.* Că $y(t)$ e soluţie se verifică imediat prin derivare. Să arătăm că soluţia e unică. Fie $\tilde{y}(t)$ o altă soluţie cu $\tilde{y}(t_0) = y_0$, $z(t) = \tilde{y}(t) - y(t)$. Rezultă $z(t_0) = 0$ şi $z'(t) = a(t)z(t)$, deci $z(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)z(s)\,\mathrm{d}s$.

De aici, $|z(t)| \leqslant M\int_{t_0}^{t} |z(s)|\,\mathrm{d}s$. Dacă există $t_1 > t_0$ astfel încît $\int_{t_0}^{t_1} |z(s)|\mathrm{d}s = 0$, atunci $z(s) \equiv 0$ pentru $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ şi luăm pe $t_1$ în loc de $t_0$.

Presupunem deci că pentru $t > t_0$ avem $\int_{t_0}^{t} |z(s)|\,\mathrm{d}s \neq 0$.

Fie $v(t) = \int_{t_0}^{t} |z(s)|\,\mathrm{d}s$. Avem $\frac{v'(t)}{v(t)} \leqslant M$ deci $\int_{\tilde{t}}^{t} \frac{v'(t)}{v(t)}\mathrm{d}t \leqslant M(t - \tilde{t})$, deci $\ln v(t) - \ln v(\tilde{t}) \leqslant M(t - \tilde{t})$ pentru $t_0 < \tilde{t} < t$, deci $\ln v(t) \leqslant \ln v(\tilde{t}) + M(t - \tilde{t})$.

Dar pentru $\tilde{t} \to t_0$ avem $\ln v(\tilde{t}) \to -\infty$ căci $v(t_0) = 0$.

Inegalitatea este contradictorie, deci $z(t) \equiv 0$.

LEMA 0.6. Fie $\varphi$, $\psi$, $\chi$ *funcţii reale definite pe* $[a, b]$ *şi continue*, $\chi(t) > 0$. *Presupunem că pe* $[a, b]$ *are loc inegalitatea*

$$\varphi(t) \leqslant \psi(t) + \int_a^t \chi(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s.$$

Atunci

$$\varphi(t) \leqslant \psi(t) + \int_a^t \chi(s)\psi(s)\, e^{\int_s^t \chi(u)\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}s \text{ pe } [a, b].$$

*Demonstraţie.* Fie

$$R(t) = \int_a^t \chi(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s.$$

Avem $R'(t) = \chi(t)\varphi(t) \leqslant \chi(t)\psi(t) + \chi(t)\int_a^t \chi(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s = \chi(t)\psi(t) + \chi(t)R(t)$.

Considerăm ecuaţia

$$z'(t) = \chi(t)z(t) + \chi(t)\psi(t).$$

Această ecuaţie admite pe $[a, b]$ soluţia unică

$$z(t) = \int_a^t e^{\int_s^t \chi(u)\mathrm{d}u} \chi(s)\psi(s)\mathrm{d}s$$

care verifică condiţia $z(a) = 0$. Pe baza lemei 0.4 rezultă $R(t) \leqslant z(t)$ pe $[a, b]$, deci

$$\varphi(t) \leqslant \psi(t) + R(t) \leqslant \psi(t) + z(t) \text{ şi lema e demonstrată.}$$

CONSECINŢA 1. *Dacă* $\psi$ *e derivabilă, din* $\varphi(t) \leqslant \psi(t) + \int_a^t \chi(s)\varphi(s)\mathrm{d}s$ *rezultă*

$$\varphi(t) \leqslant \psi(a)\, e^{\int_a^t \chi(u)\mathrm{d}u} + \int_a^t e^{\int_s^t \chi(u)\mathrm{d}u} \psi'(s)\mathrm{d}s.$$

*Demonstraţie*. Avem, cu notaţiile de mai sus

$$z(t) = -\int_a^t \psi(s) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} e^{\int_s^t \chi(u)\mathrm{d}u} \mathrm{d}s = -\psi(s)\, e^{\int_s^t \chi(u)\mathrm{d}u}\Big|_a^t + \int_a^t e^{\int_s^t \chi(u)\mathrm{d}u} \psi'(s)\mathrm{d}s =$$

$$= -\psi(t) + \psi(a)\, e^{\int_a^t \chi(u)\mathrm{d}u} + \int_a^t e^{\int_s^t \chi(u)\mathrm{d}u} \psi'(s)\mathrm{d}s, \text{ deci}$$

$$\psi(t) + z(t) = \psi(a)\, e^{\int_a^t \chi(u)\mathrm{d}u} + \int_a^t e^{\int_s^t \chi(u)\mathrm{d}u} \psi'(s)\mathrm{d}s.$$

CONSECINŢA 2. *Dacă* $\psi$ *e constantă, din*

$$\varphi(t) \leqslant \psi + \int_a^t \chi(s)\varphi(s)\mathrm{d}s$$

*rezultă*

$$\varphi(t) \leqslant \psi\, e^{\int_a^t \chi(u)\mathrm{d}u}$$

## § 4. TEOREMA DE UNICITATE

LEMA 0.7. *Fie* $f$ *definită în* $D \subset R^{n+1}$ *şi* $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| < k(t)|x_1 - x_2|$.

*Fie* $\varphi_1, \varphi_2$ $\varepsilon_1$ — *respectiv* $\varepsilon_2$ — *soluţii ale ecuaţiei* (1) *pe* $(a, b)$ *astfel ca pentru* $t_0 \in (a, b)$ *să avem* $|\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)| \leqslant \delta$. *Atunci*

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leqslant \delta\, e^{\left|\int_{t_0}^t k(u)\mathrm{d}u\right|} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\left|\int_{t_0}^t e^{\int_s^t k(u)\mathrm{d}u} \mathrm{d}s\right| \text{ în } (a, b).$$

*Demonstraţie*. Presupunem $t_0 \leqslant t \leqslant b$; în intervalul $[a, t_0]$ demonstraţia se face la fel. Avem

$$|\dot\varphi_1(s) - f[s, \varphi_1(s)]| \leqslant \varepsilon_1, \quad |\dot\varphi_2(s) - f[s, \varphi_2(s)] \leqslant \varepsilon_2$$

cu excepţia unui număr finit de puncte. Rezultă

$$|\varphi_1(t) - \varphi_1(t_0) - \int_{t_0}^{t} f[s, \varphi_1(s)]\mathrm{d}s| \leqslant \varepsilon_1(t - t_0),$$

$$|\varphi_2(t) - \varphi_2(t_0) - \int_{t_0}^{t} f[s, \varphi_2(s)]\mathrm{d}s| \leqslant \varepsilon_2(t - t_0).$$

Rezultă

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t) - (\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)) - \int_{t_0}^{t} [f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))]\mathrm{d}s| \leqslant$$

$$\leqslant (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(t - t_0)$$

deci

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leqslant |\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(t - t_0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} |f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))|\mathrm{d}s$$

sau

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leqslant |\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(t - t_0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} k(s)|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|\mathrm{d}s.$$

Aplicăm lema 0.6 (consecinţa 1) luînd $\varphi = |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|$, $\psi = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(t - t_0) + |\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)|$, $\chi = k(t)$.

Obţinem

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leqslant |\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)| \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} k(s)\mathrm{d}s} +$$

$$+ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\int_{s}^{t} k(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s$$

şi lema e demonstrată.

TEOREMA 0.2. *Dacă*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| < k(t)|x_1 - x_2|$$

*în* $D \subset R^{n+1}$ *şi* $\varphi_1$, $\varphi_2$ *sînt două soluţii ale sistemului (1) cu* $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$, *atunci* $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ *în intervalul* $(a, b)$ *în care aceste soluţii sînt definite*

*Demonstraţie*. În lema 0.7 putem lua $\delta = 0$. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ şi se capătă $|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| = 0$.

Teorema 0.1 arată că soluţia sistemului (1) există într-o vecinătate a punctului iniţial. O problemă importantă este aceea a prelungirii solu-

ției pe un interval cît mai mare. Fie $\varphi(t)$ o soluție a ecuației (1) definită în $(a, b)$. Atunci

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,\mathrm{d}s.$$

Dacă $a < t_1 < t_2 < b$ rezultă $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leqslant \int_{t_1}^{t_2} |f(s, \varphi(s))|\mathrm{d}s \leqslant M(t_2 - t_1)$,

deci $\lim\limits_{\substack{t\to a\\ t>a}} \varphi(t)$ și $\lim\limits_{\substack{t\to b\\ t<b}} \varphi(t)$ există. Dacă punctul $(b, \varphi(b-0))$ e în $D$, funcția $\tilde{\varphi}$ definită prin $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t)$ pentru $t \in (a, b)$, $\tilde{\varphi}(b) = \varphi(b-0)$ este o soluție a sistemului în $(a, b]$; această soluție poate fi prelungită pentru $t > b$ luînd ca punct inițial pe $b$ și ca valoare inițială pe $\varphi(b-0)$.

Rezultă de aici că o soluție poate fi prelungită atît timp cît nu părăsește domeniul $D$.

## § 5. TEOREMELE DE CONTINUITATE ȘI DE DERIVABILITATE ÎN RAPORT CU CONDIȚIILE INIȚIALE

În cele ce urmează vom nota cu $x(t; t_0, x_0)$ soluția sistemului (1) care pentru $t = t_0$ ia valoarea $x_0$.

TEOREMA 0.3. *Dacă* $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| < k(t)\,|x_1 - x_2|$ *în* $D$, *atunci din* $x_n \to x_0$ *rezultă* $x(t; t_0, x_n) \to x(t; t_0, x_0)$.

*Demonstrație.* Avem

$$x(t; t_0, x_n) = x_n + \int_{t_0}^{t} f[s, x(s; t_0, x_n)]\,\mathrm{d}s,$$

$$x(t; t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f[s, x(s; t_0, x_0)]\,\mathrm{d}s.$$

Rezultă, pentru $t \geqslant t_0$,

$$|x(t; t_0, x_n) - x(t; t_0, x_0)| \leqslant |x_n - x_0| + \int_{t_0}^{t} |f[s, x(s; t_0, x_n)] -$$

$$- f[s, x(s; t_0, x_0)]|\,\mathrm{d}s \leqslant |x_n - x_0| + \int_{t_0}^{t} k(s)\,|x(s; t_0, x_n) - x(s; t_0, x_0)|\,\mathrm{d}s.$$

Aplicînd lema 0.6 (consecința 2) rezultă

$$|x(t; t_0, x_n) - x(t; t_0, x_0)| \leqslant |x_n - x_0|\, e^{\int_{t_0}^{t} k(s)\mathrm{d}s}$$

și teorema e demonstrată.

*Observație.* Din demonstrație rezultă că are loc convergența uniformă în raport cu $t$ pe orice interval $(a, b)$ pe care soluțiile sînt definite.

Să presupunem acum că $f(t, x)$ este diferenţiabilă în $D$, pentru $t \in I$. Aceasta înseamnă că pentru orice $x_0 \in D$, $t \in I$ are loc relaţia

$$f(t, x) - f(t, x_0) = f'_x(t, x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|).$$

Să considerăm acum o soluţie $x(t; t_0, x_0)$ situată în $D$ pentru $t \in I$.

TEOREMA 0.4. *Dacă $f$ este diferenţiabilă în $D$ pentru $t \in I$ şi $x(t; t_0, x_0)$ este pentru $t \in I$ situată în $D$, atunci $x(t; t_0, x_0)$ este diferenţiabilă în raport cu $x_0$ şi $\frac{\partial x(t; t_0, x_0)}{\partial x_0}$ este o matrice fundamentală de soluţii a sistemului liniar*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f(t, x(t; t_0, x_0))}{\partial x} y$$

*numit sistemul în variaţii corespunzător soluţiei $x(t; t_0, x_0)$.*

*Demonstraţie*. Fie $x_1$ astfel ca soluţia $x(t; t_0, x_1)$ să se afle pentru $t \in I$ în $D$. Fie $Y(t, t_0)$ o matrice fundamentală a sistemului în variaţii, cu alte cuvinte o matrice ale cărei coloane sînt soluţii ale sistemului în variaţii astfel ca $Y(t_0, t_0) = E$, $E$ fiind matricea unitate.

Atunci, evident, $Y(t, t_0)(x_1 - x_0)$ va fi o soluţie a sistemului în variaţii care pentru $t = t_0$ coincide cu $x_1 - x_0$.

Avem relaţiile

$$x(t; t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f[s, x(s; t_0, x_0)]\, ds,$$

$$x(t; t_0, x_1) = x_1 + \int_{t_0}^{t} f[s, x(s; t_0, x_1)]\, ds,$$

$$Y(t, t_0)(x_1 - x_0) = x_1 - x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f[s, x(s; t_0, x_0)]}{\partial x} Y(s, t_0)(x_1 - x_0)\, ds.$$

Rezultă de aici

$$x(t; t_0, x_1) - x(t; t_0, x_0) - Y(t, t_0)(x_1 - x_0) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \Big\{ f[s, x(s; t_0, x_1)] - f[s, x(s; t_0, x_0)] -$$

$$- \frac{\partial f[s, x(s; t_0, x_0)]}{\partial x} Y(s, t_0)(x_1 - x_0)\Big\}\, ds.$$

Ţinînd seama de ipoteza asupra diferenţiabilităţii funcţiei $f$ deducem

$$x(t; t_0, x_1) - x(t; t_0, x_0) - Y(t, t_0)(x_1 - x_0) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} f'_x[s, x(s; t_0, x_0)][x(s; t_0, x_1) - x(s; t_0, x_0) - Y(s, t_0)(x_1 - x_0)]\, ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} o(|x(s; t_0, x_1) - x(s; t_0, x_0)|)\, ds.$$

Pe baza relației din teorema 0.3 rezultă

$$| x(s;\ t_0,\ x_1) - x(s;\ t_0,\ x_0) | \leqslant e^{\int_{t_0}^{s} k(s)ds} | x_1 - x_0 |$$

deci

$$o(|x(s;\ t_0,\ x_1) - x(s;\ t_0,\ x_0)|) = o(|x_1 - x_0|)$$

pentru $t$ fixat.

Prin urmare

$$|x(t;\ t_0,\ x_1) - x(t;\ t_0,\ x_0) - Y(t,\ t_0)(x_1 - x_0) | \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} k(s) | x(s;\ t_0, x_1) - x(s;\ t_0,\ x_0) - Y(s;\ t_0)\ (x_1 - x_0) | d s + o(x_1 - x_0)$$

deci, pe baza lemei 0.6,

$$| x(t;\ t_0,\ x_1) - x(t;\ t_0,\ x_0) - Y(t,\ t_0)(x_1 - x_0) | = o( |x_1 - x_0 |)$$

și teorema este demonstrată.

Se demonstrează o teoremă analogă cu privire la derivabilitatea în raport cu $t_0$ și în general în raport cu parametrii.

## COMENTARII BIBLIOGRAFICE

Pentru teoria generală a ecuațiilor diferențiale pot fi consultate, în traducere în limba romînă [1], [2]. De asemenea, teoria generală a ecuațiilor diferențiale este expusă într-o formă asemănătoare cu cea de aici în monografiile [3], [4], [5], [6]. Noțiunile relative la inegalitățile diferențiale sînt date în [7].

CAPITOLUL I

# TEORIA STABILITĂŢII DUPĂ LIAPUNOV

Teorema generală 0.3 asupra dependenţei continue în raport cu condiţiile iniţiale arată că problema determinării soluţiei prin condiţii iniţiale este corect pusă, are un sens fizic.

Într-adevăr, practic, condiţiile iniţiale se determină prin măsurători şi orice măsurătoare nu poate fi decît aproximativă. Continuitatea în raport cu condiţiile iniţiale exprimă tocmai faptul că aceste erori de măsurătoare nu se răsfrîng prea grav asupra soluţiei, iar lema 0.7 arată că ele nu se răsfrîng prea grav nici asupra soluţiilor aproximative, cu alte cuvinte, dacă se dă o eroare $\varepsilon$ admisă pentru soluţie, există $\delta > 0$ astfel încît dacă eroarea la stabilirea condiţiilor iniţiale este mai mică decît $\delta$ sîntem siguri că eroarea în orice $\frac{\varepsilon}{2}$ — soluţie construită cu aceste condiţii iniţiale este mai mică decît $\varepsilon$.

Trebuie însă subliniat că această proprietate este stabilită pe un interval finit $(a, b)$ de variaţie a lui $t$; $\delta$ depinde de mărimea acestui interval şi scade cînd mărimea intervalului creşte. Rezultă că o soluţie va avea în realitate caracter fizic numai dacă pentru intervale de mărime destul de mare, $\delta$ este destul de mare, de ordinul erorilor de măsurătoare. Un mod de a realiza aceasta constă în a cere ca $\delta$ să *nu depindă* de mărimea intervalului considerat. Ajungem astfel la noţiunea de stabilitate în sensul lui Liapunov.

Un alt mod de a ajunge la această noţiune este următorul. Considerăm o soluţie a sistemului care descrie desfăşurarea unui anumit fenomen. Să presupunem că în desfăşurarea fenomenului au intervenit perturbaţii de scurtă durată care nu pot fi cunoscute exact şi deci nu pot fi luate în seamă în studiul matematic al fenomenului. După ce aceste perturbaţii şi-au încetat acţiunea, fenomenul va fi descris de acelaşi sistem de ecuaţii diferenţiale ca şi înainte de apariţia lor. Ce s-a petrecut însă? Sub influenţa perturbaţiilor, fenomenul a fost modificat, deci valoarea corespunzătoare momentului cînd perturbaţiile îşi încetează acţiunea va fi alta decît aceea

dată de soluţia considerată la început. Rezultă că după încetarea acţiunii perturbaţiilor fenomenul va fi descris de altă soluţie decît cea cu care am plecat. Cu alte cuvinte efectul unor perturbaţii de durată scurtă constă în trecerea de la o soluţie cu anumite condiţii iniţiale la o soluţie cu alte condiţii iniţiale, drept moment iniţial fiind considerat momentul cînd perturbaţiile îşi încetează acţiunea. Cum în orice model matematic al fenomenelor naturale se neglijează asemenea perturbaţii, pentru ca fenomenul să fie corect descris şi soluţia matematică să aibă sens fizic este necesar ca modificări mici ale condiţiilor iniţiale să nu aibă efecte prea mari asupra soluţiei. Această condiţie este întotdeauna asigurată pe un interval dat $(a, b)$ de teorema de continuitate în raport cu condiţiile iniţiale. Aceleaşi raţionamente ca mai înainte ne fac să considerăm necesară independenţa lui $\delta$ de mărimea intervalului şi ne conduc astfel la noţiunea de stabilitate a soluţiei.

## § 1. TEOREME ASUPRA STABILITĂŢII ŞI STABILITĂŢII UNIFORME

Să trecem acum la definiţia precisă a stabilităţii. Considerăm sistemul

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1}$$

şi fie $\tilde{x}(t)$ o soluţie a sistemului definită pentru $t \geqslant t_0$.

DEFINIŢIE. *Vom spune că soluţia $\tilde{x}(t)$ este stabilă dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon; t_0)$ astfel încît dacă $|x_0 - \tilde{x}(t_0)| < \delta$ să rezulte $|x(t; t_0, x_0) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0$.*

Există împrejurări în care nu toate soluţiile unui sistem de ecuaţii diferenţiale au semnificaţie fizică. Este evident că în asemenea împrejurări nu ne interesează ca toate soluţiile cu condiţii iniţiale apropiate de cele ale soluţiei $x(t)$ să rămînă în vecinătatea acestei soluţii; este suficient ca această proprietate să aibă loc numai pentru soluţiile care au sens fizic. Ajungem astfel la următoarea precizare a noţiunii de stabilitate.

DEFINIŢIE. *Vom spune că soluţia $\tilde{x}(t)$ este stabilă relativ la o mulţime $M$ de soluţii dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon; t_0)$ astfel încît dacă $|x_0 - \tilde{x}(t_0)| < \delta$ şi soluţia $x(t; t_0, x_0)$ aparţine mulţimii $M$ să rezulte $|x(t; t_0, x_0) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0$.*

Dacă $\tilde{x}(t)$ este soluţia a cărei stabilitate o studiem (subliniem cu acest prilej faptul că întotdeauna este vorba despre stabilitatea *unei anumite soluţii*, pe care o presupunem cunoscută), prin schimbarea de variabile $y = x - \tilde{x}(t)$ putem reduce întotdeauna problema la studiul stabilităţii soluţiei $y \equiv 0$. Într-adevăr, obţinem

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{d\tilde{x}}{dt} = f(t, x) - f(t, \tilde{x}(t)) = f(t, y + \tilde{x}(t)) - f(t, \tilde{x}(t)) = F(t, y)$$

şi noul sistem $\dfrac{dy}{dt} = F(t, y)$ admite soluţia $y \equiv 0$ corespunzătoare soluţiei

$x = \tilde{x}(t)$. Condiția $|\tilde{x}(t_0) - x_0| < \delta$ revine la $|y_0| < \delta$ iar $|x(t; t_0, x_0) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon$ revine la $|y(t, t_0, y_0)| < \varepsilon$.

Liapunov a numit sistemul obținut pe această cale sistemul de ecuații al mișcării perturbate; sensul acestei denumiri stă în faptul că noile necunoscute $y$ reprezintă de fapt perturbațiile suferite de mișcarea $\tilde{x}(t)$. Prin trecerea la sistemul de ecuații al mișcării perturbate se poate spune că stabilitatea mișcării se reduce la studiul stabilității echilibrului.

În tot ceea ce urmează vom considera numai problema stabilității soluției banale $x \equiv 0$.

TEOREMA 1.1. *Presupunem că există o funcție $V(t, x)$, definită pentru $t \geqslant 0$, $|x| \leqslant \delta_0$, continuă și cu proprietățile:*

a) $V(t, 0) \equiv 0$;

b) $V(t, x) \geqslant a(|x|)$, *unde $a(r)$ este continuă, monoton crescătoare și $a(0) = 0$;*

c) $V^*(t) = V(t, x(t))$ *este monoton descrescătoare oricare ar fi soluția $x(t)$ a sistemului* (1) *cu* $|x(t_0)| < \delta_0$;

*Atunci soluția $x \equiv 0$ a sistemului este stabilă.*

*Demonstrație.* Fie $\delta_0 > \varepsilon > 0$ dat și $\delta(\varepsilon; t_0)$ astfel ales încît $|x_0| < \delta$ să implice $V(t_0, x_0) < a(\varepsilon)$; asemenea alegere este posibilă deoarece $V(t_0, 0) = 0$ și $V(t_0, x)$ e continuă.

Fie $x_0$ cu $|x_0| < \delta$; considerăm soluția $x(t; t_0, x_0)$.

Funcția $V^*(t) = V(t, x(t; t_0, x_0))$ este prin ipoteză monoton descrescătoare, deci

$$V^*(t) \leqslant V(t_0) = V(t_0, x(t_0; t_0, x_0)) = V(t_0, x_0).$$

Rezultă

$$a(|x(t; t_0, x_0)|) \leqslant V(t, x(t; t_0, x_0)) \leqslant V(t_0, x_0) < a(\varepsilon).$$

Deoarece $a(r)$ este monoton crescătoare, de aici rezultă $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$ pentru orice $t \geqslant t_0$, deci soluția rămîne în domeniul $|x| \leqslant \delta_0$, unde $V$ e definită; teorema e demonstrată.

*Observații.* 1) Dacă $V$ este diferențiabilă, funcția $V^*(t)$ este derivabilă și avem

$$\frac{\mathrm{d}V^*}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}, f(t, x)\right)$$

deoarece $x$ este soluția sistemului de ecuații diferențiale.

Funcția

$$W(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}, f(t, x)\right)$$

se numește derivata funcției $V$ în virtutea sistemului. Condiția c) din teoremă este evident satisfăcută dacă $V$ este diferențiabilă și $W(t, x) \leqslant 0$.

2) Stabilitatea soluției banale implică evident prelungibilitatea pentru orice $t \geqslant t_0$ a soluțiilor cu condiții inițiale într-o vecinătate a lui $x \equiv 0$, deoarece faptul că $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$ asigură posibilitatea prelungirii, soluția nepărăsind domeniul relativ la care sînt îndeplinite condițiile teoremei de existență.

3) Să analizăm modul în care se comportă teorema dacă vrem să obţinem numai stabilitatea relativ la o mulţime $M$ de soluţii. Este suficient să cerem ca $V(t, x(t)) \geqslant a(|x(t)|)$ şi $V(t, x(t))$ monoton descrescătoare numai pentru soluţiile $x(t)$ aparţinînd mulţimii $M$ de soluţii; de asemenea putem presupune că funcţia $V(t, x)$ e definită numai în punctele $(t, x)$ de pe graficele soluţiilor din $M$ şi e continuă numai în aceste puncte. Teorema se va formula în felul următor:

*Presupunem că există o funcţie $V(t, x)$, definită şi continuă pe intersecţia dintre domeniul $(t \geqslant 0, |x| \leqslant \delta_0)$ şi reuniunea graficelor soluţiilor din $M$, cu proprietăţile $V(t, 0) \equiv 0$, $V(t, x(t)) \geqslant a(|x(t)|)$, $V(t, x(t))$ monoton descrescătoare pentru orice soluţie $x(t)$ din $M$.*

*Atunci soluţia banală a sistemului e stabilă relativ la $M$.*

Noţiunea de stabilitate definită mai sus are dezavantajul că este direct legată de momentul iniţial $t_0$; valoarea $\delta$ a abaterilor iniţiale admise depinde nu numai de abaterea admisă pentru soluţie, ci şi de momentul iniţial. Or, dacă ne întoarcem la problema perturbaţiilor cu acţiune de scurtă durată, este clar că asemenea perturbaţii pot apărea în diferite momente ale desfăşurării fenomenului şi tocmai aceste momente (mai exact, momentele cînd acţiunea perturbatoare încetează) sînt considerate drept momente iniţiale. Pentru ca noţiunea de stabilitate introdusă să aibă valoare fizică este deci de dorit ca perturbaţiile iniţiale admise care nu au efect dăunător să nu depindă de momentul iniţial. Ajungem astfel la noţiunea de *stabilitate uniformă.*

DEFINIŢIE. *Soluţia banală $x \equiv 0$ se numeşte uniform stabilă dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît dacă $|x_0| < \delta$ să rezulte $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0$, oricare ar fi $t_0$.*

Se vede că deosebirea faţă de cazul considerat anterior constă în independenţa lui $\delta(\varepsilon)$ d $t_0$.

TEOREMA 1.1'. *Presupunem că există o funcţie $V(t, x)$ definită şi continuă pentru $t \geqslant 0$, $|x| \leqslant \delta_0$, cu proprietăţile:*

a) $V(t, 0) \equiv 0$.

b) $a(|x|) \leqslant V(t, x) \leqslant b(|x|)$, *$a(r)$ şi $b(r)$ fiind continue, monoton crescătoare şi $a(0) = b(0) = 0$.*

c) *$V^*(t) = V(t, x(t))$ este monoton descrescătoare pentru orice soluţie $x(t)$ a sistemului cu $|x(t)| \leqslant \delta_0$.*

*Atunci soluţia $x \equiv 0$ este uniform stabilă.*

Enunţul corespunzător pentru stabilitatea uniformă relativă la o mulţime $M$ de soluţii este imediat.

*Demonstraţie.* Fie $0 < \varepsilon < \delta_0$ şi $\delta = b^{-1}[a(\varepsilon)]$; fie $x_0$ cu $|x_0| < \delta$. Considerăm soluţia $x(t; t_0, x_0)$. Funcţia $V^*(t) = V[t, x(t; t_0, x_0)]$ este monoton descrescătoare, deci

$$V^*(t) \leqslant V^*(t_0) = V[t_0, x(t_0; t_0, x_0)] = V(t_0, x_0) \leqslant b(|x_0|) < b(\delta) =$$

$$= b[b^{-1}(a(\varepsilon))] = a(\varepsilon).$$

Rezultă
$$a(|x(t; t_0, x_0)|) \leqslant V^*(t) < a(\varepsilon)$$

deci
$$|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon \text{ pentru } t \geqslant t_0.$$

TEOREMA 1.2. *Dacă soluția banală a sistemului este uniform stabilă, există o funcție $V(t, x)$ cu proprietățile din teorema precedentă.*

*Demonstrație.* Punem $V(t, x) = \sup_{\sigma \geqslant 0} | x(t + \sigma ; t, x) |$. Funcția $V(t, x)$ e definită pentru $t \geqslant 0$, $| x | < \delta_0 = \sup \delta(\varepsilon)$. Din

$$| x(t + \sigma ; t, x) | < \varepsilon( | x | ),$$

unde $\varepsilon(\delta)$ este funcția inversă a funcției $\delta(\varepsilon)$ (care poate fi aleasă continuă și monoton crescătoare), rezultă $V(t, x) \leqslant \varepsilon( | x | )$. Mai departe,

$$\sup_{\sigma \geqslant 0} | x(t + \sigma ; t, x) | \geqslant | x(t ; t, x) | = | x |,$$

deci

$$V(t, x) \geqslant | x |.$$

În sfîrșit, fie

$$V^*(t) = V[t, x(t ; t_0, x_0)] = \sup_{\sigma \geqslant 0} | x(t + \sigma ; t, x(t ; t_0, x_0)) | =$$

$$= \sup_{\sigma \geqslant 0} | x(t + \sigma ; t_0, x_0) |.$$

Fie $t_1 > t_2$, $d = t_1 - t_2$. Avem

$$V^*(t_1) = \sup_{\sigma \geqslant 0} | x(t_1 + \sigma ; t_0, x_0) | = \sup_{\sigma \geqslant 0} | x(t_2 + d + \sigma ; t_0, x_0) | =$$

$$= \sup_{\sigma \geqslant 0} | x(t_2 + \sigma ; t_0, x_0) | \leqslant \sup_{\sigma \geqslant 0} | x(t_2 + \sigma ; t_0, x_0) | = V^*(t_2)$$

deci $V^*(t)$ este monoton descrescătoare. Teorema e demonstrată.

Să considerăm acum un sistem de forma

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(t, x, y), \tag{2}$$

unde $X$ și $Y$ sînt definite pentru $t \geqslant t_0$, $| x | \leqslant H$, $y$ arbitrar ($x, y$ vectori), $X(t, 0, 0) = 0$, $Y(t, 0, 0) = 0$.

DEFINIȚIE. *Soluția $x = 0$, $y = 0$ a sistemului se numește stabilă în raport cu componentele $x$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ (depinzînd de $\varepsilon$ și $t_0$, iar în cazul stabilității uniforme numai de $\varepsilon$) astfel ca, dacă $| x_0 | + | y_0 | < \delta$ să rezulte $| x(t ; t_0, x_0, y_0) | < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0$.*

TEOREMA 1.1″. *Presupunem că există o funcție $V(t, x, y)$ definită pentru $t \geqslant t_0$, $| x | \leqslant H$, $y$ arbitrar, cu proprietățile:*

1°. *$V(t, 0, 0) \equiv 0$, $V(t, x, y)$ continuă pentru $x = 0$, $y = 0$;*

2°. *$V(t, x, y) \geqslant a(| x |)$ cu $a(r)$ continuă, monoton crescătoare, $a(0) = 0$;*

3°. *$V[t, x(t), y(t)]$ e monoton descrescătoare pentru orice soluție $x(t)$, $y(t)$ a sistemului cu $| x(t) | \leqslant H$.*

*Atunci soluția banală a sistemului (2) este stabilă în raport cu componentele $x$. Dacă în plus $V(t, x, y) \leqslant b( | x | + | y | )$, unde $b(r)$ e ca în teorema 1.1′, atunci stabilitatea e uniformă.*

*Demonstrație.* Fie $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ ales astfel ca $V(t_0, x_0, y_0) < a(\varepsilon)$ dacă $| x_0 | + | y_0 | < \delta$; dacă $V(t, x, y) \leqslant b( | x | + | y | )$ se ia $\delta = b^{-1} [a(\varepsilon)]$.

Considerăm soluţia $x(t; t_0, x_0, y_0)$, $y(t; t_0, x_0, y_0)$ şi funcţia $V^*(t) = V[t, x(t; t_0, x_0, y_0), y(t; t_0, x_0, y_0)]$ care este prin ipoteză monoton descrescătoare. Rezultă

$$a(|x(t; t_0, x_0, y_0)|) \leqslant V^*(t) \leqslant V^*(t_0) = V(t_0, x_0, y_0) < a(\varepsilon),$$

deci $|x(t; t_0, x_0, y_0)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0$.

TEOREMA 1.2'. *Dacă soluţia $x = 0$, $y = 0$ a sistemului (2) este uniform stabilă în raport cu componentele $x$, există o funcţie $V(t, x, y)$ cu toate proprietăţile din teorema precedentă.*

*Demonstraţie.* Luăm $V(t, x, y) = \sup\limits_{\sigma\geqslant 0} |x(t+\sigma; t, x, y)|$. Evident,

$V(t, x, y) \leqslant \varepsilon(|x| + |y|)$ şi $V(t, x, y) \geqslant |x|$. Mai departe,

$$V^*(t) = V[t, x(t; t_0, x_0, y_0), y(t; t_0, x_0, y_0)] =$$

$$= \sup_{\sigma\geqslant 0} |x(t+\sigma; t, x(t; t_0, x_0, y_0), y(t; t_0, x_0, y_0))| =$$

$$= \sup_{\sigma\geqslant 0} |x(t+\sigma; t_0, x_0, y_0)|.$$

Fie $t_1 > t_2$, $d = t_1 - t_2$; avem

$$V^*(t_1) = \sup_{\sigma\geqslant 0} |x(t_1+\sigma; t_0, x_0, y_0)| =$$

$$= \sup_{\sigma\geqslant 0} |x(t_2+d+\sigma; t_0, x_0, y_0)| =$$

$$= \sup_{\sigma\geqslant d} |x(t_2+\sigma; t_0, x_0, y_0)| \leqslant \sup_{\sigma\geqslant 0} |x(t_2+\sigma; t_0, x_0, y_0)| = V^*(t_2),$$

deci $V^*(t)$ este monoton descrescătoare.

Să punem în evidenţă cîteva particularităţi ale sistemelor periodice în raport cu $t$. Fie deci în sistemul (1) $f(t+\omega, x) = f(t, x)$. Atunci o dată cu $x(t; t_0, x_0)$ este soluţie şi $x(t+\omega; t_0, x_0)$. De aici, dacă sistemul (1) îndeplineşte condiţiile teoremei de unicitate rezultă

$$x(t+\omega; t_0+\omega, x_0) = x(t; t_0, x_0)$$

deoarece în ambii membri ai egalităţii avem soluţii ale sistemului (1) şi aceste soluţii coincid pentru $t = t_0$.

PROPOZIŢIA 1. *Dacă $f(t+\omega, x) = f(t, x)$, stabilitatea soluţiei banale a sistemului (1) este întotdeauna uniformă.*

*Demonstraţie.* Fie, pentru $t_0$ fixat, $\delta_0(t_0) = \sup\limits_{\varepsilon>0} \delta(\varepsilon, t_0)$.

Fie $\delta = \inf\limits_{0\leqslant t_0\leqslant\omega} \delta_0(t_0)$; $\delta_0 > 0$ căci $\delta_0(t_0)$ poate fi aleasă continuă.

Pentru $0 < \delta < \delta_0$ definim

$$\varepsilon(\delta) = \sup_{\sigma\geqslant 0} |x(t_0+\sigma; t_0, x_0)|.$$

Funcţia $\varepsilon(\delta)$ este monoton crescătoare; fie $\delta(\varepsilon)$ inversa ei.

Pentru $|x_0| < \delta(\varepsilon)$ rezultă $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$ pentru orice $0 \leqslant t_0 \leqslant \omega$.

Pentru $t_0 > 0$ arbitrar, avem $k\omega \leqslant t_0 < (k+1)\omega$, deci $0 \leqslant t_0 - k\omega < \omega$ şi $|x(t;\ t_0,\ x_0)| = |x(t - k\omega,\ t_0 - k\omega,\ x_0)| < \varepsilon(\delta)$ dacă $|x_0| < \delta$, deci $|x(t;\ t_0,\ x_0)| < \varepsilon$ dacă $|x_0| < \delta(\varepsilon)$.

PROPOZIŢIA 2. *Dacă $f(t+\omega, x) = f(t, x)$, funcţia $V(t, x)$ din teorema 1.2′ este periodică de perioadă $\omega$.*

*Demonstraţie.* Avem $V(t+\omega, x) = \sup\limits_{\sigma\geqslant 0} |x(t+\omega+\sigma;\ t+\omega,\ x)| = \sup\limits_{\sigma\geqslant 0} |x(t+\sigma;\ t,\ x)| = V(t, x)$.

Un caz particular de sisteme periodice îl constituie sistemele în care $f$ nu depinde de $t$. Rezultă că pentru asemenea sisteme stabilitatea este întotdeauna uniformă şi funcţia $V$ poate fi aleasă independentă de $t$.

DEFINIŢIE. *Soluţia $x(t)$ a sistemului* (1) *se numeşte nestabilă dacă nu este stabilă.*

Să formulăm acum o teoremă care permite să se recunoască nestabilitatea soluţiei banale $x = 0$.

TEOREMA 1.3. *Dacă există o funcţie $V(t, x)$ cu proprietăţile*

1° $|V(t, x)| \leqslant b(|x|)$, *unde $b(r)$ este monoton crescătoare şi continuă*;

2° *Pentru orice $\delta > 0$ şi orice $t_0 > 0$ există $x_0$ cu $|x_0| < \delta$ astfel ca $V(t_0, x_0) < 0$*;

3° $\limsup\limits_{h\to 0+} \dfrac{V(t+h,\ x(t+h,\ t,\ x)) - V(t, x)}{h} \leqslant -c(|x|)$, *unde $c(r)$ este monoton crescătoare şi continuă, $c(0) = 0$, atunci soluţia $x = 0$ a sistemului* (1) *este nestabilă.*

*Demonstraţie.* Să presupunem că soluţia este stabilă. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ şi $t_0 > 0$ există $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ astfel ca $|x_0| < \delta$ să implice $|x(t;\ t_0,\ x_0)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0$. Alegem pe $x_0$ astfel ca $|x_0| < \delta$ şi $V(t_0, x_0) < 0$. Din $|x_0| < \delta$ rezultă $|x(t;\ t_0, x_0)| < \varepsilon$, deci $|V(t,\ x(t;\ t_0,\ x_0))| \leqslant b(|x(t;\ t_0,\ x_0)|) < b(\varepsilon)$, pentru orice $t \geqslant t_0$. Din condiţia 3° rezultă în particular că $V(t, x(t;\ t_0,\ x_0))$ este monoton descrescătoare, deci pentru orice $t \geqslant t_0$ rezultă $V(t, x(t;\ t_0, x_0)) \leqslant V(t_0, x_0) < 0$, deci $|V(t, x(t;\ t_0, x_0)| \geqslant |V(t_0, x_0)|$, deci $b(|x(t;\ t_0,\ x_0)|) \geqslant |V(t_0,\ x_0)|$ deci $|x(t;\ t_0,\ x_0)| \geqslant b^{-1}(|V(t_0,\ x_0)|)$. Din condiţia 3° rezultă

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V(t+h,\ x(t+h;\ t_0,\ x_0)) - V(t,\ x(t;\ t_0,\ x_0))}{h} \leqslant -c(|x(t;\ t_0, x_0)|)$$

deci

$$V(t, x(t;\ t_0,\ x_0)) \leqslant V(t_0,\ x_0) - \int_{t_0}^{t} c(|x(u;\ t_0,\ x_0)|)\, \mathrm{d}u.$$

Din

$$|x(t;\ t_0,\ x_0)| \geqslant b^{-1}(|V(t_0,\ x_0)|)$$

rezultă

$$c(|x(t;\ t_0,\ x_0)|) \geqslant c[b^{-1}(|V(t_0,\ x_0)|)]$$

deci

$$V(t,\ x(t;\ t_0,\ x_0)) \leqslant V(t_0, x_0) - (t - t_0)\, c\, [b^{-1}(|V(t_0,\ x_0)|)].$$

Dar aceasta înseamnă că

$$\lim_{t\to\infty} V(t, x(t;\, t_0, x_0)) = -\infty,$$

ceea ce contrazice faptul că

$$|V(t,\ x(t;\ t_0,\ x_0))| < b(\varepsilon).$$

*Observație*. Analizînd demonstrația se vede că existența unei funcții $V$ cu proprietățile din enunț implică o nestabilitate foarte puternică: pentru orice $\varepsilon > 0$, orice $t_0 > 0$ și orice $\delta > 0$ există $x_0$ cu $|x_0| < \delta$ și $T > t_0$ astfel ca $|x(T;\, t_0, x_0)| \geqslant \varepsilon$.

## § 2. STABILITATEA ASIMPTOTICĂ

De multe ori nu este suficient faptul că perturbațiile cu acțiune de scurtă durată nu duc la perturbații mari ale soluției ci natura problemei cere ca efectul acestor perturbații să se amortizeze, să dispară după un interval destul de mare de variație a lui $t$. Astfel se ajunge la noțiunea de stabilitate asimptotică pe care o vom defini în cele ce urmează.

DEFINIȚIE. *Soluția $x \equiv 0$ se numește asimpt tic stabilă dacă e stabilă și în plus există $\delta_0(t_0) > 0$ cu proprietatea că dacă $|x_0| < \delta_0$ avem*

$$\lim_{t\to\infty} |x(t;\ t_0,\ x_0)| = 0.$$

*Soluția $x \equiv 0$ se numește uniform asimptotic stabilă dacă există $\delta_0 > 0$ și funcțiile $\delta(\varepsilon)$ și $T(\varepsilon)$ cu proprietatea că $|x_0| < \delta$ implică $|x(t;\, t_0, x_0)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0$ iar $|x_0| < \delta_0$, $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$ implică $|x(t;\ t_0,\ x_0)| < \varepsilon$.*

Stabilitatea asimptotică uniformă revine la stabilitatea uniformă și la $\lim\limits_{t\to\infty} x(t;\, t_0, x_0) = 0$ uniform în raport cu $t_0$ și $x_0$ $(t_0 \geqslant 0,\ |x_0| < \delta_0)$.

PROPOZIȚIE. *Dacă $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| < k(t)\,|x_1 - x_2|$ în $t \geqslant 0$, $|x| \leqslant H$ și $\int_{t_0}^{t} k(s)\mathrm{d}s = O(t - t_0)$, atunci existența funcției $T(\varepsilon)$ este suficientă pentru stabilitatea asimptotică uniformă.*

Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$, $T(\varepsilon)$ valoarea corespunzătoare; alegem pe $\delta(\varepsilon)$ astfel încît $|x_0| < \delta$ să implice $|x(t;\, t_0, x_0)| < \varepsilon$ pentru $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$. Asemenea alegere este posibilă pe baza lemei 0.7 luînd $\varphi_1 = x(t;\, t_0, x_0)$, $\varphi_2 = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$.

Obținem

$$|x(t;\ t_0,\ x_0)| \leqslant \delta e^{\int_{t_0}^{t_0+T} k(u)\mathrm{d}u}$$

și deci

$$\delta < \varepsilon e^{-\int_{t_0}^{t_0+T(\varepsilon)} k(u)\mathrm{d}u};$$

ținînd seama de proprietatea impusă lui $k(u)$ rezultă că $\delta$ depinde numai de $\varepsilon$.

TEOREMA 1.4. *Presupunem că există o funcţie* $V(t, x)$ *definită pentru* $t \geqslant t_0$, $|x| \leqslant H$ *continuă şi cu proprietăţile*:

a) $V(t, 0) \equiv 0$;

b) $V(t, x) \geqslant a(|x|)$, $a(0) = 0$, $a(r)$ *continuă şi monoton crescătoare*;

c) $$\limsup_{h \to 0+} \frac{V[t+h, x(t+h; t_0, x_0)] - V[t, x(t; t_0, x_0)]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant -c[V(t, x(t; t_0, x_0))],$$

*unde* $c(r)$ *este continuă şi monoton crescătoare*, $c(0) = 0$.

*Atunci soluţia* $x \equiv 0$ *este asimptotic stabilă.*

*Demonstraţie.* Pe baza teoremei 1.1. soluţia este stabilă. Din ipoteză $V[t, x(t; t_0, x_0)]$ rezultă monoton descrescătoare, deci există

$$V_0 = \lim_{t \to \infty} V[t, x(t; t_0, x_0)].$$

Dacă $V_0 \neq 0$, avem $c(V_0) \neq 0$ şi cum $c(r)$ e monotonă,

$$c[V(t, x(t; t_0, x_0))] > c(V_0),$$

deci

$$-c[V(t, x(t; t_0, x_0))] < -c(V_0)$$

deci

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{V[t+h, x(t+h; t_0, x_0)] - V[t, x(t; t_0, x_0)]}{h} \leqslant -c(V_0).$$

Integrînd rezultă

$$V[t, x(t; t_0, x_0)] - V(t_0, x_0) \leqslant -c(V_0)(t - t_0)$$

deci $V[t, x(t; t_0, x_0)]$ tinde către $-\infty$ cînd $t \to \infty$, ceea ce contrazice faptul că

$$V[t, x[t; t_0, x_0)] \geqslant a(|x(t; t_0, x_0)|).$$

Rezultă $V_0 = 0$ şi din $V[t, x(t; t_0, x_0)] \to 0$ rezultă $a(|x(t; t_0, x_0)|) \to 0$ deci $|x(t; t_0, x_0)| \to 0$ cînd $t \to \infty$ şi teorema e demonstrată.

*Observaţii.* 1) Considerăm sistemul

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x, y), \frac{dy}{dt} = Y(t, x, y), X(t, 0, 0) \equiv 0, Y(t, 0, 0) \equiv 0.$$

Presupunem că există $V(t, x, y)$ continuă şi cu $V(t, x, y) \geqslant a(|x|)$, $V(t, 0, 0) \equiv 0$,

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{V[t+h, x(t+h; t_0, x_0, y_0), y(t+h; t_0, x_0, y_0)] - V[t, x(t; t_0, x_0, y_0), y(t; t_0, x_0, y_0)]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant -c[V(t, x(t; t_0, x_0, y_0), y(t; t_0, x_0, y_0))].$$

Atunci soluţia $x = 0$, $y = 0$ este asimptotic stabilă în raport cu componentele $x$.

Într-adevăr, demonstraţia decurge ca mai sus şi se deduce

$$\lim_{t\to\infty} V[t,\ x(t;\ t_0,\ x_0,\ y_0),\ y(t;\ t_0,\ x_0,\ y_0)] = 0$$

şi deci

$$\lim_{t\to\infty} a(|x(t;\ t_0,\ x_0,\ y_0)|) = 0$$

deci

$$\lim_{t\to\infty} |x(t;\ t_0,\ x_0,\ y_0)| = 0.$$

2) Se vede de asemenea uşor că atît definiţia stabilităţii asimptotice cît şi întreaga teoremă se pot relativiza la o mulţime $M$ de soluţii.

TEOREMA 1.5. *Presupunem că există o funcţie $V(t,\ x)$ cu proprietăţile :*

$$a(|x|) \leqslant V(t,\ x) \leqslant b(|x|),$$

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V[t+h,\ x(t+h;\ t_0,\ x_0)] - V[t,\ x(t;\ t_0,\ x_0)]}{h} \leqslant$$
$$\leqslant -c(|(x(t;\ t_0,\ x_0)|).$$

*Atunci soluţia banală a sistemului este uniform asimptotic stabilă.*

*Demonstraţie.* Fie $\varepsilon > 0$, $\delta(\varepsilon) < b^{-1}[a(\varepsilon)]$; dacă $|x| < \delta(\varepsilon)$ rezultă

$$a(|x(t;\ t_0,\ x_0)|) \leqslant V[t,\ x(t;\ t_0,\ x_0)] \leqslant V(t_0,\ x_0) \leqslant$$
$$\leqslant b(|x_0|) < b(\delta) < a(\varepsilon)$$

deci $|x(t;\ t_0,\ x_0)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0$.

Fie $|x| < H$ domeniul în care sînt îndeplinite condiţiile din enunţ, $\delta_0 = \delta(H)$, $T(\varepsilon) = \dfrac{b(\delta_0)}{c[\delta(\varepsilon)]}$. Fie $|x_0| < \delta_0$. Să presupunem că pe $[t_0,\ t_0+T]$ am avea $|x(t;\ t_0,\ x_0)| \geqslant \delta(\varepsilon)$. Atunci

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V[t+h;\ x(t+h;\ t_0,\ x_0)] - V[t;\ x(t;\ t_0,\ x_0)]}{h} \leqslant -c[\delta(\varepsilon)]$$

pentru $t \in [t_0,\ t_0+T]$ şi integrînd

$$V[t,\ x(t;\ t_0,\ x_0)] - V[t_0,\ x_0] \leqslant -c[\delta(\varepsilon)](t-t_0),$$

$$V[t,\ x(t;\ t_0, x_0)] \leqslant V[t_0,\ x_0] - c[\delta(\varepsilon)](t-t_0) \leqslant b(\delta_0) - c[\delta(\varepsilon)](t-t_0).$$

Pentru $t = t_0 + T$ *se capătă*

$$V[t,\ x(t;\ t_0,\ x_0)] \leqslant b(\delta_0) - c[\delta(\varepsilon)]T = 0,$$

ceea ce este contradictoriu. Rezultă că există $t_1 \in [t_0,\ t_0+T]$ astfel ca $|x(t_1;\ t_0,\ x_0)| < \delta(\varepsilon)$ deci $|x(t;\ t_0,\ x_0)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_1$, deci în orice caz pentru $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$.

*Observaţii.* 1) Dacă

$$\lim_{r\to\infty} a(r) = \lim_{r\to\infty} b(r),$$

atunci

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} \delta(\varepsilon) = \infty$$

şi dacă proprietăţile din enunţ au loc pentru toţi $x$ rezultă şi $\delta_0 = \infty$. În acest caz spunem că avem de-a face cu stabilitatea în mare.

2) Ca mai sus se vede că dacă sîntem în situaţia din observaţia 1) de la teorema precedentă şi funcţia $V(t, x, y)$ verifică condiţiile

$$a(|x|) \leqslant V(t, x, y) \leqslant b(|x| + |y|),$$

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V[t+h, x(t+h; t_0, x_0, y_0), y(t+h; t_0, x_0, y_0)] - V[t, x(t; t_0, x_0, y_0), y(t; t_0\, x_0, y_0)]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant -c\,(|x(t; t_0, x_0, y_0)| + |y(t; t_0, x_0, y_0)|),$$

atunci are loc stabilitatea uniformă în raport cu componentele $x$. Într-adevăr, ca în demonstraţia teoremei se arată că există $t_1 \in [t_0, t_0 + T]$ astfel încît

$$|x(t_1; t_0, x_0, y_0)| + |y(t_1; t_0, x_0, y_0)| < \delta(\varepsilon)$$

şi apoi totul rezultă din proprietatea lui $\delta(\varepsilon)$.

3) În problemele practice este de mare importanţă evaluarea numerelor $\delta(\varepsilon)$, $\delta_0$, $T(\varepsilon)$. Să observăm că din demonstraţia teoremei rezultă că dacă avem la îndemînă funcţia $V(t, x)$ şi funcţiile $a(r)$, $b(r)$, $c(r)$, putem lua $\delta(\varepsilon) = b^{-1}[a(\varepsilon)]$, $\delta_0 = \delta(H)$ (şi cînd $V$ e definită pentru orice $x$, $\delta_0 = \lim_{\varepsilon\to\infty} \delta(\varepsilon) = b^{-1}[a(\infty)]$), $T(\varepsilon) = \dfrac{b[\delta_0]}{c[\delta(\varepsilon)]}$.

Să facem acum cîteva observaţii în legătură cu stabilitatea asimptotică uniformă.

1° În definiţia stabilităţii asimptotice uniforme intervin funcţiile $\delta(\varepsilon)$ şi $T(\varepsilon)$. Să arătăm că aceste funcţii pot fi alese continue şi monotone.

*Demonstraţie*. Fie $\varepsilon_n$ un şir pozitiv, monoton, tinzînd la zero, $\delta_1(\varepsilon) = \sup_{\delta} \delta(\varepsilon_{n+1})$ pentru $\varepsilon_{n+1} \leqslant \varepsilon < \varepsilon_n$; $|x_0| < \delta_1(\varepsilon)$ implică $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon_{n+1} \leqslant \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0$. Definim pe $\delta^*(\varepsilon)$ liniară în $[\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n]$ şi $\delta^*(\varepsilon_{n+1}) = \delta_1(\varepsilon_{n+2})$, $\delta^*(\varepsilon_n) = \delta_1(\varepsilon_{n+1})$. Cum $\delta_1(\varepsilon_{n+1}) \leqslant \delta_1(\varepsilon_n)$ (căci $\delta_1(\varepsilon_n)$ a fost definită ca margine superioară a mulţimii numerelor $\delta$ cu proprietatea că $|x_0| < \delta$ implică $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon_n$) şi în plus $\delta_1(\varepsilon_n) \to 0$ cînd $n \to \infty$, rezultă că $\delta_1(\varepsilon_{n+1}) = \delta_1(\varepsilon_n)$ numai pe porţiuni finite ale şirului, pe care le putem suprima, astfel încît $\delta_1(\varepsilon_n)$ şi deci $\delta^*(\varepsilon)$ să fie strict monoton crescătoare. Funcţia $\delta^*(\varepsilon)$ va fi continuă, strict crescătoare, $\delta^*(0) = 0$ şi $|x_0| < \delta^*(\varepsilon)$ implică $|x_0| < \delta^*(\varepsilon_n) = \delta_1(\varepsilon_{n+1})$ $(\varepsilon_{n+1} \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_n)$ deci $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon_{n+1} \leqslant \varepsilon$, deci $\delta^*(\varepsilon)$ are toate proprietăţile cerute.

Analog, fie $T_1(\varepsilon) = \inf_T T(\varepsilon_{n+1})$ pentru $\varepsilon_{n+1} \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_n$; $|x_0| < \delta_0$ şi $t \geqslant t_0 + T_1(\varepsilon)$ implică $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon_{n+1} \leqslant \varepsilon$. Definim pe $T^*(\varepsilon)$ liniară în $[\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n]$ şi $T^*(\varepsilon_{n+1}) = T_1(\varepsilon_{n+2})$, $T^*(\varepsilon_n) = T_1(\varepsilon_{n+1})$. Cum $T_1(\varepsilon_{n+1}) \geqslant T_1(\varepsilon_n)$ (căci $T_1(\varepsilon_n)$ a fost definită ca margine inferioară a numerelor $T$ cu proprietatea că $t \geqslant t_0 + T$ implică $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon_n$, şi

$T_1(\varepsilon_{n+1})$ are această proprietate) şi $\lim\limits_{n\to\infty} T_1(\varepsilon_n) = \infty$, egalitatea $T_1(\varepsilon_{n+1}) = T_1(\varepsilon_n)$ poate avea loc numai pe porţiuni finite ale şirului pe care le putea suprima.

Funcţia $T^*(\varepsilon)$ e monoton descrescătoare, continuă, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} T^*(\varepsilon) = \infty$ şi $t \geqslant t_0 + T^*(\varepsilon)$ implică $t \geqslant t_0 + T^*(\varepsilon_n) = t_0 + T_1(\varepsilon_{n+1})$ deci $|x(t;\, t_0,\, x_0)| < \varepsilon_{n+1} \leqslant \varepsilon$, dacă $\varepsilon_{n+1} \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_n$.

2° Fie $\varepsilon(\delta)$ inversa funcţiei $\delta(\varepsilon)$ şi $\eta(T)$ inversa funcţiei $T(\eta)$; avem $|x(t;\, t_0,\, x_0)| < \varepsilon(|x_0|)$ pentru $t \geqslant t_0$, $|x(t;\, t_0,\, x_0)| < \eta(t - t_0)$ pentru $t \geqslant t_0$, $|x_0| < \delta_0$. De aici rezultă $|x(t;\, t_0,\, x_0)|^2 < \varepsilon(|x_0|)\ \eta(t-t_0)$ pentru $|x_0| < \delta_0$, $t \geqslant t_0$. Prin urmare stabilitatea asimptotică uniformă este echivalentă cu existenţa a două funcţii $\chi(r)$ şi $\psi(T)$, prima monoton crescătoare, a doua monoton descrescătoare, astfel încît

$$|x(t;\, t_0,\, x_0)| \leqslant \chi(|x_0|)\, \psi(t - t_0).$$

3° Dacă $\chi(r)$ este liniară şi $|f(t,\, x)| \leqslant L(r)\, |x|$ pentru $|x| < r$, stabilitatea este exponenţială, adică există constante $\alpha > 0$, şi $B > 0$ astfel ca

$$|x(t;\, t_0,\, x_0)| \leqslant B\, e^{-\alpha(t-t_0)} |x_0|.$$

Construim o funcţie Liapunov cu formula

$$V(t,\, x) = \int_t^{t+T} |x(\tau;\, t,\, x)|^2\, d\tau.$$

Avem

$$|x(t;\, t_0,\, x_0)| \leqslant k\, |x_0|\, \psi(0),$$

deci

$$|x(\tau;\, t,\, x)| \leqslant k\, \psi(0) |x| \text{ pentru } \tau \geqslant t, \text{ deci}$$

$$V(t,\, x) \leqslant \int_t^{t+T} k^2 \psi^2(0)\, |x|^2\, d\tau = Tk^2 \psi^2(0)\, |x|^2.$$

Mai departe,

$$\frac{d}{d\tau} x(\tau;\, t,\, x) = f(\tau,\, x(\tau;\, t,\, x)),$$

$$\left(x(\tau;t,x), \frac{d}{d\tau} x(\tau;t,x)\right) = (x(\tau;t,x), f(\tau, x(\tau;t,x))),$$

deci

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau} |x(\tau;\, t,\, x)|^2 = (x(\tau;\, t,\, x), f(\tau,\, x(\tau;\, t,\, x))).$$

Dacă $|x| \leqslant r_1$ rezultă

$$|x(\tau;\, t,\, x)| \leqslant k\, \psi(0)\, r_1$$

şi

$$|f(t, x(\tau; t, x))| \leqslant L(r_1)\, |x(\tau; t, x)|.$$

De aici

$$\left|\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}|x(\tau; t, x)|^2\right| \leqslant L(r_1)\,|x(\tau; t, x)|^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\ln |x(\tau; t, x)|^2 \geqslant -2L(r_1), \quad |x(\tau; t, x)|^2 \geqslant e^{-2L(r_1)(\tau-t)}\,|x|^2.$$

Rezultă

$$V(t, x) \geqslant |x|^2\int_t^{t+T} e^{-2L(r_1)(\tau-t)}\,\mathrm{d}\tau = |x|^2\int_0^T e^{-2L(r_1)s}\,\mathrm{d}s.$$

În definitiv

$$\alpha(T)\,|x|^2 \leqslant V(t, x) \leqslant \beta(T)\,|x|^2.$$

Mai departe,

$$V[t, x(t; t_0, x_0)] = \int_t^{t+T} |x(\tau; t, x(t; t_0, x_0))|^2\,\mathrm{d}\tau = \int_t^{t+T} |x(\tau; t_0, x_0)|^2\,\mathrm{d}\tau,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V[t, x(t; t_0, x_0)] = |x(t+T; t_0, x_0)|^2 - |x(t; t_0, x_0)|^2 =$$

$$=(|x(t+T; t, x(t; t_0, x_0))| - |x(t; t_0, x_0)|)(|x(t+T; t_0, x_0)| + |x(t; t_0, x_0)|) \leqslant$$

$$\leqslant (k\,\psi(T)\,|x(t; t_0, x_0)| - |x(t; t_0, x_0)|)(|x(t+T; t_0, x_0)| + |x(t; t_0, x_0)|).$$

Alegem pe $T$ suficient de mare astfel ca $\psi(T) < \frac{1}{2k}$ deci $k\,\psi(T) < \frac{1}{2}$; rezultă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t, x(t; t_0, x_0)) \leqslant -\frac{1}{2}|x(t; t_0, x_0)|\,(|x(t+T; t_0, x_0)| + |x(t; t_0, x_0)|) \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{1}{2}\,|x(t; t_0, x_0)|^2.$$

Din existenţa funcţiei $V(t, x)$ cu proprietăţile stabilite, rezultă imediat stabilitatea exponenţială. Din

$$V(t, x(t; t_0, x_0)) \leqslant \beta(T)\,|x(t; t_0, x_0)|^2$$

rezultă

$$-|x(t; t_0, x_0)|^2 \leqslant -\frac{1}{\beta(T)}V[t, x(t; t_0, x_0)],$$

deci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t, x(t; t_0, x_0)) \leqslant -\frac{1}{2\beta(T)}V(t, x(t; t_0, x_0)).$$

De aici

$$\alpha(T)\ |x(t;t_0,x_0)|^2 \leqslant V(t,x(t;t_0,x_0)) \leqslant V(t_0,x_0)\,e^{-\frac{1}{2\beta(T)}(t-t_0)} \leqslant$$

$$\leqslant \beta(T)\,|x_0|^2\,e^{-\frac{1}{2\beta(T)}(t-t_0)}.$$

Rezultă în definitiv

$$|x(t;t_0,x_0)|^2 \leqslant \frac{\beta(T)}{\alpha(T)}\,e^{-\frac{1}{2\beta(T)}(t-t_0)}\,|x_0|^2.$$

sau

$$|x(t;t_0,x_0)| \leqslant \sqrt{\frac{\beta(T)}{\alpha(T)}}\,e^{-\frac{1}{4\beta(T)}(t-t_0)}\,|x_0|.$$

4° Din cele demonstrate la punctul precedent rezultă că dacă $f(t, x)$ e omogenă în $x$ de gradul întîi, atunci stabilitatea asimptotică uniformă implică stabilitatea exponențială.

Într-adevăr, dacă $f(t, x)$ e omogenă în $x$ de gradul întîi, rezultă că $x(t;t_0,kx_0) = k\,x(t;t_0,x_0)$; în ambii membri ai egalității avem soluții ale ecuației și aceste soluții coincid pentru $t=t_0$. Într-adevăr

$$\frac{d}{dt}k\,x(t;t_0,x_0) = k\frac{d}{dt}x(t;t_0,x_0) =$$

$$= kf(t,\ x(t;\ t_0,x_0)) = f(t,kx(t;\ t_0,\ x_0)).$$

Rezultă

$$|x(t;t_0,kx_0)| = |k|\ |x(t;\ t_0,\ x_0)| \leqslant k\,\chi(|x_0|)\,\psi(t-t_0),$$

deci

$$|x(t;t_0,x_0)| = \left|x\left(t;t_0,\frac{|x_0|}{\delta_0}\frac{x_0}{|x_0|}\delta_0\right)\right| \leqslant \frac{1}{\delta_0}|x_0|\,\chi(\delta_0)\,\psi(t-t_0),$$

deci

$$\chi^*(r) = \frac{1}{\delta_0}\chi(\delta_0)\,r$$

ceea ce arată că $\chi(r)$ poate fi luată liniară.

În particular, dacă $f(t, x) = A(t)\,x$ condiția de omogeneitate e îndeplinită și obținem *teorema lui Persidski*: *la sistemele liniare stabilitatea asimptotică uniformă implică stabilitatea exponențială.*

5° Să arătăm că dacă $f(t, x)$ este periodică în $t$ cu perioadă $\omega$, $f(t+\omega, x) \equiv f(t, x)$, stabilitatea asimptotică este întotdeauna uniformă.

Stabilitatea uniformă a fost pusă în evidență anterior. Să luăm $\sigma(\tau) = \sup |x(t_0+u;\ t_0, x_0)|$ pentru $u \geqslant \tau$, $0 \leqslant t_0 \leqslant \omega$, $|x_0| < r$.

Funcţia $x(t_0 + u; t_0, x_0)$ e periodică în $t_0$, continuă şi deci marginea superioară construită este de fapt margine superioară pe toată axa $t_0$.

Evident, $\sigma(\tau)$ este monoton descrescătoare; inversa ei este funcţia $T(\varepsilon)$ din definiţia stabilităţii asimptotice uniforme.

Vom stabili acum teorema de existenţă a funcţiei Liapunov în cazul stabilităţii asimptotice uniforme. Există în momentul de faţă diferite procedee de construcţie a funcţiei Liapunov. Printre acestea vom alege pe cel dat recent de Massera ca fiind cel mai simplu.

TEOREMA 1.6. *Dacă soluţia banală a sistemului este uniform asimptotic stabilă, există o funcţie $V(t, x)$ cu toate proprietăţile din teorema 1.4.*

*Demonstraţie.* Fie $G(r)$ cu $G(0) = 0$, $G'(0) = 0$, $G(r) > 0$, $G''(r) > 0$ şi $\alpha > 1$. Notăm $g(r) = G''(r)$. Atunci

$$G(r) = \int_0^r du \int_0^u g(v)\,dv\,; \quad G\left(\frac{r}{\alpha}\right) = \int_0^{\frac{r}{\alpha}} du \int_0^u g(v)\,dv.$$

Punem $u = \dfrac{w}{\alpha}$; se capătă

$$G\left(\frac{r}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}\int_0^r dw \int_0^{\frac{w}{\alpha}} g(v)\,dv < \frac{1}{\alpha}\int_0^r dw \int_0^w g(v)\,dv = \frac{1}{\alpha}G(r).$$

Alegem

$$V(t, x) = \sup_{\sigma \geqslant 0} G(|x(t+\sigma; t, x)|)\frac{1+\alpha\sigma}{1+\sigma}\,;$$

pentru $\sigma = 0$ se capătă $G(|x|)$ deci $V(t, x) \geqslant G(|x|)$. Fie $\varepsilon(\delta)$ funcţia inversă a lui $\delta(\varepsilon)$. Avem

$$|x(t+\sigma; t, x)| < \varepsilon(|x|), \quad G(|x(t+\sigma; t, x)|) < G(\varepsilon(|x|)), \quad \frac{1+\alpha\sigma}{1+\sigma} < \alpha$$

deci

$$V(t, x) \leqslant \alpha G[\varepsilon(|x|)].$$

Pentru $\sigma \geqslant T(\varepsilon)$ avem $|x(t+\sigma; t, x)| < \varepsilon$, deci dacă $\sigma \geqslant T\left(\dfrac{1}{\alpha}|x|\right)$

rezultă $|x(t+\sigma; t, x)| < \dfrac{1}{\alpha}|x|$, deci $G(|x(t+\sigma; t, x)|) < G\left(\dfrac{1}{\alpha}|x|\right)$ şi

$$G(|x(t+\sigma; t, x)|)\frac{1+\alpha\sigma}{1+\sigma} < \alpha G\left(\frac{1}{\alpha}|x|\right) < G(|x|) \leqslant V(t, x).$$

Rezultă

$$V(t, x) = \sup_{0 \leqslant \sigma \leqslant T\left(\frac{1}{\alpha}|x|\right)} G(|x(t+\sigma;\, t,\, x)|)\frac{1+\alpha\sigma}{1+\sigma}$$

şi deoarece funcţia este continuă există un punct $\sigma_1$ în care marginea superioară este atinsă. Putem deci scrie

$$V(t, x) = G(|x(t+\sigma_1;\, t,\, x)|)\frac{1+\alpha\sigma_1}{1+\sigma_1}.$$

Fie $x = x(t;\, t_0,\, x_0)$, $x^* = x(t+h;\, t,\, x)$. Avem

$$V(t+h, x^*) = G(|x(t+h+\sigma^*;\, t+h,\, x^*)|)\frac{1+\alpha\sigma^*}{1+\sigma^*} =$$

$$= G(|x(t+h+\sigma^*;\, t,\, x)|)\frac{1+\alpha\sigma^*}{1+\sigma^*}.$$

Notăm $\sigma^* + h = \sigma$. Avem

$$V(t+h, x^*) = G(|x(t+\sigma;\, t,\, x)|)\frac{1+\alpha\sigma^*}{1+\sigma^*} =$$

$$= G(|x(t+\sigma;\, t,\, x)|)\frac{1+\alpha\sigma}{1+\sigma}\left[1 - \frac{(\alpha-1)h}{(1+\sigma^*)(1+\alpha\sigma)}\right].$$

Într-adevăr,

$$\frac{1+\alpha\sigma}{1+\sigma}\left(1 - \frac{(\alpha-1)h}{(1+\sigma^*)(1+\alpha\sigma)}\right) = \frac{1+\alpha\sigma}{1+\sigma} - \frac{\alpha h - h}{(1+\sigma)(1+\sigma^*)} =$$

$$= \frac{1+\sigma^*+\alpha\sigma+\alpha\sigma\sigma^*-\alpha h+h}{(1+\sigma)(1+\sigma^*)} = \frac{1+\sigma^*+\alpha\sigma^*+\alpha\sigma\sigma^*+h}{(1+\sigma)(1+\sigma^*)} =$$

$$= \frac{1+\sigma+\alpha\sigma^*(1+\sigma)}{(1+\sigma)(1+\sigma^*)} = \frac{1+\alpha\sigma^*}{1+\sigma^*}.$$

Rezultă

$$V(t+h, x^*) \leqslant V(t, x)\left[1 - \frac{(\alpha-1)h}{(1+\sigma^*)(1+\alpha\sigma)}\right] = V(t, x) -$$

$$- \frac{(\alpha-1)h\,V(t, x)}{(1+\sigma^*)(1+\alpha\sigma)}$$

deci

$$\frac{V(t+h, x^*) - V(t, x)}{h} \leqslant -\frac{(\alpha-1)V(t, x)}{(1+\sigma^*)(1+\alpha\sigma)}.$$

Avem $0 \leqslant \sigma^* \leqslant T\left(\frac{1}{\alpha}|x|\right)$, $0 < \sigma \leqslant T\left(\frac{1}{\alpha}|x^*|\right) + h$, deci

$$\frac{V(t+h, x^*) - V(t, x)}{h} \leqslant -\frac{(\alpha-1) V(t, x)}{\left[1 + T\left(\frac{1}{\alpha}|x^*|\right)\right]\left[1 + \alpha T\left(\frac{1}{\alpha}|x^*|\right) + \alpha h\right]}.$$

Rezultă de aici

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{V[t+h, x(t+h; t_0, x_0)] - V[t, x(t; t_0, x_0)]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{(\alpha-1) G(|x(t; t_0, x_0)|)}{\left[1 + T\left(\frac{1}{\alpha}|x(t; t_0, x_0)|\right)\right]\left[1 + \alpha T\left(\frac{1}{\alpha}|x(t; t_0, x_0)|\right)\right]}.$$

Am folosit faptul că

$$x^* = x(t+h; t, x) = x(t+h; t, x(t; t_0, x_0)) = x(t+h; t_0, x_0),$$

$$V(t, x) \geqslant G(|x|), \quad \lim_{h \to 0} |x^*| = |x(t; t_0, x_0)| \text{ şi } T(\varepsilon) \text{ e continuă.}$$

În definitiv am arătat că $V(t, x)$ verifică toate condiţiile din teorema 1.4.

În cele ce urmează vom studia proprietăţile de regularitate ale funcţiei $V(t, x)$.

Vom presupune că $f(t, x)$ are următoarea proprietate: pentru orice pereche $x_1$ şi $x_2$ cu $|x_1| \leqslant h$, $|x_2| \leqslant h$,

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqslant L_h(t) |x_1 - x_2|.$$

Pe baza lemei 0.7 rezultă că pentru orice pereche de soluţii $x(t; t_0, x_1)$, $x(t; t_0, x_2)$ care rămîn în $|x| \leqslant h$ avem

$$|x(t; t_0, x_1) - x(t; t_0, x_2)| \leqslant |x_1 - x_2| \, e^{\int_{t_0}^{t} L_h(s) ds}$$

Am văzut mai înainte că

$$V(t, x) = G(|x(t + \sigma_1; t, x)|)\frac{1 + \alpha\sigma_1}{1 + \sigma_1}, \text{ unde } 0 \leqslant \sigma_1 \leqslant T\left(\frac{1}{\alpha}|x|\right).$$

Fie acum $x_1$ şi $x_2$ astfel ca $|x_1| < \delta(h)$, $|x_2| < \delta(h)$; atunci soluţiile $x(t; t_0, x_1)$ şi $x(t; t_0, x_2)$ rămîn în $|x| \leqslant h$. Notăm

$$T_1 = T\left(\frac{1}{\alpha}|x_1|\right), \quad T_2 = T\left(\frac{1}{\alpha}|x_2|\right).$$

Avem

$$\left| G(|x(t+\sigma_1; t, x_1)|) \frac{1+\alpha\sigma_1}{1+\sigma_1} - G(|x(t+\sigma_1; t, x_2)|) \frac{1+\alpha\sigma_1}{1+\sigma_1} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha G'(r_0) \Big| |x(t+\sigma_1; t, x_1)| - |x(t+\sigma_1; t, x_2)| \Big|,$$

$r_0$ fiind cuprins între $|x(t+\sigma_1; t, x_1)|$ şi $|x(t+\sigma_1; t, x_2)|$ deci $0 \leqslant r_0 < h$.

Cum $G'(r)$ e monotonă, rezultă $G'(r_0) < G'(h)$.

Rezultă

$$\left| \{ G(|x(t+\sigma_1; t, x_1)|) - G(|x(t+\sigma_1; t, x_2)|) \} \frac{1+\alpha\sigma_1}{1+\sigma_1} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha G'(h)\, e^{\int_t^{t+T_1} L_h(s)\, ds} |x_1 - x_2|.$$

Deci

$$-\alpha G'(h)\, e^{\int_t^{t+T_1} L_h(s)\, dx} |x_1 - x_2| + G(|x(t+\sigma_1; t; x_1)|) \frac{1+\alpha\sigma_1}{1+\sigma_1} \leqslant$$

$$\leqslant G(|x(t+\sigma_1; t, x_2)|) \frac{1+\alpha\sigma_1}{1+\sigma_1}.$$

De aici

$$-\alpha G'(h)\, e^{\int_t^{t+T_1} L_h(s)\, ds} |x_1 - x_2| + V(t, x_1) \leqslant G(|x(t+\sigma_1; t, x_2)|) \frac{1+\alpha\sigma_1}{1+\sigma_1} \leqslant$$

$$\leqslant V(t, x_2).$$

Prin urmare

$$V(t, x_1) - V(t, x_2) \leqslant \alpha G'(h)\, e^{\int_t^{t+T_1} L_h(s)\, ds} |x_1 - x_2|.$$

Aceleaşi calcule dau

$$V(t, x_2) - V(t, x_1) \leqslant \alpha G'(h)\, e^{\int_t^{t+T_2} L_h(s)\, ds} |x_1 - x_2|.$$

Fie

$$\overline{T} = \max(T_1, T_2).$$

Rezultă

$$|V(t, x_2) - V(t, x_1)| \leqslant \alpha G'(h)\, e^{\int_t^{t+\overline{T}} L_h(s)\, ds} |x_1 - x_2|$$

sau

$$|V(t, x_2) - V(t, x_1)| \leqslant M(h, t, r)|x_1 - x_2|$$

pentru $r \leqslant |x_1| < \delta(h)$, $r \leqslant |x_2| < \delta(h)$, $t \geqslant 0$,

$$M(h; t, r) = \alpha G'(h) e^{\int_t^{t+T\left(\frac{1}{\alpha} r\right)} L_h(s) ds}.$$

Dacă $L_h$ este constantă, sau dacă are proprietatea $\left|\int_t^{t+u} L_h(s) ds\right| \leqslant \leqslant K|u|$, atunci $M$ nu depinde de $t$.

În cele ce urmează vom face această ipoteză. De asemenea vom presupune pe $h$ fixat.

Alegînd pe $G(r)$ astfel ca

$$G'(r) \leqslant A e^{-KT\left(\frac{1}{\alpha}\delta(r)\right)}$$

putem obține

$$|V(t, x_1) - V(t, x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2| \text{ pentru } |x_i| \leqslant h_0.$$

Într-adevăr, să notăm

$$|x(t + \sigma_1; t, x_1)| = r_1, \quad |x(t + \sigma_1; t, x_2)| = r_2.$$

Dacă $r_2 \geqslant r_1$ avem $G(r_2) \geqslant G(r_1)$ deci

$$V(t, x_2) \geqslant G(|x(t + \sigma_1; t, x_2)|) \frac{1 + \alpha\sigma_1}{1 + \sigma_1} \geqslant$$

$$\geqslant G(|x(t + \sigma_1; t, x_1)|) \frac{1 + \alpha\sigma_1}{1 + \sigma_1} = V(t, x_1).$$

Dacă $r_2 \leqslant r_1$ putem scrie

$$0 \leqslant G(r_1) - G(r_2) = G'(\rho)(r_1 - r_2) \leqslant G'(r_1)(r_1 - r_2) \leqslant$$

$$\leqslant A e^{-KT\left(\frac{1}{\alpha}\delta(r_1)\right)}(r_1 - r_2) \leqslant A e^{-KT\left(\frac{1}{\alpha}\delta(r_1)\right)}|x(t + \sigma_1; t, x_1) - x(t +$$

$$+ \sigma_1; t, x_2)| \leqslant A e^{-KT\left(\frac{1}{\alpha}\delta(r_1)\right)} e^{KT\left(\frac{1}{\alpha}|x_1|\right)}|x_1 - x_2|.$$

Din

$$|x(t + \sigma_1; t, x_1)| = r_1$$

rezultă

$$|x_1| \geqslant \delta(r_1),$$

deci

$$T\left(\frac{1}{\alpha}|x_1|\right) \leqslant T\left(\frac{1}{\alpha}\delta(r_1)\right)$$

deci

$$0 \leqslant G(r_1) - G(r_2) \leqslant A \; |x_1 - x_2|.$$

De aici

$$0 \leqslant V(t, x_1) - G(|x(t+\sigma_1; t, x_2)|) \frac{1+\alpha\sigma_1}{1+\sigma_1} \leqslant \alpha A |x_1 - x_2| (*)$$

deci

$$V(t, x_2) \geqslant G(|x(t+\sigma_1; t, x_2)|) \frac{1+\alpha\sigma_1}{1+\sigma_1} \geqslant V(t, x_1) - \alpha A \; |x_1 - x_2|.$$

Rezultă astfel în toate cazurile

$$V(t, x_2) - V(t, x_1) \geqslant -\alpha A \; |x_1 - x_2|.$$

Schimbînd acum rolurile lui $x_1$ şi $x_2$ se capătă

$$V(t, x_1) - V(t, x_2) \geqslant -\alpha A \; |x_1 - x_2|$$

deci în definitiv

$$|V(t, x_1) - V(t, x_2)| \leqslant \alpha A \; |x_1 - x_2|,$$

dacă $|x_i| \neq 0$.

Dacă $x_2 = 0$, prima inegalitate $(*)$ dă $0 \leqslant V(t, x_1) \leqslant \alpha A \; |x_1|$, deci relaţia obţinută e valabilă şi în acest caz. Dacă $x_1 = x_2 = 0$ relaţia e banală.

Rămîne de arătat că putem alege pe $G$ astfel încît să verifice condiţia cerută. Pentru aceasta nu avem decît să luăm

$$G(r) = A \int_0^r e^{-KT\left(\frac{1}{\alpha}\delta(r)\right)} dr;$$

avem $G(0) = 0$, $G'(r) = A \; e^{-KT\left(\frac{1}{\alpha}\delta(r)\right)} > 0$, $G'(0) = 0$, căci $\delta(0) = 0$, $T(0) = \infty$, şi $G'(r)$ e monoton crescătoare deci $G''(r)$ există aproape peste tot şi e pozitivă.

În definitiv putem formula:

TEOREMA 1.6′. *Dacă soluţia banală a sistemului este uniform asimptotic stabilă şi*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqslant L_h(t) \; |x_1 - x_2| \; \textit{pentru} \; |x_1| \leqslant h, \; |x_2| \leqslant h \; \textit{şi}$$

$$\left| \int_t^{t+u} L_h(s) \, ds \right| \leqslant K \; |u|,$$

*există o funcţie* $V(t, x)$ *cu proprietăţile*

1° $a(|x|) \leqslant V(t, x) \leqslant b(|x|)$;

2° $\limsup\limits_{h\to 0+} \dfrac{V[t+h, x(t+h; t_0, x_0)] - V[t, x(t; t_0, x_0)]}{h} \leqslant$

$\leqslant -c(|x(t; t_0, x_0)|)$;

3° $|V(t, x_1) - V(t, x_2)| \leqslant M\, |x_1 - x_2|$ *pentru* $|x_1| \leqslant \delta(\delta_0)$, $|x_2| \leqslant \delta(\delta_0)$.

Această teoremă va juca un rol deosebit în ceea ce urmează. Pe baza ei vom deduce o serie de propoziții care subliniază însemnătatea stabilității asimptotice uniforme.

Să observăm în încheierea acestor considerații că dacă soluția banală este uniform asimptotic stabilă în mare, $\lim\limits_{\varepsilon\to\infty} \delta(\varepsilon) = \infty$ deci $\lim\limits_{\delta\to\infty} \varepsilon(\delta) = \infty$, și cum $a(r) = G(r)$, $b(r) = \alpha G(\varepsilon(r))$ rezultă

$$\lim_{r\to\infty} a(r) = \lim_{r\to\infty} b(r) = \infty.$$

De asemenea, dacă $f$ este periodică în raport cu $t$ de perioadă $\omega$, $V(t, x)$ este periodică pe perioada $\omega$ și dacă în particular $f$ nu depinde de $t$, $V$ nu depinde de $t$. Aceste fapte se arată la fel ca în cazul stabilității uniforme.

Vom mai da o teoremă care reprezintă o slăbire a teoremei generale 1.5 în cazul sistemelor periodice în $t$, respectiv independente de $t$.

TEOREMA 1.5′. *Fie* $f(t, x)$ *periodică în* $t$, *cu perioada* $\omega$: $f(t+\omega, x) \equiv f(t, x)$. *Dacă există* $V(t, x)$ *periodică cu perioada* $\omega$ *și cu proprietățile*:

a) $a|(x)| \leqslant V(t, x) \leqslant b(|x|)$, $b(h_0) < a(h_{1'})$, $h_0 < h_1 < h$;

b) $\limsup\limits_{h\to 0+} \dfrac{V[t+h, x(t+h; t, x)] - V[t, x]}{h} \leqslant 0$ *pentru* $|x| \leqslant h$

*egalitatea din* b) *putînd avea loc numai în punctele unei mulțimi* $\mathfrak{M}$ *care nu conține semitraiectorii întregi, atunci soluția* $x = 0$ *este asimptotic stabilă și sfera* $|x| < h_0$ *se află în domeniul de atracție.*

*Demonstrație.* Stabilitatea simplă și faptul că $|x_0| < h_0$ implică $|x(t; t_0, x_0)| < h_1$ rezultă din

$$a(|x(t; t_0, x_0)|) \leqslant V(t, x(t; t_0, x_0)) \leqslant V(t_0, x_0) \leqslant b(|x_0|) < b(h_0) < a(h_1).$$

Presupunem că există o traiectorie și un număr pozitiv $\eta$ astfel ca $|x(t; t_0, x_0)| > \eta$ pentru $t > t_0$, $|x_0| \leqslant h_0$. Considerăm funcția $V^*(t) = V(t, x(t; t_0, x_0))$. Această funcție e monoton descrescătoare, deci există $V_0 = \lim\limits_{t\to\infty} V^*(t)$ și $V^*(t) \geqslant V_0$ pentru $t \geqslant t_0$.

Considerăm șirul $x^{(k)} = x(t_0 + k\omega; t_0, x_0)$; din $|x^{(k)}| < h_1$ rezultă că se poate extrage un subșir convergent, fie $x_0^*$ limita lui; atunci $x_0^* \neq 0$.

Avem

$$\lim_{k\to\infty} V^*(t_0 + k\omega) = V_0\,;\ V^*\,(t_0 + k\omega) = V\,(t_0 + k\omega,\ x^{(k)}) = V\,(t_0,\ x^{(k)}),$$

deci

$$\lim_{k\to\infty} V^*\,(t_0 + k\omega) = V\,(t_0,\ x^*).$$

Rezultă

$$V\,(t_0,\ x^*) = V_0.$$

Considerăm semitraiectoria $x(t\,;\ t_0,\ x_0^*)$; deoarece această traiectorie nu se poate afla în întregime în $\mathfrak{M}$, funcţia $V\,(t,\ x\,(t\,;\ t_0,\ x_0))$ nu e constantă deci există $t^* > t_0$ astfel ca

$$V\,(t^*,\ x\,(t^*\,;\ t_0,\ x_0)) < V\,(t_0,\ x_0^*) = V_0.$$

Pentru orice $\gamma > 0$ avem

$$|x\,(t^*\,;\ t_0,\ x_0) - x\,(t^*\,;\ t_0,\ x^{(k)})\,| < \gamma$$

dacă $k > N\,(\gamma)$, deci

$$\lim_{k\to\infty} V\,(t^*,\ x\,(t^*,\ t_0,\ x^{(k)})) = V\,(t^*\,;\ x\,(t^*\,;\ t_0,\ x_0^*)) < V_0.$$

Dar

$$x\,(t^*\,;\ t_0,\ x^{(k)}) = x\,(t^*\,;\ t_0,\ x\,(t_0 + k\omega\,;\ t_0,\ x_0)) =$$
$$= x\,(t^* + k\omega,\ t_0 + k\omega,\ x\,(t_0 + k\omega\,;\ t_0,\ x_0)) = x\,(t^* + k\omega\,;\ t_0,\ x_0)$$

şi

$$V\,(t^*,\ x) = V\,(t^* + k\omega,\ x)$$

deci

$$V\,(t^*,\ x\,(t^*\,;\ t_0,\ x^{(k)})) = V\,(t^* + k\omega,\ x\,(t^* + k\omega\,;\ t_0,\ x_0)) = V^*\,(t^* + k\omega).$$

Rezultă

$$\lim_{k\to\infty} V\,(t^*\,;\ x\,(t^*\,;\ t_0,\ x^{(k)})) = V_0$$

ceea ce este contradictoriu.

Contradicţia obţinută demonstrează că pentru orice traiectorie cu $|\,x_0\,| < h_0$ şi orice $\eta > 0$ există $t_1 > t_0$ astfel ca $|x\,(t_1\,;\ t_0,\ x_0)\,| < \eta$.

Alegem $\eta = \delta\,(\varepsilon)$ şi din $|x\,(t_1\,;\ t_0,\ x_0)\,| < \delta\,(\varepsilon)$ rezultă

$$|\,x\,(t\,;\ t_1,\ x\,(t_1\,;\ t_0,\ x_0))\,| < \varepsilon,$$

deci

$$|\,x\,(t\,;\ t_0,\ x_0)\,| < \varepsilon \text{ pentru } t > t_1\,(\varepsilon)$$

deci

$$\lim_{t\to\infty} x\,(t\,;\ t_0,\ x_0) = 0.$$

În încheierea acestui paragraf vom da criterii de stabilitate în care funcţiilor Liapunov li se cer condiţii mai slabe şi care se bazează toate pe lema asupra inegalităţilor diferenţiale dată în introducere. Aceste criterii au fost stabilite de C. Corduneanu.

TEOREMA 1.5″. *Fie* $\omega(t, y)$ *o funcţie continuă pentru* $t \geqslant 0$, $0 \leqslant y < Y \leqslant +\infty$, $\omega(t, 0) \equiv 0$; *considerăm ecuaţia*

$$\frac{dy}{dt} = \omega(t, y) \tag{1'}$$

*şi presupunem că prin fiecare punct* $(t_0, y_0)$ $t_0 \geqslant 0$, $0 \leqslant y_0 < Y$ *trece o soluţie unică. Fie* $V(t, x)$ *o funcţie diferenţiabilă, pentru* $t \geqslant 0$, $|x| < M$,

$$V'(t, x) = \lim_{h \to 0} \frac{V(t+h, x+hf(t, x))}{h}; \text{ presupunem că}$$

$$V'(t, x) \leqslant \omega(t, V(t, x)).$$

1° *Dacă soluţia* $y = 0$ *a ecuaţiei* (1′) *este stabilă şi* $V(t, x) \geqslant a(|x|)$, *soluţia* $x = 0$ *a sistemului* (1) *este de asemenea stabilă.*

2° *Dacă soluţia* $y = 0$ *a ecuaţiei* (1′) *este uniform stabilă şi* $a(|x|) \leqslant V(t, x) \leqslant b(|x|)$, *soluţia* $x = 0$ *a sistemului* (1) *este de asemenea uniform stabilă.*

3° *Dacă soluţia* $y = 0$ *a ecuaţiei* (1) *este asimptotic stabilă şi* $V(t, x) \geqslant a(|x|)$, *soluţia* $x=0$ *a sistemului* (1) *este de asemenea asimptotic stabilă.*

4° *Dacă soluţia* $y = 0$ *a ecuaţiei* (1′) *este uniform asimptotic stabilă şi* $a(|x|) \leqslant V(t, x) \leqslant b(|x|)$, *soluţia* $x = 0$ *a sistemului* (1) *este de asemenea uniform asimptotic stabilă.*

*Demonstraţie.* 1° Fie $\varepsilon > 0$, $t_0 \geqslant 0$, $\eta(\varepsilon, t_0) > 0$ astfel ca $0 < y_0 < \eta$ să implice $y(t; t_0, y_0) < a(\varepsilon)$ pentru $t \geqslant t_0$. Din continuitatea funcţiei $V$ rezultă că există $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ astfel ca $|x_0| < \delta$ să implice $V(t_0, x_0) < \eta$. Avem

$$\frac{d}{dt} V(t, x(t; t_0, x_0)) = V'(t, x(t; t_0, x_0)) \leqslant \omega(t, V(t, x(t; t_0, x_0))).$$

Din lema 0.3 rezultă
$V(t, x(t; t_0, x_0)) \leqslant y(t; t_0, V(t_0, x_0)) < a(\varepsilon)$. De aici $a(|x(t; t_0, x_0)|) < a(\varepsilon)$, deci $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0$, dacă $|x_0| < \delta(\varepsilon, t_0)$.

2° Din $V(t, x) \leqslant b(|x|)$ rezultă că $\delta$ poate fi ales independent de $t_0$ şi restul demonstraţiei decurge ca mai sus, căci şi $\eta$ poate fi ales independent de $t_0$.

3° Din

$$V(t, x(t; t_0, x_0)) \leqslant y(t; t_0, V(t_0, x_0))$$

şi

$$\lim_{t \to \infty} y(t; t_0, V(t_0, x_0)) = 0,$$

rezultă

$$\lim_{t \to \infty} V(t, x(t; t_0, x_0)) = 0$$

deci

$$\lim_{t\to\infty} a\,(\,|x\,(t\,;\ t_0,\ x_0)\,|\,) = 0,$$

de unde se deduce

$$\lim_{t\to\infty} x\,(t\,;\ t_0,\ x_0) = 0.$$

4° Din ipoteză rezultă că există $\eta_0 > 0$ astfel încît pentru $\varepsilon > 0$ există $T\,(\varepsilon) > 0$ cu proprietatea că din $y_0 < \eta_0$ rezultă $y\,(t\,;\ t_0,\ y_0) < a\,(\varepsilon)$ pentru $t \geqslant t_0 + T\,(\varepsilon)$. Alegem pe $\delta_0$ astfel ca $b\,(\delta_0) < \eta_0$. Dacă $|\,x_0\,| < \delta_0$, rezultă

$$V\,(t_0,\ x_0) < b\,(\,|x\,|\,) < b\,(\delta_0) < \eta_0,$$

deci

$$y\,(t\,;\ t_0,\ V\,(t_0,\ x_0)) < a\,(\varepsilon)\ \text{pentru}\ t \geqslant t_0 + T\,(\varepsilon).$$

Din

$$V\,[t,\ x\,(t\,;\,t_0,\ x_0)] \leqslant y\,(t\,;\,t_0,\ V\,(t_0,\ x_0))$$

rezultă

$$a\,(|\,x\,(t\,;\,t_0,\ x_0)\,|\,) < a\,(\varepsilon)\ \text{pentru}\ t \geqslant t_0 + T\,(\varepsilon),$$

deci

$$|x\,(t\,;\,t_0,\ x_0)\,| < \varepsilon\ \text{pentru}\ t \geqslant t_0 + T\,(\varepsilon),\quad |x_0\,| < \delta_0.$$

Teorema este demonstrată.

## § 3. SISTEME LINIARE

Vom studia acum aspectele specifice ale problemei stabilităţii în cazul sistemelor liniare. În legătură cu aceasta vom pune în evidenţă şi o serie de proprietăţi generale esenţiale ale sistemelor liniare.

Un sistem liniar omogen se scrie sub forma

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A\,(t)\,x, \tag{3}$$

unde vom presupune că $A(t)$ este o matrice pătratică ale cărei elemente sînt funcţii continue de $t$ definite pentru $t \geqslant 0$. În acest caz teorema de existenţă are un caracter global; soluţiile sînt prelungibile pe toată semiaxa $t \geqslant 0$.

Pentru a vedea acest lucru este suficient să arătăm că pe orice interval finit soluţiile rămîn mărginite deci nu părăsesc domeniul în care sînt verificate condiţiile teoremei de existenţă.

Fie $x\,(t\,;\ t_0,\ x_0)$ soluţia sistemului (3) care pentru $t = t_0$ trece prin punctul $x_0$. Avem, pentru valorile $t$ pentru care soluţia este prelungibilă,

$$x\,(t\,;\,t_0\,,\,x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A\,(s)\,x\,(s\,;\,t_0\,,\,x_0)\,\mathrm{d}s.$$

Rezultă

$$|x(t; t_0, x_0)| \leqslant |x_0| + \int_{t_0}^{t} |A(s)|\,|x(s; t_0, x_0)|\,\mathrm{d}s.$$

Aplicînd lema 0.6 (consecinţa 2), rezultă

$$|x(t; t_0, x_0)| \leqslant |x_0|\, \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} |A(s)|\mathrm{d}s},$$

evaluare din care rezultă că soluţia rămîne mărginită pe orice interval finit.

Observăm că am folosit aici evaluarea

$$|A(s)\, x(s; t_0, x_0)| \leqslant |A(s)|\,|x(s; t_0, x_0)|$$

care rezultă direct din definiţia normei matricii; anume $|A| = \sup\limits_{|x| \leqslant 1} |Ax|$.

Să observăm că dacă pentru vectori se foloseşte norma euclidiană, atunci $|A|$ este dată de $\sqrt{\Lambda}$, unde $\Lambda$ este cea mai mare valoare proprie a matricii $A^* A$, ($A^*$ este matricea transpusă a lui $A$, cînd $A$ este reală şi conjugata lui $A$ cînd $A$ e complexă).

Într-adevăr, avem, conform definiţiei normei euclidiene $|Ax|^2 = (Ax, Ax) = (A^* Ax, x) \leqslant \Lambda(x, x)$

deci

$$|Ax| \leqslant \sqrt{\Lambda}\,|x|,$$

deci

$$|A| \leqslant \sqrt{\Lambda}.$$

Pe de altă parte, ţinînd seama de proprietăţile extremale ale valorilor proprii ale matricilor simetrice rezultă că există un vector $x$ cu $|x| = 1$ astfel ca $(A^* Ax, x) = \Lambda$ deci $|A| = \sqrt{\Lambda}$.

Dacă $x_1(t)$ şi $x_2(t)$ sînt două soluţii oarecare ale sistemului se verifică imediat că $\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ este de asemenea soluţie a sistemului ($\alpha_1$ şi $\alpha_2$ vor fi presupuse numere reale; în general în toată teoria vom lucra numai cu funcţii reale, cazurile contrarii fiind subliniate special).

*De aici rezultă că mulţimea soluţiilor sistemului* (3) *formează un spaţiu liniar.*

Fie $x(t; t_0, x_0)$ soluţia sistemului (3) care pentru $t = t_0$ trece prin punctul $x_0$. Această soluţie defineşte pentru $t$ şi $t_0$ fixaţi o transformare a spaţiului $R^n$ în el însuşi care ataşează punctului $x_0$ punctul $x(t; t_0, x_0)$; vom nota această transformare cu $C(t; t_0)$.

PROPOZIŢIE. *Transformarea* $C(t; t_0)$ *este liniară.*

*Demonstraţie.* Avem

$$C(t; t_0)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = x(t; t_0, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2).$$

Pe de altă parte,

$$\alpha_1 C(t;t_0)x_1 + \alpha_2 C(t;t_0)x_2 = \alpha_1 x(t;t_0,x_1) + \alpha_2 x(t;t_0,x_2)$$

deci fiind o combinaţie liniară de soluţii ale sistemului (3) este soluţie a sistemului.

Avem însă

$$x(t;t_0,\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 x(t;t_0,x_1) + \alpha_2 x(t;t_0,x_2)$$

deoarece cele două soluţii coincid pentru $t = t_0$.

Propoziţia este astfel demonstrată.

Vom scrie deci $x(t, t_0, x_0) = C(t;t_0)x_0$. Odată fixată o bază a spaţiului orice transformare liniară este dată printr-o matrice ale cărei coloane sînt imaginile prin transformarea dată ale vectorilor bazei. Vectorii bazei au coordonatele $\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$, deci $C(t;t_0)$ va corespunde unei matrici ale cărei coloane sînt soluţiile sistemului (3) care la momentul $t_0$ coincid cu coloanele matricii unitate. Notînd matricea unitate cu $E$ şi nefăcînd distincţie între transformarea $C(t;t_0)$ şi matricea corespunzătoare, vom scrie $C(t_0;t_0) = E$. Vom spune că $C(t;t_0)$ este o matrice fundamentală de soluţii a sistemului (3); deoarece coloanele matricii $C(t;t_0)$ sînt soluţii ale sistemului (3) putem scrie

$$\frac{\mathrm{d}C(t;t_0)}{\mathrm{d}t} = A(t)\,C(t;t_0).$$

Relaţia $x(t;t_0,x_0) = C(t;t_0)x_0$ arată că orice soluţie a sistemului (3) se exprimă ca o combinaţie liniară a soluţiilor unui sistem fundamental.

Să punem acum în evidenţă cîteva proprietăţi fundamentale ale matricii $C(t;t_0)$.

PROPOZIŢIE. *Are loc relaţia*

$$C(t;s)\,C(s;u) = C(t;u).$$

*Demonstraţie.* Este suficient să arătăm că pentru orice vector $x_0$ are loc egalitatea

$$C(t;s)\,C(s;u)\,x_0 = C(t;u)\,x_0.$$

Avem

$$C(s;u)x_0 = x(s;u,x_0),\quad C(t;s)\,C(s;u)\,x_0 = x(t;s,C(s;u)x_0) =$$
$$= x(t;s,x(s;u,x_0)) = x(t;u,x_0) = C(t;u)\,x_0$$

şi relaţia e dovedită.

Egalitatea

$$x(t;s,x(s;u,x_0)) = x(t;u,x_0)$$

rezultă din faptul că pentru $t = s$ cele două soluţii coincid.

Din această propoziţie rezultă imediat punînd $x = t_0$, $u = t$:

$$C(t; t_0)\, C(t_0; t) = E.$$

Aceasta înseamnă că matricea $C(t;\ t_0)$ este inversabilă şi inversa ei este $C(t_0;\ t)$.

În unele probleme este util să considerăm sistemul adjunct sistemului (3). Anume, vom numi sistem adjunct al sistemului (3) sistemul

$$\frac{dy}{dt} = -\, y\, A(t),$$

unde $y$ este un vector linie.

PROPOZIŢIE. *Dacă $x$ este o soluţie a sistemului dat iar $y$ o soluţie a sistemului adjunct, atunci produsul $yx$ este constant.*

*Demonstraţie.* Avem

$$\frac{d}{dt}\, yx = \frac{dy}{dt}\, x + y\, \frac{dx}{dt} = -\, y\, A(t)\, x + y\, A(t)\, x = 0,$$

deci $yx$ este constant. Propoziţia e demonstrată.

Evident, întreaga teorie dezvoltată pentru sistemul (3) se transpune corespunzător pentru sistemul adjunct (care poate fi scris de altfel şi sub forma $\frac{dy}{dt} = -\, A^*(t)\, y$, $y$ fiind acum tot un vector coloană). Fie $\widetilde{C}(t;\ t_0)$ o matrice fundamentală de soluţii a sistemului adjunct; subliniem că de această dată liniile matricii $\widetilde{C}(t; t_0)$ sînt soluţii ale sistemului adjunct. Ţinînd seama de propoziţia de mai sus rezultă că matricea $\widetilde{C}(t;\ t_0)\, C(t; t_0)$ este constantă, deoarece elementele ei sînt produse ale liniilor matricii $\widetilde{C}(t;\ t_0)$ cu coloanele matricii $C(t;\ t_0)$ deci produse dintre soluţiile sistemului adjunct şi ale sistemului (3).

Dar

$$\widetilde{C}(t_0; t_0)\, C(t_0; t_0) = E\, E = E.$$

Rezultă

$$\widetilde{C}(t; t_0)\, C(t; t_0) = E,$$

deci

$$\widetilde{C}(t; t_0) = [C(t; t_0)]^{-1} = C(t_0; t).$$

Am stabilit astfel următoarea

PROPOZIŢIE. *Avem* $\widetilde{C}(t;\ t_0) = C(t_0;\ t)$ *deci liniile matricii* $C(t_0;\ t)$ *formează un sistem fundamental de soluţii ale sistemului adjunct.*

Vom încheia aceste consideraţii generale asupra sistemelor liniare stabilind aşa numita „formulă a variaţiei constantelor" care se va dovedi utilă în multe împrejurări.

Să considerăm sistemul neomogen

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t).$$

Fie $C(t;\ t_0)$ ca mai sus matricea fundamentală de soluții a sistemului omogen corespunzător. Facem schimbarea de variabile $x(t) = C(t;t_0)y(t)$. Obținem

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dC(t;t_0)}{dt}y(t) + C(t;t_0)\frac{dy}{dt} = A(t)x + f(t) =$$

$$= A(t)C(t;t_0)y(t) + f(t).$$

Dar

$$\frac{dC(t;t_0)}{dt} = A(t)C(t;t_0);$$

rezultă

$$C(t;t_0)\frac{dy}{dt} = f(t)$$

deci

$$\frac{dy}{dt} = [C(t;t_0)]^{-1}f(t) = C(t_0;t)f(t).$$

De aici

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} C(t_0;s)f(s)\,ds.$$

Din relația care leagă pe $x(t)$ de $y(t)$ rezultă $x(t_0) = y(t_0)$ deoarece $C(t_0;t_0) = E$.

În definitiv se capătă

$$x(t;t_0,x_0) = C(t;t_0)x_0 + C(t;t_0)\int_{t_0}^{t} C(t_0;s)f(s)\,ds$$

sau

$$x(t;t_0,x_0) = C(t;t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} C(t;t_0)C(t_0;s)f(s)\,ds$$

ceea ce dă

$$x(t;t_0,x_0) = C(t;t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} C(t;s)f(s)\,ds.$$

## §4. STABILITATEA LA SISTEMELE LINIARE

După această parte introductivă relativă la sistemele liniare putem trece la studiul problemelor de stabilitate pentru asemenea sisteme. Am văzut mai sus, ca o consecință a unei propoziții mai generale, că în cazul

sistemelor liniare pentru care matricea $A(t)$ este mărginită, stabilitatea asimptotică uniformă este întotdeauna exponențială, adică există constantele $B$ și $\alpha$ astfel încît să avem

$$|x(t;t_0,x_0)| \leqslant B e^{-\alpha(t-t_0)} |x_0|.$$

Vom da o nouă demonstrație acestei propoziții.

Conform definiției stabilității asimptotice uniforme, există $\delta_0 > 0$ și $T(\varepsilon)$ astfel încît dacă $|x_0| \leqslant \delta_0$ și $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$ să rezulte

$$|x(t;t_0,x_0)| < \varepsilon.$$

Dar

$$|x(t;t_0,x_0)| = |C(t;t_0)x_0|,$$

deci din $|x_0| < \delta_0$ și $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$ rezultă

$$|C(t;t_0)x_0| < \varepsilon.$$

În cele ce urmează fixăm pe $0 < \varepsilon < 1$.

Fie $u_0$ un vector cu $|u_0| \leqslant 1$, arbitrar. Atunci $|\delta_0 u_0| \leqslant \delta_0$, deci $|C(t;t_0)\delta_0 u_0| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$.

Dar

$$|C(t;t_0)\delta_0 u_0| = \delta_0 |C(t;t_0)u_0|,$$

deci

$$|C(t;t_0)u_0| < \frac{\varepsilon}{\delta_0}.$$

Cum $u_0$ este arbitrar cu $|u_0| \leqslant 1$, rezultă $|C(t;t_0)| < \frac{\varepsilon}{\delta_0}$ pentru $t > t_0 + T(\varepsilon)$, sau $|C(t;t_0)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0 + T_1(\varepsilon)$, unde am notat $T_1(\varepsilon) = T(\delta_0\varepsilon)$.

Din relația

$$C(t;t_0) = C(t;t_0+T_1)\,C(t_0+T_1;t_0)$$

rezultă

$$|C(t;t_0)| \leqslant |C(t;t_0+T_1)|\,|C(t_0+T_1;t_0)| < \varepsilon^2 \text{ pentru } t \geqslant t_0 + 2T_1.$$

Prin inducție se verifică imediat că $|C(t;t_0)| < \varepsilon^m$ pentru $t \geqslant t_0 + mT_1$.

Fie acum $t \geqslant t_0$, arbitrar. Există $m \geqslant 1$ astfel ca

$$t_0 + (m-1)T_1 \leqslant t < t_0 + mT_1.$$

Atunci $mT_1 > t - t_0$; $m > \frac{1}{T_1}(t-t_0)$; $\varepsilon^m < \varepsilon^{\frac{1}{T_1}(t-t_0)}$, căci $\varepsilon < 1$.

Pe de altă parte există $\delta(\varepsilon)$ astfel ca $|x(t;t_0, x_0)| < \varepsilon$ dacă $|x_0| \leqslant \delta(\varepsilon)$ și $t \geqslant t_0$. De aici rezultă ca mai sus

$$|C(t;t_0)\,\delta(\varepsilon)\,u_0| < \varepsilon \text{ pentru } t \geqslant t_0,$$

deci

$$|C(t;t_0)| < \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} \text{ pentru } t \geqslant t_0.$$

Din $t \geqslant t_0 + (m-1)T_1$ rezultă $|C(t;t_0)| < \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}\varepsilon^{m-1}$. Într-adevăr, dacă $m \geqslant 2$, această inegalitate rezultă din faptul că $\delta(\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ iar pentru $m = 1$ din faptul că $|C(t;t_0)| < \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}$ pentru toți $t \geqslant t_0$.

În definitiv, pentru orice $t \geqslant t_0$ am obținut

$$|C(t;t_0)| < \frac{1}{\delta(\varepsilon)}\varepsilon^m$$

deci

$$|C(t;t_0)| < \frac{1}{\delta(\varepsilon)}\varepsilon^{\frac{1}{T_1}(t-t_0)}.$$

Să notăm $\frac{1}{\delta(\varepsilon)} = \beta$, $\alpha = -\frac{1}{T_1}\ln\varepsilon$. Atunci $\beta > 0$, $\alpha > 0$, $\varepsilon = e^{-\alpha T_1}$, și evaluarea obținută devine

$$|C(t;t_0)| < \beta e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

Am demonstrat astfel din nou că stabilitatea asimptotică uniformă la sistemele liniare este întotdeauna exponențială. Observăm că în această demonstrație *nu am mai folosit ipoteza că matricea $A(t)$ este mărginită.*

Cu ajutorul acestei proprietăți fundamentale a sistemelor liniare se demonstrează că dacă soluția banală a unui sistem liniar este uniform asimptotic stabilă, atunci există o funcție Liapunov formă pătratică.

TEOREMA 1.6″. *Dacă soluția banală a sistemului (3) este uniform asimptotic stabilă, atunci oricare ar fi forma pătratică $(W(t)x, x)$, cu*

$$\lambda_m(x,x) \leqslant \lambda(t)(x,x) \leqslant (W(t)x,x) \leqslant \Lambda(t)(x,x) \leqslant \Lambda_M(x,x)$$

*unde $\lambda_m > 0$, există o formă pătratică $(V(t)x, x)$ cu*

$$\mu(x,x) \leqslant (V(t)x,x) \leqslant M(x,x), \quad \mu > 0$$

*și*

$$\frac{d}{dt}(V(t)x(t), x(t)) = -(W(t)x(t), x(t))$$

*oricare ar fi soluția $x(t)$ a sistemului* (3).

*Demonstraţie.* Definim

$$(V(t)x, x) = \int_t^{\infty} (W(s)C(s;t)x, C(s;t)x)\mathrm{d}s,$$

adică matricea $V(t)$ este dată de relaţia

$$V(t) = \int_t^{\infty} C^*(s;t)\,W(s)\,C(s;t)\,\mathrm{d}s.$$

Convergenţa integralei este asigurată de faptul că

$|C(t;t_0)| < B\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}$ şi că $|W| < \Lambda$. Tot de aici rezultă

$$|V(t)| \leqslant \int_t^{\infty} B\mathrm{e}^{-\alpha(s-t)}\Lambda B\mathrm{e}^{-\alpha(s-t)}\mathrm{d}s = \Lambda B^2 \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2\alpha s}\mathrm{d}s = \frac{\Lambda B^2}{2\alpha}.$$

Pentru orice soluţie $x(t;\ t_0,\ x_0)$ a sistemului (3) avem

$$(V(t)x(t;t_0,x_0), x(t;t_0,x_0)) = \int_t^{\infty} (W(s)C(s,t)x(t;t_0,x_0), C(s,t)x(t;t_0,x_0))\mathrm{d}s =$$

$$= \int_t^{\infty} (W(s)x(s;t_0,x_0), x(s,t_0,x_0))\,\mathrm{d}s$$

deci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V(t)x(t;t_0,x_0), x(t;t_0,x_0)) = -(W(t)x(t;t_0,x_0), x(t;t_0,x_0)).$$

În felul acesta rămîne să demonstrăm numai faptul că

$$(V(t)x, x) \geqslant \mu(x, x) \text{ cu } \mu > 0.$$

Avem

$$(V(t)x, x) \geqslant \int_t^{\infty} \lambda_m (C(s;t)x, C(s;t)x)\,\mathrm{d}s = \lambda_m \int_t^{\infty} |x(s;t,x)|^2\,\mathrm{d}s.$$

Dar

$$x(s;t,x) = x + \int_t^s A(u)\,x(u;t,x)\,\mathrm{d}u.$$

De aici, ţinînd seama de faptul că $|x(u;\ t,\ x)| \leqslant B|x|$ pentru $u \geqslant t$, rezultă

$$|x(s;t,x) - x| \leqslant B|x| \int_t^s |A(u)|\,\mathrm{d}u$$

*Presupunînd că matricea $A$ are proprietatea că*

$$\int_t^s |A(u)|\,\mathrm{d}u < \omega(s-t), \quad \textit{unde } \omega(r) \to 0 \textit{ cînd } r \to 0,$$

rezultă că pentru $t \leqslant s \leqslant t + \alpha$ vom avea

$$|x(s; t, x) - x| \leqslant \frac{1}{2} |x|$$

deci

$$|x(s; t, x)| \geqslant |x| - |x(s; t, x) - x| \geqslant \frac{1}{2} |x|.$$

Dar

$$(V(t)x, x) \geqslant \lambda_m \int_t^{\infty} |x(s; t, x)|^2 ds > \lambda_m \int_t^{t+\alpha} |x(s; t, x)|^2 ds \geqslant \frac{\lambda_m}{4} \alpha |x|^2,$$

deci putem lua

$$\mu = \frac{\lambda_m \alpha}{4}.$$

Teorema este complet demonstrată.

*Observaţie.* Dacă matricea $A$ este constantă şi matricea $W$ este aleasă independentă de $t$, atunci matricea $V$ nu depinde de $t$.

Pentru a demonstra acest lucru observăm că pentru sistemele care nu depind explicit de $t$ are loc relaţia

$$x(t + t_0; t_0, x_0) = x(t; 0, x_0)$$

(am stabilit proprietatea corespunzătoare pentru sistemele periodice; dacă sistemul nu depinde de $t$, atunci orice $t_0$ real poate fi considerat perioadă). Această relaţie se scrie în cazul sistemelor liniare sub forma

$$C(t + t_0; t_0) x_0 = C(t; 0) x_0, \text{ deci } C(t + t_0; t_0) = C(t; 0).$$

Rezultă

$$V(t) = \int_t^{\infty} C^*(s; t) W C(s; t) ds = \int_0^{\infty} C^*(s + t; t) W C(s + t; t) ds =$$

$$= \int_0^{\infty} C^*(s; 0) W C(s; 0) ds,$$

deci $V$ nu depinde de $t$.

## § 5. SISTEME LINIARE CU COEFICIENŢI CONSTANŢI

Propoziţia demonstrată în cadrul observaţiei de mai sus are în realitate un caracter pur algebric pus în evidenţă încă de Liapunov. Pentru a putea reproduce raţionamentele lui Liapunov vom reaminti unele propoziţii fundamentale relative la sistemele liniare cu coeficienţi constanţi şi legat de aceasta, reducerea matricilor la forma normală Jordan de care vom avea nevoie şi mai tîrziu.

Fiind dată o transformare liniară $T$ într-un spaţiu liniar $n$-dimensional complex şi o bază $e_1, e_2, \ldots, e_n$ a spaţiului, transformării i se ataşează

o matrice $A$ care are drept coloane vectorii $Te_k$ scrişi în baza $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Dacă $y = Tx$, atunci $y = Ax$, $x$ şi $y$ fiind scrierea vectorilor în baza $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Într-adevăr, fie

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i.$$

Avem

$$\sum_{i=1}^{n} y_i e_i = \sum_{k=1}^{n} x_k Te_k;$$

scriind

$$Te_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i$$

rezultă

$$\sum_{i=1}^{n} y_i e_i = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right) e_i,$$

deci

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k.$$

PROPOZIŢIE. *Dacă în baza $e_1, e_2, \ldots, e_n$ transformării $T$ îi corespunde matricea $A$ iar în baza $f_1, f_2, \ldots, f_n$ îi corespunde matricea $B$, atunci $B = C^{-1} AC$, unde $C$ este matricea corespunzătoare trecerii de la o bază la cealaltă.*

*Demonstraţie.* Elementele $b_{ij}$ se capătă scriind imaginile vectorilor $f_j$ în baza $f_1, \ldots f_n$. Avem

$$Tf_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} f_i.$$

Fie

$$f_j = \sum_{k=1}^{n} c_{kj} e_k;$$

rezultă

$$Tf_j = \sum_{k=1}^{n} c_{kj} Te_k.$$

Dar

$$Te_k = \sum_{l=1}^{n} a_{lk} e_l,$$

deci

$$Tf = \sum_{k=1}^{n} c_{kj} \sum_{l=1}^{n} a_{lk} e_l.$$

Pe de altă parte,

$$e_l = \sum_{i=1}^{n} d_{il} f_i,$$

unde $D$ este inversa matricii $C$.

Rezultă

$$Tf_j = \sum_{k=1}^{n} c_{kj} \sum_{l=1}^{n} a_{lk} \sum_{i=1}^{n} d_{il} f_i = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{l,k} d_{il} \; a_{lk} \; c_{kj}) f_i .$$

În definitiv

$$b_{ij} = \sum_{l,k} d_{il} \; a_{lk} \; c_{kj},$$

deci

$$B = DAC = C^{-1} AC.$$

Un vector $u$ este vector propriu al transformării $T$ dacă $u$ nu este nul, și există un număr complex $\lambda$ astfel ca $Tu = \lambda u$. Dacă $e_1, e_2, \ldots, e_n$ este o bază a spațiului și $A$ matricea corespunzătoare transformării, condiția ca $u$ să fie vector propriu se scrie $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_k = \lambda u_i$ și se vede că pentru ca să existe un vector $u$ nenul care să verifice această condiție este necesar și suficient ca det $(A - \lambda E) = 0$. Valorile $\lambda$ care verifică această ecuație se numesc valorile proprii ale transformării (sau ale matricii). O consecință a propoziției precedente este următoarea : matricile $A$ și $C^{-1} AC$ au aceleași valori proprii.

Fie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ valori proprii distincte ale transformării $T$, $u_1, u_2, \ldots, u_s$ vectori proprii corespunzători. Vectorii $u_1, u_2, \ldots, u_s$ sînt liniar independenți. Într-adevăr, să presupunem că

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_s u_s = 0.$$

Aplicăm transformarea $T$ și obținem

$$c_1 \, Tu_1 + c_2 \, Tu_2 + \cdots + c_s \, Tu_s = 0.$$

Dar

$$Tu_k = \lambda_k u_k$$

deci

$$c_1 \lambda_1 u_1 + c_2 \lambda_2 u_2 + \cdots + c_s \lambda_s u_s = 0.$$

Din

$$\sum c_k u_k = 0$$

se capătă

$$c_s u_s = - c_1 u_1 - c_2 u_2 - \ldots - c_{s-1} \; u_{s-1}.$$

Rezultă

$$\lambda_1 c_1 u_1 + \lambda_2 c_2 u_2 + \ldots + \lambda_{s-1} c_{s-1} u_{s-1} - \lambda_s c_1 u_1 - \lambda_s c_2 u_2 - \ldots - \lambda_s c_{s-1} u_{s-1} = 0$$

sau

$$(\lambda_1 - \lambda_2) c_1 u_1 + (\lambda_2 - \lambda_s) c_2 u_2 + \ldots + (\lambda_{s-1} - \lambda_s) c_{s-1} u_{s-1} = 0.$$

Dacă $u_1, u_2, \ldots, u_{s-1}$ sînt liniar independenţi, rezultă

$$(\lambda_k - \lambda_s)c_k = 0, \ (k = 1, \ldots, s-1).$$

Dar prin ipoteză $\lambda_k - \lambda_s \neq 0$, deci $c_k = 0$ pentru $k = 1, \ldots, s-1$. Dar atunci $c_s u_s = 0$, deci $c_s = 0$.

Prin urmare independenţa liniară a sistemului de $s$ vectori va rezulta prin inducţie (pentru $s = 1$ rezultă din faptul că $u_1 \neq 0$).

Rezultă de aici că dacă transformarea $T$ admite $n$ valori proprii distincte, atunci ea admite $n$ vectori proprii liniar independenţi.

Luînd aceşti vectori $u_1, u_2, \ldots, u_n$ drept bază a spaţiului, relaţiile $Tu_k = \lambda_k u_k$ arată că în această bază matricea transformării este diagonală şi are pe diagonală elementele $\lambda_k$.

Ţinînd seama de cele stabilite mai sus rezultă : dacă rădăcinile ecuaţiei $\det(A - \lambda E) = 0$ sînt distincte, există o matrice $C$ astfel încît matricea $C^{-1}AC$ să aibă forma diagonală, elementele diagonale fiind rădăcinile ecuaţiei.

*Aplicaţie.* Considerăm sistemul $\dfrac{dx}{dt} = Ax$. Presupunem că ecuaţia $\det(A - \lambda E) = 0$ pe care o numim ecuaţia caracteristică a sistemului are rădăcinile distincte.

Conform celor de mai sus există o matrice $C$ astfel încît $C^{-1}AC$ să fie diagonală şi să aibă pe diagonală elementele $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Facem în sistem schimbarea de variabile $x = Cy$, $y = C^{-1}x$. Căpătăm

$$\frac{dy}{dt} = C^{-1}\frac{dx}{dt} = C^{-1}Ax = C^{-1}ACy.$$

Rezultă că sistemul în $y$ se scrie

$$\frac{dy_k}{dt} = \lambda_k y_k.$$

O matrice fundamentală de soluţii a sistemului are forma

$$Y = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Rezultă că matricea fundamentală de soluţii a sistemului dat se scrie $X = CY$.

Matricea $C$ are drept coloane vectori proprii ai matricii $A$.

Rămîne deci de cercetat cazul cînd transformarea $T$ nu admite $n$ vectori proprii liniar independenţi. Să presupunem că $e_1, f_1, \ldots h_1$ sînt vectorii proprii liniar independenţi.

Vom arăta că se poate alege o bază a spaţiului formată din $k$ grupuri de vectori

$$e_1, \ldots, e_p; \ f_1, \ \ldots, f_q; \ \ldots; \ h_1, \ldots, h_s$$

în care transformarea $T$ să aibă forma

$$Te_1 = \lambda_1 e_1,\ Te_2 = e_1 + \lambda_1 e_2, \ldots,\ Te_p = e_{p-1} + \lambda_1 e_p,$$

$$Tf_1 = \lambda_2 f_1,\ Tf_2 = f_1 + \lambda_2 f_2, \ldots,\ Tf_q = f_{q-1} + \lambda_2 f_q,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Th_1 = \lambda_k h_1,\ Th_2 = h_1 + \lambda_k h_2, \ldots,\ Th_s = h_{s-1} + \lambda_k h_s.$$

În această bază matricea corespunzătoare transformării va avea forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & & & & & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \ldots & 0 & & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \\ & & & & & 0 & \lambda_2 & 1 & \ldots & 0 & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_2 & \\ & & & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Această formă se numește forma normală Jordan a matricii.

Teorema corespunzătoare se formulează astfel:

*Pentru orice matrice $A$ există o matrice $C$ astfel încît matricea $C^{-1}AC$ să aibă forma normală Jordan.*

În cazul particular cînd există $n$ vectori proprii liniar indepedenți, forma normală Jordan se reduce la forma diagonală. Fără ca forma normală să fie diagonală se poate întîmpla ca unele celule jordaniene să fie de ordinul întîi. Forma diagonală corespunde cazului cînd toate celulele sînt de ordinul întîi.

O celulă jordaniană se scrie $A_1 = \lambda_1 E + I$. Dacă celula e de ordinul $p$ avem:

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix},\ I^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots$$

$$\ldots\ I^{p-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad I^p = I^{p+1} = \ldots = 0.$$

Un polinom $P(t)$ se scrie cu ajutorul formulei lui Taylor sub forma:

$$P(t) = P(\lambda_1) + (t - \lambda_1)P'(\lambda_1) + \frac{(t-\lambda_1)^2}{2}P''(\lambda_1) + \ldots + \frac{(t-\lambda_1)^n}{n!}P^{(n)}(\lambda_1).$$

Rezultă

$$P(A_1) = P(\lambda_1)E + (A_1 - \lambda_1 E)P'(\lambda_1) + \frac{(A_1-\lambda_1 E)^2}{2!}P''(\lambda_1) + \ldots + \frac{(A_1-\lambda_1 E)^n}{n!}P^{(n)}(\lambda_1)$$

deci

$$P(A_1) = P(\lambda_1)E + I\ P'(\lambda_1) + \frac{P''(\lambda_1)}{2!}I^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(\lambda_1)}{n!}I^n$$

sau

$$P(A_1) = P(\lambda_1)E + \frac{P'(\lambda_1)}{1!}I + \frac{P''(\lambda_1)}{2!}I^2 + \ldots + \frac{P^{(p-1)}(\lambda_1)}{(p-1)!}I^{p-1}.$$

În definitiv

$$P(A_1) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & \frac{P'(\lambda_1)}{1!} & \frac{P''(\lambda_1)}{2!} & \ldots & \frac{P^{(p-1)}(\lambda_1)}{(p-1)!} \\ 0 & P(\lambda_1) & \frac{P'(\lambda_1)}{1!} & \ldots & \frac{P^{(p-2)}(\lambda_1)}{(p-1)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & P(\lambda_1) \end{pmatrix}$$

Demonstrația existenței bazei de forma dorită o vom face prin inducție în raport cu $n$. Dacă $T$ acționează într-un spațiu unidimensional, matricea corespunzătoare are un singur element și corespunde deci formei normale. Vom presupune teorema adevărată în spații $n$-dimensionale și vom demonstra că e adevărată și pentru spații cu $n + 1$ dimensiuni. Un rol fundamental îl va juca în această demonstrație prin inducție următoarea:

LEMĂ. *Orice transformare liniară $T$ într-un spațiu complex $n$-dimensional admite cel puțin un subspațiu $(n - 1)$-dimensional invariant.*

*Demonstrație.* Reamintim că un subspațiu $R'$ al spațiului liniar $R$ se numește invariant în raport cu transformarea liniară $T$ dacă pentru orice $x \in R'$ avem $Tx \in R'$.

Considerăm o bază $e_1, \ldots, e_n$ oarecare; fie $A = (a_{ij})$ matricea atașată transformării în această bază. Considerăm matricea $A'$ obținută din $A$ prin transpunere; fie $u$ un vector propriu al acestei matrici. Avem deci relația $\sum a_{ji}u_j = \lambda u_i$. Considerăm relația $\sum_{i=1}^{n} x_i u_i = 0$. Deoarece $u \neq 0$, mulțimea soluțiilor acestei ecuații formează un subspațiu liniar

$(n-1)$-dimensional (spaţiul generat de $n-1$ soluţii liniar independente). Acesta este spaţiul $R'$ invariant în raport cu transformarea $T$.

Fie, într-adevăr, $x \in R'$ deci $\sum_{i=1}^{n} x_i u_i = 0$ şi $y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i$;

avem

$$\sum_{j=1}^{n} y_j u_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i u_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ji} u_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda u_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i u_i = 0$$

deci $y \in R'$.

Demonstraţia prin inducţie decurge în modul următor. Fie $T$ o transformare în spaţiul $R$ cu $n+1$-dimensiuni. Conform lemei există un subspaţiu $R'$ cu $n$ dimensiuni, invariant în raport cu $T$. Putem deci considera transformarea $T$ ca lucrînd în subspaţiul $R'$; pe baza ipotezei de inducţie în $R'$ există o bază $e_1, e_2, \ldots, e_p, f_1, f_2, \ldots, f_q, \ldots, h_1, h_2, \ldots, h_s$ astfel ca

$$Te_1 = \lambda_1 e_1,\ Te_2 = e_1 + \lambda_1 e_2,\ \ldots,\ Te_p = e_{p-1} + \lambda_1 e_p,$$
$$Tf_1 = \lambda_2 f_1,\ Tf_2 = f_1 + \lambda_2 f_2,\ \ldots,\ Tf_q = f_{q-1} + \lambda_2 f_q,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Th_1 = \lambda_k h_1,\ Th_2 = h_1 + \lambda_k h_2,\ \ldots,\ Th_s = h_{s-1} + \lambda_k h_s.$$

Avem de arătat că putem găsi o bază în $R$ în care transformarea $T$ să acţioneze în modul dorit.

Pentru aceasta, începem prin a completa baza din $R'$ cu un vector $e$, liniar independent de ceilalţi, astfel încît să obţinem o bază în $R$.

Avem

$$Te = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_p e_p + \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \ldots + \beta_q f_q + \ldots + \delta_1 h_1 + \ldots + \\ + \delta_s h_s + \tau e.$$

Căutăm acum să înlocuim pe $e$ cu un alt vector $e'$ astfel ca $Te'$ să aibă forma cea mai simplă posibilă. Căutăm pe $e'$ de forma:

$$e' = e - \chi_1 e_1 - \ldots - \chi_p e_p - \mu_1 f_1 - \ldots - \mu_q f_q - \ldots - \omega_1 h_1 - \ldots - \omega_s h_s$$

$$Te' = Te - \chi_1 Te_1 - \ldots - \chi_p Te_p - \mu_1 Tf_1 - \ldots - \mu_q Tf_q - \ldots - \\ - \omega_1 Th_1 - \ldots - \omega_s Th_s = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_p e_p + \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_q f_q + \ldots + \\ + \delta_1 h_1 + \ldots + \delta_s h_s + \tau e - \chi_1 \lambda_1 e_1 - \ldots - \chi_p e_{p-1} - \chi_p \lambda_1 e_p - \mu_1 \lambda_2 f_1 - \\ - \ldots - \mu_q f_{q-1} - \mu_q \lambda_2 f_q - \ldots - \omega_1 \lambda_k h_1 - \ldots - \omega_s h_{s-1} - \omega_s \lambda_k h_s.$$

Dar

$$e = e' + \chi_1 e_1 + \ldots + \chi_p e_p + \mu_1 f_1 + \ldots + \mu_q f_q + \ldots + \omega_1 h_1 + \ldots + \\ + \omega_s h_s,$$

deci

$$Te' = \tau e' + \tau\chi_1 e_1 + \ldots + \tau\chi_p e_p + \tau\mu_1 f_1 + \ldots + \tau\mu_q f_q + \ldots + \tau\omega_1 h_1 +$$
$$+ \ldots + \tau\omega_s h_s + \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_p e_p + \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_q f_q + \ldots + \delta_1 h_1 +$$
$$+ \ldots + \delta_s h_s - (\lambda_1 \chi_1 + \chi_2) e_1 - \ldots - \chi_p \lambda_1 e_p - (\lambda_2 \mu_1 + \mu_2) f_1 - \ldots -$$
$$- \lambda_2 \mu_q f_q - \ldots - (\lambda_k \omega_1 + \omega_2) h_1 - \ldots - \lambda_k \omega_s h_s = \tau e' + [\alpha_1 + \chi_1(\tau -$$
$$- \lambda_1) - \chi_2] e_1 + \ldots + [\alpha_p + \chi_p(\tau - \lambda_1)] e_p + [\beta_1 + \mu_1(\tau - \lambda_2) - \mu_2] f_1 +$$
$$+ \ldots + [\beta_q + \mu_q(\tau - \lambda_2)] f_q + \ldots$$
$$+ [\delta_1 + \omega_1(\tau - \lambda_k) - \omega_2] h_1 + \ldots + [\delta_s + \omega_s(\tau - \lambda_k)] h_s .$$

Dacă $\tau$ e diferit de $\lambda_j$ se pot determina pe rînd coeficienţii $\chi, \mu, \ldots, \omega$ astfel încît să rămînă $Te' = \tau e'$ şi se vede că adăugînd pe $e'$ la baza din $R'$ obţinem o bază normală în $R$. Dacă $\tau$ e diferit de unele din valorile $\lambda_j$ putem alege coeficienţii corespunzători acestor valori.

Pentru simplificare să presupunem că $\tau = \lambda_1$, $\tau = \lambda_2$, $\tau \neq \lambda_j$, $j > 2$.

Rămîne

$$Te' = \tau e' + (\alpha_1 - \chi_2) e_1 + \ldots + \alpha_p e_p + (\beta_1 - \mu_2) f_1 + \ldots + \beta_q f_q .$$

Alegem $\chi_2 = \alpha_1, \ldots, \mu_2 = \beta_1, \ldots$ şi rămîne

$$Te' = \tau e' + \alpha_p e_p + \beta_q f_q .$$

Presupunem $p > q$.

Alegem acum baza canonică în $R$ în modul următor : punem

$$e'_{p+1} = e',\ e'_p = Te'_{p+1} - \tau e'_{p+1},\ e'_{p-1} = Te'_p - \tau e'_p,\ \ldots,\ e'_1 = Te'_2 - \tau e'_2 .$$

Luăm prima grupă formată din vectorii $e'_1, \ldots, e'_{p+1}$ iar celelalte grupe rămîn $f_1 \ldots f_q, \ldots, h_1 \ldots h_s$. Pentru a arăta că avem de-a face cu o bază canonică rămîne de verificat că $e'_1 \ldots e'_{p+1}$ se comportă ca o parte a unei baze canonice.

Avem

$$Te'_2 = e'_1 + \tau e'_2, \ldots, Te'_p = e'_{p-1} + \tau e'_p,\ Te'_{p+1} = e'_p + \tau e'_{p+1}$$

deci ne mai rămîne de verificat numai faptul că $Te'_1 = \tau e'_s$.

$$e'_p = Te' - \tau e' = \alpha_p e_p + \beta_q f_q,\ e'_{p-1} = \alpha_p Te_p + \beta_q Tf_q - \tau\alpha_p e_p - \tau\beta_q f_q =$$
$$= \alpha_p(e_{p-1} + \tau e_p) + \beta_q(f_{q-1} + \tau f_q) - \tau\alpha_p e_p - \tau\beta_q f_q = \alpha_p e_{p-1} + \beta_q f_{q-1} .$$

Continuînd, $e'_{p-q} = \alpha_p e_{p-q}, \ldots, e'_1 = \alpha_p e_1$, deci $Te'_1 = \alpha_p Te_1 = \tau\alpha_p e_1 = \tau e'_1$.

Teorema este astfel demonstrată.

*Aplicaţie.* Considerăm din nou sistemul $\frac{dx}{dt} = Ax$, presupunînd de data aceasta matricea $A$ oarecare. Dacă $C$ este matricea care aduce pe $A$ la forma normală Jordan, transformarea de variabile $x = Cy$ aduce sistemul la forma $\frac{dy}{dt} = By$, unde $B$ are forma normală Jordan. Rezultă

$$\frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1 + y_2, \frac{dy_2}{dt} = \lambda_1 y_2 + y_3, \ldots, \frac{dy_p}{dt} = \lambda_1 y_p$$

$$\frac{dy_{p+1}}{dt} = \lambda_2 y_{p+1} + y_{p+2}, \frac{dy_{p+2}}{dt} = \lambda_2 y_{p+2} + y_{p+3}, \ldots, \frac{dy_{p+q}}{dt} = \lambda_2 y_{p+q}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{dy_{p+q+\ldots+1}}{dt} = \lambda_k y_{p+q+\ldots+1} + y_{p+q+\ldots+2}, \ldots, \frac{dy_{p+q+\ldots+s}}{dt} = $$
$$= \lambda_k y_{p+q+\ldots+s}.$$

Sub această formă sistemul se rezolvă imediat şi se capătă structura soluţiilor.

Este însă mai simplu să folosim alt procedeu.

Din teorema generală de existenţă a lui Cauchy rezultă că soluţia $x(t; t_0, x_0)$ va fi o funcţie analitică de $t$, deci putem scrie

$$x(t; t_0, x_0) = x_0 + \dot{x}(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}\ddot{x}(t_0)(t-t_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!}x^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n + \ldots$$

Din sistem rezultă imediat

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \frac{d^2x}{dt^2} = A\frac{dx}{dt}, \frac{d^3x}{dt^3} = A\frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^n x}{dt^n} = A\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}},$$

deci

$$\dot{x}(t_0) = Ax_0, \ddot{x}(t_0) = A\dot{x}(t_0) = A^2x_0, \dddot{x}(t_0) = A\ddot{x}(t_0) = A^3x_0, \ldots,$$
$$x^{(n)}(t_0) = A^n x_0.$$

Rezultă

$$x(t; t_0, x_0) = x_0 + \frac{1}{1!}Ax_0(t-t_0) + \frac{1}{2!}A^2x_0(t-t_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!}A^n x_0 (t-t_0)^n + \ldots$$

$$= \left[E + \frac{1}{1!}A(t-t_0) + \frac{1}{2!}A^2(t-t_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}A^n(t-t_0)^n + \ldots\right]x_0.$$

Aici convergenţa seriei trebuie înţeleasă ca fiind convergenţa celor $n^2$ serii formate cu elementele matricilor.

Notăm, prin analogie,

$$E + \frac{1}{1!}A(t-t_0) + \frac{1}{2!}A^2(t-t_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}A^n(t-t_0)^n + \ldots = e^{A(t-t_0)}.$$

Cu această notaţie soluţia sistemului se scrie

$$x(t; t_0, x_0) = e^{A(t-t_0)}x_0.$$

Să observăm că seriile de puteri corespunzătoare seriei matriciale pot fi derivate termen cu termen şi avem

$$\frac{d}{dt}e^{A(t-t_0)} = Ae^{A(t-t_0)};$$

cum $e^{A(t_0-t_0)} = E$, rezultă că $e^{A(t-t_0)}$ reprezintă un sistem fundamental de soluţii.

Dacă $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, atunci $A^n = \begin{pmatrix} A_1^n & 0 \\ 0 & A_2^n \end{pmatrix}$, deci

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{A_1 t} & 0 \\ 0 & e^{A_2 t} \end{pmatrix}.$$

Rezultă că

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_k t} \end{pmatrix},$$

$J_1, \ldots, J_k$ fiind celulele jordaniene din care e formată matricea $B$.

Rămîne deci de precizat structura unei matrici $e^{Jt}$, unde $J$ e o celulă jordaniană.

Avem

$$e^{Jt} = E + \frac{t}{1!}J + \frac{t^2}{2!}J^2 + \ldots + \frac{t^n}{n!}J^n + \ldots$$

Dar

$$J = \lambda E + I,$$

$$J^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & \frac{k\lambda^{k-1}}{1!} & \frac{k(k-1)\lambda^{k-2}}{2!} & \ldots & \frac{k(k-1)\ldots(k-p+2)}{(p-1)!}\lambda^{k-p+1} \\ 0 & \lambda^k & \frac{k\lambda^{k-1}}{1!} & \ldots & \frac{k(k-1)\ldots(k-p+3)}{(p-2)!}\lambda^{k-p+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda^k \ldots \end{pmatrix}$$

$$e^{Jt} = E + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{\lambda^k t^k}{k!} & \frac{\lambda^{k-1} t^k}{(k-1)!} & \frac{\lambda^{k-2} t^k}{2!(k-2)!} & \ldots & \frac{\lambda^{k-p+1} t^k}{(p-1)!(k-p+1)!} \\ 0 & \frac{\lambda^k t^k}{k!} & \frac{\lambda^{k-1} t^k}{(k-1)!} & \ldots & \frac{\lambda^{k-p+2} t^k}{(p-2)!(k-p+2)!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{\lambda^k t^k}{k!} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} & t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{t^2}{2!} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2} t^{k-2}}{(k-2)!} & \ldots \\ 0 & 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & \frac{t}{1!} e^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!} e^{\lambda t} & \ldots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & \frac{t}{1!} e^{\lambda t} & \ldots & \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} e^{\lambda t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \ldots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \ldots & \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

În acest fel structura soluţiilor sistemelor liniare cu coeficienţi constanţi este complet determinată. Comportarea soluţiilor depinde de structura formei normale a matricii $A$. Numerele $\lambda_k$, valorile proprii ale matricii $A$, joacă rolul esenţial. Anume, dacă $\mathcal{R}e\, \lambda_k < 0$, atunci toate soluţiile tind către zero cînd $t \to \infty$; acesta este cazul oscilaţiilor amortizate. Dacă $\lambda_k$ sînt reale avem aşa-numitul caz de comportare aperiodică; dacă $\lambda_k$ au părţi imaginare nenule apar termeni oscilatori. Dacă cel puţin pentru

un $k$ avem $\mathcal{Re}\ \lambda_k > 0$, apar oscilaţii a căror amplitudine creşte cînd $t \to \infty$. Dacă toţi $\lambda_k$ au părţi reale nule sau negative avem oscilaţii stabile (mărginite) cu condiţia că dacă $\mathcal{Re}\ \lambda_k = 0$ celula jordaniană respectivă să fie de dimensiune 1; dacă există o rădăcină cu parte reală nulă pentru care celula jordaniană are dimensiune mai mare decît 1 apar termeni în $t$ care fac ca soluţia să fie nemărginită; aceşti termeni sînt numiţi uneori termeni seculari. Dacă toate rădăcinile au părţi reale nule şi forma normală e diagonală soluţiile sînt mărginite pe toată axa. În acest caz soluţiile sînt în general funcţii aproape-periodice.

## § 6. FUNCŢIA LIAPUNOV LA SISTEME LINIARE CU COEFICIENŢI CONSTANŢI

Să considerăm o formă liniară $(\alpha, x)$ şi să vedem ce condiţii trebuie să verifice vectorul $\alpha$ pentru ca $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha, x) = \lambda (\alpha, x)$, $x$ fiind soluţie a sistemului (3) cu matrice $A$ constantă.

Avem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha, x) = \left(\alpha, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = (\alpha, Ax) = (A^* \alpha, x) = (\lambda\ \alpha, x).$$

Dacă $A^*\alpha = \lambda\alpha$ deci dacă $\alpha$ este vector propriu al matricii conjugate a matricii $A$ şi $\lambda$ este valoare proprie a matricii $A$, atunci relaţia este sigur verificată.

Să vedem acum în ce condiţie există o formă pătratică $V$ de forma $V = (\alpha, x)(\beta, x)$ cu $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \lambda V$. Avem, $x$ fiind soluţie a sistemului,

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \left(\alpha, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)(\beta, x) + (\alpha, x)\left(\beta, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = (\alpha, Ax)(\beta, x) + (\alpha, x)(\beta, Ax) =$$

$$= \lambda(\alpha, x)(\beta, x).$$

Această egalitate este verificată dacă $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, unde $\lambda_1$ şi $\lambda_2$ sînt valori proprii ale lui $A$ iar $\alpha$ şi $\beta$ sînt vectori proprii pentru $A^*$. Să vedem acum cum se exprimă condiţia generală ca să existe o formă pătratică $V = (Bx, x)$ astfel ca $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \lambda V$.

Avem

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \left(B\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, x\right) + \left(Bx, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = (BAx, x) + (Bx, Ax) = (BAx, x) +$$

$$+ (A^*Bx, x) = ((BA + A^*B)x, x).$$

Condiţia

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V$$

devine

$$((BA + A^*B)x,\ x) = (\lambda Bx,\ x)$$

şi deci

$$BA + A^*B = \lambda B,$$

sau

$$BA + A^*B - \lambda B = 0.$$

Această ecuaţie poate fi considerată ca un sistem liniar în elementele matricii $B$; sistemul admite soluţie nebanală dacă şi numai dacă determinantul $D(\lambda)$ este egal cu zero.

Am văzut însă că dacă $\lambda$ e de forma $\lambda_1 + \lambda_2$, unde $\lambda_1$ şi $\lambda_2$ sînt valori proprii ale matricii $A$ există forme $V$ cu proprietatea dorită. Dar gradul ecuaţiei $D(\lambda) = 0$ este egal cu numărul valorilor de forma $\lambda_1 + \lambda_2$ şi este egal cu $\frac{n(n+1)}{2}$. Rezultă de aici că valorile de forma $\lambda_1 + \lambda_2$ reprezintă toate rădăcinile ecuaţiei $D(\lambda) = 0$, dacă sînt distincte. Dacă aceste numere nu sînt distincte raţionăm în felul următor. Fie $\lambda^*$ o rădăcină a ecuaţiei $D(\lambda) = 0$ care nu este de forma $\lambda_1 + \lambda_2$, $\alpha$ cea mai mică distanţă de la $\lambda^*$ la numerele de forma $\lambda_1 + \lambda_2$; printr-o modificare suficient de mică a matricii $A$ putem face ca numerele $\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2$ să fie distincte şi să difere de numerele $\lambda_1 + \lambda_2$ cu mai puţin decît $\frac{\alpha}{4}$ iar $\tilde{\lambda}^*$ să difere de $\lambda^*$ cu mai puţin de $\frac{\alpha}{4}$.

Rezultă că $\tilde{\lambda}^*$ coincide cu unul din numerele $\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2$; avem

$$\alpha = |\lambda^* - (\lambda_1 + \lambda_2)| \leqslant |\lambda^* - \tilde{\lambda}^*| + |\tilde{\lambda}^* - (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2)| + |(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2) -$$

$$- (\lambda_1 + \lambda_2)| < \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4} = \frac{\alpha}{2}$$

ceea ce este contradictoriu. Prin urmare în toate cazurile rădăcinile ecuaţiei $D(\lambda) = 0$ sînt toate de forma $\lambda_1 + \lambda_2$; rezultă că dacă rădăcinile $\lambda_i$ ale ecuaţiei caracteristice a matricii $A$ sînt nenule şi toate sumele $\lambda_i + \lambda_j$ sînt diferite de zero vom avea $D(0) \neq 0$. Dar de aici va rezulta că pentru orice formă pătratică $(Cx,\ x)$ există o formă pătratică $(Bx,\ x)$ astfel ca $\frac{d}{dt}(Bx,\ x) = (Cx,\ x)$. Într-adevăr, $\frac{d}{dt}(Bx,\ x) = ((BA + A^*B)x,\ x)$ şi obţinem condiţia $BA + A^*B = C$. Considerat ca un sistem liniar în elementele matricii $B$, acest sistem are soluţii oricare ar fi $C$ dacă şi numai dacă determinantul sistemului este diferit de zero; dar acest determinant este chiar $D(0)$ care în condiţiile noastre este diferit de zero. Se vede acum că forma $B$ rezultă în acest caz unic determinată.

Din forma generală a soluției sistemelor liniare cu coeficienți constanți se vede că soluția banală a sistemelor liniare cu coeficienți constanți este asimptotic stabilă dacă și numai dacă rădăcinile ecuației caracteristice a matricii $A$ au părți reale negative. În acest caz condiția formulată mai sus ca $D(0) \neq 0$ este evident îndeplinită, deci forma $(Bx, x)$ există, oricare ar fi $(Cx, x)$. Să arătăm că dacă $(Cx, x)$ este o formă pătratică negativ definită, atunci forma pătratică $(Bx, x)$ este pozitiv definită. Într-adevăr, fie $x_0 \neq 0$ astfel ca $(Bx_0, x_0) \leqslant 0$. Din

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Bx(t;0,x_0),\ x(t;0,x_0)) = (Cx(t;0,x_0),\ x(t;0,x_0)) < 0$$

rezultă că pentru $t_0 > 0$ avem

$$(Bx(t_0;0,x_0),\ x(t_0;0,x_0)) < 0.$$

Pe baza teoremei de nestabilitate soluția banală a sistemului (3) ar rezulta instabilă, ceea ce contrazice ipoteza.

Prin urmare, am stabilit, cu mijloace nealgebrice, următorul fapt algebric : *Dacă valorile proprii ale matricii $A$ au părți reale negative, oricare ar fi matricea $C$ negativ definită, există o matrice $B$ pozitiv definită unică astfel ca*

$$BA + A^*B = C.$$

Prezintă interes demonstrația pur algebrică a acestei propoziții. Asemenea demonstrație a fost dată în 1956 de W. Hahn folosind forma canonică a matricilor.

## § 7. TEORIA STABILITĂȚII DUPĂ PRIMA APROXIMAȚIE

Una din problemele centrale ale teoriei stabilității este următoarea.

Presupunem că avem de studiat stabilitatea soluției $x_0(t)$ a sistemului (1). Conform procedeului descris încă de la început trecem la sistemul de ecuații al mișcării perturbate. Punem

$$y = x - x_0(t)$$

și obținem

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t} = f(t, x) - f(t, x_0) = f(t, y + x_0(t)) - f(t, x_0(t)) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0(t))\, y + o(|y|)$$

Am notat cu $\frac{\partial f}{\partial x}$ matricea $\left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\}$.

În mod firesc se pune problema neglijării termenilor de forma $o(|y|)$; practic, așa se și procedează în majoritatea cazurilor. Justificarea

acestui procedeu este dată de teoria stabilității după prima aproximație. Teorema fundamentală a acestei teorii arată că dacă soluția banală a sistemului liniar de primă aproximație este uniform asimptotic stabilă, neglijarea termenilor de grad superior în studiul stabilității este admisă.

TEOREMA 1.7. *Considerăm sistemul*:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\,y + Y(t, y), \tag{4}$$

*unde* $A(t)$ *este mărginită (sau mai general* $\int_s^t |A(u)|\,du = \omega(t-s)$) *și* $|Y(t, y)| < c\,|y|$ *pentru* $|y| < h$, *c fiind o constantă suficient de mică. Dacă soluția banală a sistemului liniar de primă aproximație este uniform asimptotic stabilă, atunci soluția banală a sistemului* (4) *este uniform asimptotic stabilă.*

*Demonstrație.* Fie $y(t;\, t_0, y_0)$ o soluție a sistemului (4).

Fie $(V(t)\,x,\, x)$ forma pătratică construită pentru sistemul (3) pe baza teoremei 1. 6″, cu $W(t) = E$. Vom demonstra că această funcție îndeplinește în raport cu sistemul (4) toate condițiile din teorema 1.5. Pentru aceasta avem de dovedit numai că

$$\lim_{h \to 0+} \sup \frac{(V(t)\,y(t+h;\, t_0, y_0),\, y(t+h;\, t_0, y_0)) - (V(t)\,y(t;\, t_0, y_0),\, y(t;\, t_0, y_0))}{h} \leqslant -c(|y(t;\, t_0, y_0)|).$$

Fie

$$V^*(t) = (V(t)\,y(t;\, t_0, y_0),\; y(t;\, t_0, y_0)).$$

Funcția $V^*(t)$ este chiar derivabilă și avem

$$\frac{dV^*(t)}{dt} = 2\left(V(t)\,y(t;\, t_0, y_0),\, \frac{dy(t;\, t_0, y_0)}{dt}\right) + \left(\frac{dV}{dt}\,y(t;\, t_0, y_0),\, y(t;\, t_0, y_0)\right) =$$

$$= 2(V(t)\,y(t;\, t_0, y_0),\, A(t)\,y(t;\, t_0, y_0)) + 2\,(V(t)\,y(t;\, t_0, y_0),\, Y(t,\, y(t;\, t_0, y_0))) +$$

$$+ \left(\frac{dV}{dt}\,y(t;\, t_0, y_0),\;\; y(t;\, t_0, y_0)\right).$$

Considerăm soluția $x(u;\, t, y(t;\, t_0, y_0))$ a sistemului (3) și fie

$$V^{**}(u) = (V(u)\,x(u;\, t, y(t;\, t_0, y_0)),\; x(u;\, t,\, y(t;\, t_0, y_0)))$$

Conform celor stabilite în teorema 1.6″ avem

$$\frac{dV^{**}(u)}{du} = -\,|x(u;\, t,\, y(t;\, t_0, y_0))|^2.$$

Pe de altă parte

$$\frac{dV^{**}(u)}{du} = 2\,(V(u)\,x(u;\, t, y(t;\, t_0, y_0)),\, A(u)\,x(u;\, t,\, y(t;\, t_0, y_0))) +$$

$$+ \frac{dV}{du}\,x(u;\, t,\, y(t;\, t_0, y_0)),\; x(u;\, t,\, y(t;\, t_0, y_0))).$$

Rezultă

$$2\,(V\,(u)\,x\,(u\,;t,\;y\,(t\,;t_0,\;y_0)),\;A\,(u)\,x\,(u\,;t,\;y\,(t\,;t_0,\;y_0)))\,+$$
$$+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}u}\,x(u\,;t,y(t\,;t_0,y_0)),\,x\,(u\,;t,y\,(t\,;t_0,y_0))\right)=-\,|\,x\,(u\,;\;t,y\,(t\,;\;t_0,y_0))\,|^2.$$

Această egalitate devine pentru $u = t$

$$2\;(V\,(t)\,y\,(t\,;\;t_0,y_0),\;A\,(t)\,y\,(t\,;t_0,y_0))+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\,y\,(t\,;t_0,\;y_0),\;y\,(t\,;\;t_0,y_0)\right)=$$
$$=-\,|\,y\,(t\,;t_0,\;y_0)\,|^2.$$

Folosind acest rezultat, deducem

$$\frac{\mathrm{d}V^*}{\mathrm{d}t}=-\,|\,y\,(t\,;t_0,y_0)\,|^2+2\,(V\,(t)\,y\,(t\,;t_0,y_0),\;Y\,(t,\;y\,(t\,;t_0,y_0))).$$

Avem

$$|V\,(t)\,y\,(t\,;t_0,\,y_0),\;Y\,(t,\,y\,\,(t\,;t_0,y_0))\,\,|\leqslant M\,|\,y\,(t\,;t_0,y_0)\,|\,|\,Y\,(t,y\,(t\,;\,t_0,y_0))\,|.$$

Presupunem $c < \dfrac{1}{4M}$ și $|y_0| < \sqrt{\dfrac{\mu}{M}}\,h$. Atunci, pentru valori $t \geqslant t_0$ destul de apropiate de $t_0$, va rezulta $|y\,(t\,;t_0,\,y_0)| < h$; pentru valorile $t$ pentru care $|y\,(t\,;t_0,\,y_0)| < h$,

$$|\,V\,(t)\,y\,(t\,;t_0,y_0),\;Y\,(t,y\,(t\,;t_0,\;y_0)\,|\leqslant Mc\;|y\;\;(t\,;t_0,y_0)\,|^2<\frac{1}{4}\,|y(t\,;\,t_0,y_0)\,|^2,$$

deci

$$\frac{\mathrm{d}V^*}{\mathrm{d}t}<-\frac{1}{2}\,|\,y\,(t\,;t_0,\;y_0)\,|^2.$$

De aici rezultă însă că $V^*\,(t)$ descrește, deci

$$V^*\,(t)<V^*\;(t_0)=(V\,(t_0)\,y_0,\;y_0)<M\;\;|y_0\,|^2<\mu\,h^2$$

și din

$$V^*\,(t)>\mu\;\;|y\,(t\,;t_0,\;y_0)|^2$$

rezultă

$$|\,y\,(t\,;t_0,\;y_0)\,|^2<h^2.$$

Fie $T$ astfel ca

$$|y\,(T\,;t_0,y_0)\,|=h,\;\;|\,y\,(t\,;t_0,y_0)\,|<h\;\;\text{pentru}\;\;t_0\leqslant t<T\,;$$

din calculele de mai sus rezultă

$$|\,y\,(T\,;t_0,\;y_0)\,|^2<h^2,$$

deci existența lui $T$ este contradictorie. Rezultă că pentru orice $t \geqslant t_0$

avem $|y(t; t_0, y_0)| < h$ deci $\frac{dV^*}{dt} < -\frac{1}{2}|y(t; t_0, y_0)|^2$. Teorema este demonstrată.

Teorema 1.7 poate fi demonstrată şi prin altă metodă, mai simplă, care nu foloseşte metoda funcţiei lui Liapunov, ci se bazează pe unele considerente specifice din teoria sistemelor liniare. Fie $y(t; t_0, y_0)$ o soluţie a sistemului (4). Avem

$$\frac{dy(t; t_0, y_0)}{dt} = A(t)\, y(t; t_0, y_0) + Y(t, y(t; t_0, y_0)).$$

Considerînd pe $Y(t, y(t; t_0, y_0))$ ca o funcţie dată de $t$, aplicăm „formula variaţiei constantelor" stabilită în § 3. Rezultă

$$y(t; t_0, y_0) = C(t; t_0)\, y_0 + \int_{t_0}^{t} C(t; s)\, Y(s, y(s; t_0, y_0))\, ds,$$

Deoarece prin ipoteză soluţia banală a sistemului (3) este uniform asimptotic stabilă, ea rezultă exponenţial stabilă, deci

$$|C(t; t_0)| \leqslant B e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

Rezultă

$$|y(t; t_0, y_0)| \leqslant B e^{-\alpha(t-t_0)} |y_0| + \int_{t_0}^{t} B e^{-\alpha(t-s)} |Y(s, y(s; t_0, y_0))|\, ds.$$

Pentru toate valorile $t$ cu proprietatea că $t_0 \leqslant s \leqslant t$ implică $|y(s; t_0, y_0)| < h$, rezultă

$$|y(t; t_0, y_0)| \leqslant B e^{-\alpha(t-t_0)} |y_0| + B e^{-\alpha t} \int_{t_0}^{t} c\, e^{\alpha s} |y(s; t_0, y_0)|\, ds.$$

Fie

$$u(t) = e^{\alpha t} |y(t; t_0, y_0)|.$$

Avem

$$u(t) \leqslant B u(t_0) + Bc \int_{t_0}^{t} u(s)\, ds.$$

Pe baza lemei 0.6 (consecinţa 2) rezultă

$$u(t) \leqslant B u(t_0)\, e^{Bc(t-t_0)},$$

deci

$$e^{\alpha t} |y(t; t_0, y_0)| \leqslant B e^{\alpha t_0} e^{Bc(t-t_0)} |y_0|.$$

De aici rezultă

$$|y(t; t_0, y_0)| \leqslant B e^{-[\alpha - Bc](t-t_0)} |y_0|$$

Dacă $c < \frac{\alpha}{B}$ rezultă în orice caz

$$|y(t; t_0, y_0)| < B |y_0|$$

deci dacă $|y_0| < \frac{h}{B}$ (vom presupune $B > 1$) relaţia

$$|y(t; t_0, y_0)| < h$$

va rezulta adevărată pentru orice $t \geqslant t_0$.

Dar atunci, pentru orice $t \geqslant t_0$, rezultă $|y(t; t_0, y_0)| \geqslant Be^{-\alpha_1(t-t_0)}|y_0|$ cu $\alpha_1 = \alpha - Bc > 0$ şi deci soluţia banală a sistemului (4) este exponenţial stabilă.

Să observăm că *în această demonstraţie nu se mai foloseşte faptul că*

$$\int_s^t |A(u)|\,\mathrm{d}u \leqslant \omega(t-s);$$

în demonstraţia precedentă acest fapt intervenea pentru stabilirea proprietăţilor funcţiei $(V(t)\,x, x)$ din teorema 1.6″.

Vom pune acum în evidenţă unele generalizări ale teoremei 1.7.

Am văzut în treacăt în § 2 că dacă

$$|f(t, x)| \leqslant L(r)\,|x| \text{ pentru } |x| < r$$

şi dacă soluţia banală a sistemului (1) este uniform asimptotic stabilă şi în plus

$$|x(t; t_0, x_0)| \leqslant \psi(t-t_0)\,|x_0|,$$

stabilitatea este exponenţială. Demonstraţia s-a făcut cu ajutorul construirii unei funcţii Liapunov de forma

$$V(t, x) = \int_t^{t+T} |x(\tau; t, x)|^2 d\tau.$$

Prin urmare, dacă $f$ îndeplineşte condiţia de mai sus şi soluţia banală este exponenţial stabilă, există o funcţie $V$ cu proprietăţile

$$\mu|x|^2 \leqslant V(t, x) \leqslant M|x|^2, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(t, x(t; t_0, x_0)) \leqslant -\frac{1}{2}|x(t; t_0, x_0)|^2.$$

Vom presupune în plus că

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqslant L(r)\,|x_1 - x_2| \text{ pentru } |x_1| < r,\ |x_2| < r$$

şi vom arăta că în acest caz există o constantă $K$ astfel încît

$$|V(t, x_1) - V(t, x_2)| \leqslant K(|x_1| + |x_2|)\,|x_1 - x_2| \text{ pentru } |x_1| < \delta_0, |x_2| < \delta_0.$$

Avem

$$x(u; t, x_1) = x_1 + \int_t^u f(s, x(s; t, x_1))\,\mathrm{d}s;$$

dacă $|x_1| \leqslant \delta(r)$ rezultă

$$|x(s; t, x_1)| < r$$

deci

$$|f(s, x(s; t, x_1))| < L(r)\,|x(s; t, x_1)|.$$

Rezultă, pentru $|x_1| \leqslant \delta(r)$,

$$|x(u;\ t,\ x_1)| \leqslant |x_1| + \int_t^u L(r)\,|x(s;\ t,\ x_1)|\,\mathrm{d}s.$$

Conform lemei 0.6 (consecinţa 2) rezultă

$$|x(u;t,\ x_1)| \leqslant |x_1|\, e^{L(r)(u-t)},$$

deci

$$|x(u;t,\ x_1)| \leqslant |x_1|\, \mathrm{e}^{TL(r)}$$

pentru $t \leqslant u \leqslant t+T$, $|x_1| \leqslant \delta(r)$.

Mai departe

$$|x(u;t,\ x_1) - x(u;t,\ x_2)| \leqslant \int_t^u L(r)\,|x(s;t,x_1) - x(s;t,x_2)|\,\mathrm{d}s + |x_1 - x_2|$$

dacă

$$|x_1| < \delta(r),\ |x_2| < \delta(r),$$

deci

$$|x(u;t,\ x_1) - x(u;t,\ x_2)| \leqslant |x_1 - x_2|\,\mathrm{e}^{TL(r)} \text{ pentru } t \leqslant u \leqslant t+T.$$

Folosind aceste evaluări, deducem pentru $|x_1| < \delta(r)$, $|x_2| < \delta(r)$

$$|V(t,\ x_1) - V(t,\ x_2)| = \left|\int_t^{t+T} |x(u;t,\ x_1)|^2\,\mathrm{d}u - \int_t^{t+T} |x(u;\ t,\ x_2)|^2\,\mathrm{d}u\right| =$$

$$= \left|\int_t^{t+T} (|x(u;t,\ x_1)| + |x(u;t,x_2)|)\,(|x(u;t,\ x_1)| - |x(u;t,x_2)|)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_t^{t+T} (|x(u;t,\ x_1)| + |x(u;t,\ x_2)|)\,|x(u;t,\ x_1) - x(u;t,\ x_2)|\,\mathrm{d}u \leqslant$$

$$\leqslant \int_t^{t+T} (|x_1|\mathrm{e}^{TL(r)} + |x_2|\mathrm{e}^{TL(r)})\,|x_1 - x_2|\mathrm{e}^{TL(r)}\,\mathrm{d}u =$$

$$= T\mathrm{e}^{2L(r)}(|x_1| + |x_2|)\,|x_1 - x_2|.$$

Punînd

$$K = T\mathrm{e}^{2TL(r)}$$

rezultă

$$|V(t,\ x_1) - V(t,\ x_2)| < K(|x_1| + |x_2|)\,|x_1 - x_2|.$$

Putem demonstra acum

TEOREMA 1.7′. *Dacă* $|f(t,\ y_1) - f(t,\ y_2)| < L(r)\,|y_1 - y_2|$ *pentru* $|y_1| < r, |y_2| < r$ *şi* $|g(t,\ y)| < L_1(r)\,|y|$ *pentru* $|y| < r$ *şi dacă* $L_1(r)$ *este suficient de mică, atunci din stabilitatea exponenţială a soluţiei banale a sistemului (1) rezultă stabilitatea asimptotică exponenţială a soluţiei banale a sistemului*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t,\ y) + g(t,\ y). \tag{5}$$

*Demonstraţie.* Fie $y\ (v\,;\ t,\ y)$ o soluţie a sistemului (5) cu $|\,y\,| \leqslant \frac{r}{2}\cdot$

Avem

$$y\,(v\,;t,\,y) = y + \int_t^v f\,[u,\,y(u\,;\,t,\,y)]\,du + \int_t^v g[u,\,y(u\,;\,t,\,y)]\,du,$$

deci

$$|\,y(v\,;\,t,\ y)\,| \leqslant |\,y\,| + \int_t^v L(r)\,|\,y(u\,;\,t,\,y)\,|\,du + \int_t^v L_1(r)\,|\,y(u\,;\,t,\ y)\,|\,du$$

pentru toate valorile $t \leqslant v$ astfel încît dacă $t \leqslant u \leqslant v$ să avem $|y\,(u\,;\ t,\ y)\,| < r$. Rezultă

$$|\,y\,(v\,;\,t,\ y)\,| \leqslant |\,y\,|\ e^{h(L(r)+L_1(r))}\ \text{pentru}\ t \leqslant v \leqslant t+h.$$

De aici rezultă că dacă $|\,y\,| \leqslant \frac{r}{2}$ şi $h$ e suficient de mic, $|y\,(u\,;\,t,\,y)\,| < r$ pentru toţi $t \leqslant u \leqslant v$ şi inegalitatea e adevărată pentru orice $v$ cu $t \leqslant v \leqslant t+h$.

Fie $x\,(v\,;\ t,\ y)$ o soluţie a sistemului (1). Avem

$$y\,(v\,;\ t,\,y) - x\,(v\,;\,t,\,y) = \int_t^v [f\,(u,\ y\,(u\,;\ t,\ y)) - f\ (u,\ x\,(u\,;t,\ y))]\ du + \\ + \int_t^v g\ (u,\,y(u\,;\ t,\ y))\,du$$

deci

$$|\,y\,(v\,;\,t,\,y) - x\,(v\,;\,t,\,y)\,| \leqslant \int_t^v L_1\,(r)\ \ |\,y\ \ (u\,;\,t,\,y)\,|\,du + \\ + \int_t^v L(r)\,|\,y\,(u\,;\,t,y) - x\,(u\,;\,t,\ y)\,|\,du \leqslant hL_1\,(r)\,e^{h\,(L\,(r)+L_1\,(r))}\,|\,y\,| + \\ + \int_t^v L\,(r)\ |y\,(u\,;\ t,\ y) - x\,(u\,;\ t,\ y)|\ du.$$

Rezultă

$$|\,y\,(v\,;\,t,\,y) - x\,(v\,;\,t,\,y)\,| \leqslant hL_1\,(r)\,e^{h\,(L_1\,(r)+L\,(r))}\,e^{h\,L\,(r)}\,|\,y\,|$$

pentru $t \leqslant v \leqslant t+h$.

Ţinînd seama de aceste evaluări deducem

$$|\,V\,(t+h,\,y\,(t+h\,;\,t,y)) - V\,(t+h,\,x\,(t+h\,;\,t,\,y))\,| \leqslant \\ \leqslant K\,(e^{h(L(r)+L_1\,(r))}\,|\,y\,| + e^{hL\,(r)}\,|\,y\,|)\,h\,L_1\,(r)\,e^{2hL\,(r)+h\,L_1(r)}|\,y\,|$$

deci

$$|\,V(t+h,\,y\,(t+h\,;\,t,\,y) - V\,(t+h,\,x\,(t+h\,;\,t,\,y))\,| \leqslant 2KL_1\,(r)\,e^{1h\,(L\,(r)+L_1\,(r))}|\,y\,|^2.$$

De aici rezultă

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V\,[t+h,\,y\,(t+h\,;\,t,\,y) - V\,[t+h,\,x\,(t+h\,;\,t,\,y)]}{h} \leqslant 2KL_1\,(r)\,|\,y\,|^2.$$

Avem

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V[t+h, y(t+h; t_0, y_0)] - V[t, y(t; t_0, y_0)]}{h} =$$

$$= \limsup_{h\to 0+} \frac{V[t+h, y(t+h; t, y(t; t_0, y_0))] - V[t, y(t; t_0, y_0)]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{h\to 0+} \frac{V[t+h, y(t+h; t, y(t; t_0, y_0))] - V[t+h, x(t+h; t, y(t; t_0, y_0))]}{h} +$$

$$+ \limsup_{h\to 0+} \frac{V[t+h, x(t+h; t, y(t; t_0, y_0))] - V[t, y(t; t_0, y_0)]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant 2KL_1(r)\,|y(t; t_0, y_0)|^2 - \frac{1}{2}|y(t; t_0, y_0)|^2$$

dacă $|y(t; t_0, y_0)| \leqslant \frac{r}{2}$. Fie $L_1(r)$ suficient de mic pentru ca

$$L_1(r) < \frac{1}{8K};$$

rezultă

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V[t+h, y(t+h; t_0, y_0)] - V[t, y(t; t_0, y_0)]}{h} < -\frac{1}{4}|y(t; t_0, y_0)|^2$$

dacă $|y(t; t_0, y_0) < \frac{r}{2}$. Rezultă de aici că $V[t, y(t; t_0, y)]$ este descrescătoare deci

$$\mu\,|y(t; t_0, y_0)|^2 \leqslant V[t, y(t; t_0, y_0)] \leqslant V(t_0, y_0) < M|y_0|^2$$

deci dacă $|y_0| < \sqrt{\frac{M}{\mu}}\frac{r}{2}$ rezultă că pentru orice $t \geqslant t_0$ vom avea $|y(t; t_0, y_0)| \leqslant \leqslant \frac{r}{2}$, deci funcția $V(t,x)$ construită pentru sistemul (1) pe baza proprietății de stabilitate exponențială verifică pentru sistemul (5) toate condițiile din teorema 1.5. În acest fel teorema 1.7′ este demonstrată.

Vom da și pentru această teoremă încă o demonstrație, bazată pe o idee principial nouă, datorită lui Barbașin. Vom presupune că

$$|g(t, y_2) - g(t, y_1)| \leqslant L(r)|y_1 - y_2| \text{ pentru } |y_1| < r, \ |y_2| < r.$$

Ca mai sus vom scrie

$$y(t; t_0, y_0) - x(t; t_0, y_0) = \int_{t_0}^{t} \{f[u, y(u; t_0, y_0)] - f[(u, x(u; t_0, y_0)]\}du +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} g[u, y(u; t_0, y_0)]\,du = \int_{t_0}^{t} \{f[u, y(u; t_0, y_0)] - f[u, x(u; t_0, y_0)]\}\,du +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \{g(u, y(u; t_0, y_0)] - g[u, x(u; t_0, y_0)]\}du + \int_{t_0}^{t} g[u, x(u; t_0, y_0)]\,du.$$

**Rezultă**

$$|y(t;t_0,y_0)-x(t;t_0,y_0)|\leqslant L_1(r)B\int_{t_0}^{t}e^{-\alpha(u-t_0)}|y_0|\,du+$$

$$+\int_{t_0}^{t}2L(r)|y(u;t_0,y_0)-x(u;t_0,y_0)|\,du$$

deci

$$|y(t;t_0,y_0)-x(t;t_0,y_0)|\leqslant\frac{L_1(r)B}{\alpha}e^{2L(r)(t-t_0)}|y_0|$$

pentru toți $t\geqslant t_0$ pentru care

$$|y(u;t_0,y_0)|\leqslant\frac{r}{2},\quad |x(u;t_0,y_0)|\leqslant\frac{r}{2},\quad \text{dacă } t_0\leqslant u\leqslant t.$$

Fie $\varepsilon>0$, $|y_0|<\frac{\varepsilon}{2B}$, $T=\frac{1}{\alpha}\ln 4B$ și $L_1(r)$ astfel ca $\frac{L_1(r)B}{\alpha}e^{2TL(r)}<\frac{1}{4}$.

Avem

$$|x(u;t_0,y_0)|\leqslant Be^{-\alpha(u-t_0)}|y_0|<B|y_0|<\frac{\varepsilon}{2}<\frac{r}{4}\quad \text{dacă } \varepsilon\leqslant\frac{r}{2}\cdot$$

Mai departe, pentru acei $t_0\leqslant t\leqslant t_0+T$ pentru care

$$|y(u;t_0,y_0)|\leqslant\frac{r}{2},\quad t_0\leqslant u\leqslant t$$

rezultă

$$|y(u;t_0,y_0)-x(u;t_0,y_0)|\leqslant\frac{L_1(r)B}{\alpha}e^{2TL(r)}|y_0|<\frac{1}{4}|y_0|<\frac{\varepsilon}{8B},$$

deci

$$|y(u;t_0,y_0)|\leqslant|x(u;t_0,y_0)|+|y(u;t_0,y_0)-x(u;t_0,y_0)|\leqslant$$

$$\leqslant Be^{-\alpha(u-t_0)}|y_0|+\frac{\varepsilon}{8B}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{8B}<\varepsilon\leqslant\frac{r}{2}\cdot$$

Rezultă că $|y(u;t_0,y_0)|\leqslant\frac{r}{2}$ pentru $t_0\leqslant u\leqslant t_0+T$ și în plus

$|y(u;t_0,y_0)|<\varepsilon$ pentru $t_0\leqslant u\leqslant t_0+T$.

Mai departe

$$|y(t_0+T;t_0,y_0)|\leqslant Be^{-\alpha T}\frac{\varepsilon}{2B}+\frac{\varepsilon}{8B}=\frac{\varepsilon}{8B}+\frac{\varepsilon}{8B}=\frac{\varepsilon}{4B}\cdot$$

Considerăm acum intervalul $t_0 + T \leqslant t \leqslant t_0 + 2T$; în loc de $y_0$ vom pleca cu valoarea $y(t_0 + T; t_0, y_0)$ pentru care am stabilit evaluarea $|y(t_0 + T; t_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{4B}$. Aceleaşi calcule ca mai sus (în care rolul lui $\varepsilon$ este luat de $\frac{\varepsilon}{2}$) conduc la $|y(t; t_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru $t_0 + T \leqslant t \leqslant t_0 + 2T$ şi $|y(t_0 + 2T; t_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{8B}$. Continuînd în acelaşi mod se capătă pentru $t_0 + nT \leqslant t \leqslant t_0 + (n+1)T$ evaluarea $|y(t; t_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

Rezultă în orice caz că dacă $|y_0| < \frac{\varepsilon}{2B}$ avem $|y(t; t_0, y_0)| < \varepsilon$ pentru orice $t \geqslant t_0$. Dacă $|y_0| < \frac{r}{4B}$ rezultă $|y(t; t_0, y_0)| < \frac{r}{2^{n+2}}$ pentru $t_0 + nT \leqslant t \leqslant t_0 + (n+1)T$. Fie $t \geqslant t_0$; există $m \geqslant 1$ astfel ca $t_0 + (m-1)T \leqslant t < t_0 + mT$; atunci $mT > t - t_0$, $m > \frac{1}{T}(t - t_0)$, $2^m > 2^{\frac{1}{T}(t-t_0)}$, $\frac{1}{2^m} < 2^{-\frac{1}{T}(t-t_0)}$. Din $t \geqslant t_0 + (m-1)T$ rezultă

$$|y(t; t_0, y_0)| < \frac{r}{2}\,\frac{1}{2^m} < \frac{r}{2}\,2^{-\frac{1}{T}(t-t_0)};$$

luînd $\alpha_1 = \frac{1}{T}\ln 2$ avem $2 = e^{\alpha_1 T}$, deci $|y(t; t_0, y_0)| < \frac{r}{2}e^{-\alpha_1(t-t_0)}$, ceea ce dovedeşte că soluţia banală a sistemului (5) este exponenţial stabilă.

Vom demonstra acum o teoremă de stabilitate după prima aproximaţie, valabilă numai în cazul cînd sistemul de primă aproximaţie nu depinde explicit de $t$; extinderea ei în cazul general este încă o problemă deschisă. Teorema a fost demonstrată pentru prima dată în 1951 de I. G. Malkin. Alte demonstraţii au fost date de J. L. Massera şi N. N. Krasovski. Aici vom da o nouă demonstraţie bazată pe unele rezultate subliniate mai înainte.

TEOREMA 1.7″. *Considerăm sistemul*

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + R(t, x), \tag{6}$$

*unde* $X(kx) = k^m X(x)$, $|R(t,x)| \leqslant \gamma |x|^m$, $\gamma$ *fiind o constantă suficient de mică. Dacă soluţia banală a sistemului* $\frac{dx}{dt} = X(x)$ *este asimptotic stabilă, atunci soluţia banală a sistemului (6) este uniform asimptotic stabilă.*

*Demonstrație.* Considerăm sistemul

$$\frac{dz}{d\tau} = \begin{cases} \dfrac{X(z)}{|z|^{m-1}} & \text{pentru} \quad |z| \neq 0, \\ 0 & \text{pentru} \quad |z| = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Fie $z(\tau; \tau_0, x_0)$ o soluție a sistemului (7),

$$t(\tau) = \int_0^\tau \frac{1}{|z(u; \tau_0, x_0)|^{m-1}} du,$$

$\tau(t)$ funcția inversă corespunzătoare.

Fie

$$y(t) = z[\tau(t); \tau_0, x_0].$$

Rezultă

$$\frac{d}{dt} y(t) = \frac{d}{d\tau} z(\tau(t); \tau_0, x_0] \frac{d\tau(t)}{dt} = \frac{X[z[\tau(t); \tau_0, x_0]]}{|z[\tau(t); \tau_0, x_0]|^{m-1}} \cdot \frac{1}{\frac{dt(\tau)}{d\tau}} =$$

$$= X[z(\tau(t); \tau_0, x_0)]$$

deci

$$\frac{dy(t)}{dt} = X(y(t));$$

în plus $y(t_0) = x_0$, unde $t_0 = t(\tau_0)$.

Deoarece am presupus că soluția sistemului omogen este asimptotic stabilă putem scrie

$$|y(t)| \leqslant \chi(|x_0|) \psi(t - t_0),$$

deci

$$|z[\tau(t); \tau_0, x_0]| \leqslant \chi(|x_0|) \psi(t - t_0).$$

Rezultă

$$|z(\tau; \tau_0, x_0)| \leqslant \chi(|x_0|) \psi(t(\tau) - t(\tau_0)) =$$

$$= \chi(|x_0|) \psi\left(\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{1}{|z(u; \tau_0, x_0)|^{m-1}} du\right).$$

Dar deoarece $z(u; \tau_0, x_0)$ e mărginită, rezultă că

$$\frac{1}{|z(u; \tau_0, x_0)|^{m-1}} \geqslant l > 0, \text{ deci } |z(\tau; \tau_0, x_0)| \leqslant \chi(|x_0|) \psi(l(\tau - \tau_0)) =$$

$$= \chi(|x_0|) \psi^*(\tau - \tau_0),$$

unde $\psi^*(r)$ este monoton descrescătoare și

$$\lim_{\gamma \to \infty} \psi^*(r) = 0.$$

Din această evaluare rezultă că soluția banală a sistemului (7) este uniform asimptotic stabilă, deci pe baza unei observații din §2 este expo-

nenţial stabilă. Fie acum $x(t;\ t_0,\ x_0)$ o soluţie a sistemului (6). Punem

$$\tau(t) = \int_0^t |x(u;t_0,x_0)|^{m-1}\,du;$$

fie $t(\tau)$ inversa acestei funcţii şi

$$y(\tau) = x(t(\tau);t_0,x_0).$$

Avem

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{d}{dt}x(t(\tau);t_0,x_0)\frac{dt(\tau)}{d\tau} =$$

$$= (X[x(t(\tau);t_0,x_0)] + R[t(\tau), x(t(\tau);t_0,x_0)])\frac{1}{\dfrac{d\tau(t)}{dt}} =$$

$$= (X[x(t(\tau);t_0,x_0)] + R[t(\tau), x(t(\tau);t_0,x_0)])\frac{1}{|x(t(\tau);t_0,x_0)|^{m-1}} =$$

$$= \frac{X[y(\tau)]}{|y(\tau)|^{m-1}} + \frac{R[t(\tau),y(\tau)]}{|y(\tau)|^{m-1}}.$$

Rezultă că $y(\tau)$ verifică sistemul

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{X(y)}{|y|^{m-1}} + \frac{R(t(\tau),y)}{|y|^{m-1}} \quad \text{dacă } |y| \neq 0,$$

$$\frac{dy}{d\tau} = 0 \text{ dacă } |y| = 0.$$

Din

$$|R(t,y)| \leqslant \gamma|y|^m$$

rezultă

$$\left|\frac{R(t(\tau),y)}{|y|^{m-1}}\right| \leqslant \gamma|y|.$$

Deoarece soluţia banală a sistemului de primă aproximaţie (7) este exponenţial stabilă, putem aplica teorema 1.7′ şi rezultă că soluţia banală a sistemului în $y$ este exponenţial stabilă, deci

$$|y(\tau)| \leqslant Be^{-\alpha(\tau-\tau_0)}|x_0|,\ \tau_0 = \tau(t_0).$$

Rezultă

$$|x(t(\tau);t_0,x_0)| \leqslant Be^{-\alpha(\tau-\tau_0)}|x_0|$$

sau

$$|x(t;t_0,x_0)| \leqslant Be^{-\alpha(\tau(t)-\tau(t_0))}|x_0|$$

deci

$$|x(t;t_0,x_0)| \leqslant Be^{-\alpha\int_{t_0}^t |x(u;t_0,x_0)|^{m-1}du}|x_0|.$$

Dacă pentru $t \to \infty$, $\tau(t) \to \tau_\infty < \infty$, atunci soluţia

$$y(\tau) = x(t(\tau); t_0, x_0)$$

nu ar fi prelungibilă dincolo de $\tau_\infty$ deoarece pentru $\tau \to \tau_\infty$ avem $t \to \infty$. Dar soluţia $y(\tau)$ este prelungibilă pentru orice $\tau$, deci obligatoriu $\tau_\infty = \infty$.

Rezultă că integrala este divergentă deci are loc stabilitatea asimptotică. Teorema este demonstrată.

Să punem în evidenţă caracterul stabilităţii asimptotice pentru sistemele omogene considerate. Presupunem $m > 1$. Pentru sistemul

$$\frac{dz}{d\tau} = \begin{cases} \dfrac{X(z)}{|z|^{m-1}}, & |z| \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

stabilitatea asimptotică este totdeauna exponenţială, deci

$$|z(\tau; \tau_0, x_0)| \leqslant Be^{-\alpha(\tau - \tau_0)} |x_0|,$$

deci

$$|y(t; t_0, x_0)| \leqslant Be^{-\alpha[\tau(t) - \tau(t_0)]} |x_0|.$$

Să evaluăm pe $|z(\tau; \tau_0, x_0)|$. Avem $\dfrac{d}{d\tau} z(\tau; \tau_0, x_0) = Z(z(\tau; \tau_0, x_0))$, unde am notat

$$Z(z) = \begin{cases} \dfrac{X(z)}{|z|^{m-1}}, & |z| \neq 0 \\ 0 & z = 0; \end{cases}$$

$$\left(z(\tau; \tau_0, x_0), \frac{d}{d\tau} z(\tau; \tau_0, x_0)\right) = (z(\tau; \tau_0, x_0), Z(z(\tau; \tau_0, x_0))).$$

Dar $Z(z)$ e omogenă de gradul întîi deci $|Z(z)| \leqslant L|z|$, unde $L = \sup\limits_{|z| \leqslant 1} |Z(z)|$. Rezultă

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} |z(\tau; \tau_0, x_0)|^2 \leqslant L |z(\tau; \tau_0, x_0)|^2,$$

deci

$$\left| \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \ln |z(\tau; \tau_0, x_0)|^2 \right| \leqslant L, \quad \frac{d}{d\tau} \ln |z(\tau; \tau_0, x_0|^2 \geqslant -2L,$$

$\ln |z(\tau; \tau_0, x_0)|^2 \geqslant -2L(\tau - \tau_0) + \ln |x_0|^2$, $|z(\tau; \tau_0, x_0)|^2 \geqslant e^{-2L(\tau-\tau_0)} |x_0|^2$, deci

$$|z(\tau; \tau_0, x_0)| \geqslant e^{-L(\tau-\tau_0)} |x_0|, \quad |z(\tau; \tau_0, x_0)|^{m-1} \geqslant e^{-L(m-1)(\tau-\tau_0)} |x_0|^{m-1},$$

$$\frac{1}{|z(\tau; \tau_0, x_0)|^{m-1}} \leqslant \frac{1}{|x_0|^{m-1}} e^{(m-1)L(\tau-\tau_0)}$$

Rezultă

$$\frac{\mathrm{d}t(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \leqslant \frac{1}{|x_0|^{m-1}} e^{(m-1)L(\tau-\tau_0)}$$

deci

$$t(\tau) - t_0 \leqslant \frac{1}{|x_0|^{m-1}} \int_{\tau_0}^{\tau} e^{(m-1)L(\tau-\tau_0)} \mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{1}{|x_0|^{m-1}} \int_0^{\tau-\tau_0} e^{(m-1)L\sigma} \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{(m-1)L|x_0|^{m-1}} (\mathrm{e}^{(m-1)L(\tau-\tau_0)} - 1).$$

De aici

$$1 + (m-1)L|x_0|^{m-1}(t-t_0) \leqslant \mathrm{e}^{(m-1)L(\tau-\tau_0)}$$

$$[1 + (m-1)L|x_0|^{m-1}(t-t_0)]^{\frac{1}{L}} \leqslant \mathrm{e}^{(m-1)(\tau-\tau_0)}$$

$$[1 + (m-1)L|x_0|^{m-1}(t-t_0)]^{\frac{\alpha}{L}} \leqslant \mathrm{e}^{(m-1)\alpha(\tau-\tau_0)}$$

deci

$$\mathrm{e}^{-(m-1)\alpha(\tau-\tau_0)} \leqslant \frac{1}{[1 + (m-1)L|x_0|^{m-1}(t-t_0)]^{\frac{\alpha}{L}}}$$

Rezultă

$$|y(t; t_0, x_0)|^{m-1} \leqslant B^{m-1} e^{-(m-1)\alpha(\tau-\tau_0)} |x_0|^{m-1} \leqslant \frac{B^{m-1}|x_0|^{m-1}}{[1 + (m-1)L|x_0|^{m-1}(t-t_0)]^{\frac{\alpha}{L}}}$$

sau

$$|y(t; t_0, x_0)| \leqslant B[1 + (m-1)L|x_0|^{m-1}(t-t_0)]^{-\frac{\alpha}{L(m-1)}} |x_0| =$$

$$= B[|x_0|^{-(m-1)} + (m-1)L(t-t_0)]^{-\frac{\alpha}{L(m-1)}} |x_0|^{1-\frac{\alpha}{L}}.$$

Krasovski a demonstrat că dacă soluția banală a sistemului

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Y(t, y)$$

verifică o evaluare de acest tip, atunci se poate demonstra o teoremă de stabilitate după prima aproximație de tipul teoremei 1.7″. Este însă o problemă deschisă dacă o asemenea evaluare are loc întotdeauna pentru sistemele omogene.

Vom stabili acum unele teoreme de stabilitate după prima aproximație cu caracter mai puțin general, dar care se pot dovedi efective în diferite cazuri concrete.

PROPOZIȚIA 1. *Considerăm sistemul*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)x + X(x, t),$$

*unde* $|X(x, t)| \leqslant \beta^2(t)|x|$, *pentru* $|x| \leqslant c$.

*Dacă există o matrice $G(t)$ autoadjunctă şi pozitivă (adică astfel încît forma ermitică $(Gx, x)$ să fie pozitiv definită) astfel încît*

$$\int_{t_0}^{\infty}\left[q_M(t) + 2\beta\sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}}\right]\mathrm{d}t = -\infty,$$

*atunci soluţia banală a sistemului este asimptotic stabilă.*

*Aici $q_M$ este cea mai mare valoare proprie a matricii $A + G^{-1}\dot{G} + G^{-1}A^*G$, iar $\lambda$ şi $\Lambda$ sînt respectiv cea mai mică şi cea mai mare valoare proprie pentru matricea $G$.*

*Demonstraţie.* Fie

$$\xi(t) = (G(t)\,x(t;\,t_0,\,x_0),\,x(t;\,t_0,\,x_0)).$$

Avem

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}x(t;\,t_0,\,x_0),\,x(t;\,t_0,\,x_0)\right) + \left(G(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t;\,t_0,\,x_0),\,x(t;\,t_0,\,x_0)\right) +$$

$$+\left(G(t)\,x(t;\,t_0,\,x_0),\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t;\,t_0,\,x_0)\right) = \left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}x(t;\,t_0,\,x_0),\,x(t;\,t_0,\,x_0)\right) +$$

$$(G(t)\,A(t)\,x(t;\,t_0,\,x_0),\,x(t;\,t_0,\,x_0)) + (G(t)\,X(x(t;\,t_0,\,x_0),\,t),\,x(t;\,t_0,\,x_0)) +$$

$$+ (G(t)\,x(t;\,t_0,\,x_0),\,A(t)\,x(t;\,t_0\,x_0)) + (G(t)\,x(t;\,t_0,\,x_0),\,X(x(t;\,t_0,\,x_0),t) =$$

$$= \left(\frac{\mathrm{d}G(t)}{\mathrm{d}t}x(t;\,t_0,\,x_0),\,x(t;\,t_0,\,x_0)\right) + (G(t)\,A(t)\,x(t;\,t_0,\,x_0),\,x(t;\,t_0,\,x_0) +$$

$$+ (A^*(t)\,G(t)\,x(t;\,t_0,\,x_0),\,x(t;\,t_0,\,x_0)) + (G(t)\,X(x(t;\,t_0,\,x_0),\,t),\,x(t;\,t_0,\,x_0)) +$$

$$+ (G(t)\,x(t;\,t_0,\,x_0),\,X(x(t;\,t_0,\,x_0),\,t)) = (Q(t)x(t;\,t_0,\,x_0),\,x(t;\,t_0,\,x_0)) +$$

$$+ (G(t)\,X(x(t;\,t_0,\,x_0),\,t),\,x(t;\,t_0,\,x_0)) + (G(t)\,x(t;\,t_0,\,x_0),\,X(x(t;\,t_0,\,x_0),\,t)),$$

unde am notat

$$Q(t) = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} + GA + A^*G.$$

Avem

$$G^{-1}(t)\,Q(t) = G^{-1}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} + A + G^{-1}A^*G,$$

deci $q_M$ este cea mai mare valoare proprie a matricii $G^{-1}Q$. Avem

$$(Qx,\,x) \leqslant q_M\,(Gx,\,x)^{*)}.$$

*) Într-adevăr, să considerăm funcţia $(Qx,x)$ dată pe $(Gx,x) = 1$; deoarece $(Gx,x) = 1$ e compactă, există $\lambda_M = \sup\limits_{(Gx,x)=1}(Qx,x)$. Conform teoriei generale a extremelor cu legături, punctele de maxim verifică relaţia $\frac{\partial}{\partial x}\{(Qx,x) - (\lambda\,Gx,x)\} = 0$ deci $(Q - \lambda\,G)\,x = 0$; această ecuaţie are soluţii nenule numai dacă $\det\,(Q\text{-}\lambda G) = 0$. Dar

$$\det\,(Q\text{-}\lambda G) = \det G \det\,(G^{-1}Q\text{-}\lambda E),$$

deci $\lambda$ verifică ecuaţia $\det\,(G^{-1}Q\text{-}\lambda E) = 0$ deci e valoare proprie a matricii $G^{-1}Q$.

De asemenea, se demonstrează imediat inegalitatea

$$(Gx, y) + (Gy, x) \leqslant 2 \sqrt{(Gx, x)(Gy, y)}.$$

Ținînd seama de aceste inegalități rezultă

$$\frac{d\xi}{dt} \leqslant q_M \xi + 2 \sqrt{\xi (GX, X)}.$$

Dar

$$(GX, X) \leqslant \Lambda (X,X) \leqslant \Lambda \beta^2 (x,x) = \frac{\Lambda}{\lambda} \beta^2 \lambda (x, x) \leqslant \frac{\Lambda}{\lambda} \beta^2 (Gx, x).$$

Prin urmare

$$\frac{d\xi}{dt} \leqslant q_M \xi + 2 \xi \beta \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}},$$

deci

$$\frac{d\xi}{dt} \leqslant \left(q_M + 2\beta \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}}\right) \xi.$$

Rezultă

$$\xi (t) \leqslant (Gx_0, x_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \left(q_M + 2\beta \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}}\right) dt}.$$

Pe de altă parte,

$$\xi (t) = (G(t)\, x(t; t_0, x_0), x(t; t_0, x_0)) \geqslant \lambda |x(t; t_0, x_0)|^2.$$

Rezultă

$$\lambda (t) \; | x(t; t_0, x_0) |^2 \leqslant \Lambda (t_0) | x_0 |^2 \, e^{\int_{t_0}^{t} \left(q_M + 2\beta \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}}\right) dt},$$

deci

$$| x(t; t_0 x_0)| \leqslant \sqrt{\frac{\Lambda (t_0)}{\lambda (t)}} \, e^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \left(q_M + 2\beta \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}}\right) dt} \; |x_0|.$$

Dacă $\lambda (t) \geqslant \lambda_0 > 0$ și dacă $\int_{t_0}^{t} \left(q_M + 2\beta \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}}\right) dt \to -\infty$ cînd $t \to \infty$, soluția banală rezultă asimptotic stabilă. Dacă în plus

$$\int_{t_0}^{t} \left(q_M + 2 \beta \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}}\right) dt < - \alpha (t - t_0)$$

stabilitatea este chiar exponențială. Teorema este demonstrată.

Să considerăm un caz particular important. Presupunem că $A$ e

---

Dacă $x_0$ e punctul de maxim, $x_0$ este vector propriu pentru $G^{-1} Q$, deci $(Qx_0,x_0) - \lambda (Gx_0 x_0) = 0$; cum $(Gx_0, x_0) = 1$ rezultă $(Qx_0, x_0) = \lambda$, deci $\lambda_M$ este valoarea proprie a lui $G^{-1} Q$ corespunzătoare lui $x_0$. Cum valoarea $(Qx_0,x_0)$ este maximă, rezultă $\lambda_M = q_M$. De aici rezultă imediat evaluarea scrisă.

constantă și că forma normală Jordan corespunzătoare este diagonală. Fie $C$ matricea care aduce pe $A$ la forma normală Jordan $G = C^*C$.

Atunci $G^{-1} Q = A + G^{-1}A^* G = A + C^{-1} C^{*-1} A^* C^* C$

și

$$C G^{-1} Q C^{-1} = CAC^{-1} + C^{*-1} A^* C^* = CAC^{-1} + (CAC^{-1})^*.$$

Rezultă că valorile proprii ale matricii $CG^{-1} QC^{-1}$ care coincid cu cele ale matricii $G^{-1} Q$ sînt tocmai dublul părților reale ale valorilor proprii ale matricii $A$. Presupunînd că părțile reale ale valorilor proprii ale matricii $A$ sînt negative și notînd cu $-d$ pe cea mai mare dintre ele, condiția din teoremă devine

$$\int_{t_0}^{\infty} \left( - d + \beta \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}} \right) dt = - \infty.$$

Semnificația acestui rezultat este următoarea. Se știe că dacă matricea $A$ are valorile proprii cu părți reale negative, soluția banală a sistemului liniar de primă aproximație este uniform asimptotic stabilă, deci funcționează teorema de stabilitate după prima aproximație. Rezultatul de mai sus permite evaluarea lui $\beta$ astfel încît stabilitatea să se păstreze; de exemplu, presupunînd că $\beta$ este constant, obținem evaluarea $\beta < d \sqrt{\frac{\lambda}{\Lambda}}$.

În sfîrșit, să observăm, că metoda folosită ne-a condus nu numai la o teoremă de stabilitate după prima aproximație ci și la o evaluare a soluțiilor. Alegînd convenabil matricea $G$ se pot obține formule tot mai precise de evaluare a soluțiilor.

PROPOZIȚIA 2. *Considerăm din nou sistemul din propoziția precedentă și presupunem*

$$\int^{\infty} \beta^2(t)\, dt < \infty.$$

*Dacă soluția banală a sistemului*

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\, y$$

*este uniform stabilă, atunci soluția banală a sistemului dat este uniform stabilă. Dacă soluția banală a sistemului*

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\, y$$

*este uniform asimptotic stabilă, atunci soluția banală a sistemului dat este uniform asimptotic stabilă. Aici se presupune că*

$$\int_{t_0}^{t} |A(u)|\, du \leqslant \omega(t - t_0).$$

*Demonstrație.* Vom demonstra această propoziție în două feluri. Prima demonstrație se bazează pe construcția unei funcții Liapunov.

Din ipoteza de stabilitate uniformă rezultă $|C(t, s)| \leqslant M$, deci $|y(t; t_0, x_0)| \leqslant M|x_0|$ pentru toate soluțiile sistemului liniar de primă aproximație. Fie $V(t, x) = \sup\limits_{\sigma \geqslant 0} |y(t+\sigma; t, x)|$.

Avem $V(t, x) \geqslant |x|$, $V(t, x) \leqslant M|x|$. Mai departe

$$||y(t-\sigma; t, x_1)| - |y(t+\sigma; t, x_2)|| \leqslant |y(t+\sigma; t, x_1 - x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|$$

(am folosit *liniaritatea* sistemului de primă aproximație).

Rezultă

$$|y(t+\sigma; t, x_1)| \leqslant |y(t+\sigma; t, x_2)| + M|x_1 - x_2|,$$

deci

$$V(t, x_1) \leqslant V(t, x_2) + M|x_1 - x_2|.$$

La fel

$$V(t, x_2) \leqslant V(t, x_1) + M|x_1 - x_2|$$

deci

$$|V(t, x_1) - V(t, x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|.$$

Funcția

$$V^*(t) = V(t, y(t; t_0, x_0))$$

este monoton descrescătoare (vezi teorema 1.2′).

Avem

$$x(v; t, x_0) = x_0 + \int_t^v \{A(u)\, x(u; t, x_0) + X(x(u; t, x_0), u)\}\, du$$

Pentru $|x_0| < \frac{c}{2}$ rezultă, dacă $t \leqslant v \leqslant t + h$ și $h$ e suficient de mic,

$$|x(v; t, x_0)| \leqslant |x_0| + \int_t^v \{|A(u)|\, |x(u; t, x_0)| + \beta^2(u)\, |x(u; t, x_0)|\}\, du$$

deci

$$|x(v; t, x_0)| \leqslant |x_0|\, e^{\int_t^{t+h} \{|A(u)| + \beta^2(u)\} du}$$

Mai departe

$$x(v; t, x_0) - y(v; t, x_0) = \int_t^v A(u)\, [x(u; t, x_0) - y(u; t, x_0)]\, du +$$

$$+ \int_t^v X(x(u; t, x_0), u)\, du.$$

Rezultă

$$|x(v;t,x_0)-y(v;t,x_0)|\leqslant|x_0|\ e^{\int_t^{t+h}(|A(u)|+\beta^2(u))\,du}\int_t^{t+h}\beta^2(u)\,du+$$
$$+\int_t^v|A(u)|\ |x(u;t,x_0)-y(u;t,x_0)|\,du$$

deci

$$|x(v;t,x_0)-y(v;t,x_0)|\leqslant|x_0|\int_t^{t+h}\beta^2(u)\,du\ e^{\int_t^{t+h}\{2|A(u)|-\beta^2(u)\}\,du}$$

pentru $t\leqslant v\leqslant t+h$.

Ţinînd seama de această evaluare deducem

$$|V[t+h,x(t+h;t,x)]-V[t+h,y(t+h;t,x)]|\leqslant$$
$$\leqslant M\int_t^{t+h}\beta^2(u)\,du\ e^{\int_t^{t+h}\{2|A(u)|+\beta^2(u)\}\,du}$$

deci

$$\limsup_{h\to 0+}\frac{V[t+h,x(t+h,t,x)]-V[t+h,y(t+h;t,x)]}{h}\leqslant M\ \beta^2(t)|x|.$$

De aici, cu ajutorul unui calcul pe care l-am mai făcut (vezi de exemplu teorema 1.7′), rezultă

$$\limsup_{h\to 0+}\frac{V[t+h,x,(t+h;t,x)]-V[t,x]}{h}\leqslant M\beta^2(t)\,|x|\leqslant M\ \beta^2(t)V(t,x).$$

Notînd

$$V^{**}(t)=V[t,x(t,t_0,x_0)],$$

deducem

$$\limsup_{h\to 0+}\frac{V^{**}(t+h)-V^{**}(t)}{h}\leqslant M\ \beta^2(t)\ V^{**}(t)$$

deci

$$V^{**}(t)\leqslant V^{**}(t_0)\ e^{M\int_{t_0}^t\beta^2(u)\,du},$$

sau

$$|x(t;t_0,x_0)|\leqslant V[t,x(t;t_0,x_0)]\leqslant V(t_0,x_0)\,e^{M\int_{t_0}^t\beta^2(u)\,du}\leqslant M\,|x_0|\ e^{M\int_{t_0}^t\beta^2(u)\,du}$$

ceea ce împreună cu $\int^{\infty}\beta^2(u)\,du<K$ atrage $|x(t;t_0,x_0)|\leqslant Me^{MK}\,|x_0|$

şi prima afirmaţie a propoziţiei e demonstrată.

Pentru cea de-a doua afirmaţie, procedînd ca în teorema 1.7, alegem funcţia $(V(t)\,x,x)$ dată de teorema 1.6″ şi notînd

$$V^*(t)=(V(t)\,x(t;t_0\,x_0),x(t;t_0,x_0)),$$

deducem

$$\frac{dV^*}{dt} = -|x(t;t_0,x_0)|^2 + 2(V(t)\,x(t;t_0,x_0),\, X(x(t;t_0,x_0),t) \leqslant$$

$$\leqslant -|x(t;t_0,x_0)|^2 + 2M\beta^2|x(t;t_0,x_0)|^2 \leqslant -\frac{(1-2M\beta^2)}{M}V^*(t)$$

deci

$$\frac{d\ln V^*}{dt} \leqslant -\frac{1}{M} + 2M\beta^2;$$

de aici deducem

$$\ln V^*(t) - \ln V^*(t_0) \leqslant -\frac{1}{M}(t-t_0) + 2M\int_{t_0}^{t}\beta^2(u)\,du$$

deci

$$V^*(t) \leqslant V^*(t_0)\,e^{-\frac{1}{M}(t-t_0)}\,e^{2M\int_{t_0}^{t}\beta^2(u)\,du} \leqslant M\,|x_0|^2 e^{2MK-\frac{1}{M}(t-t_0)}$$

de unde se capătă în definitiv

$$|x(t;t_0,x_0)| \leqslant \sqrt{\frac{M}{\mu}}\,e^{MK}\,e^{-\frac{1}{2M}(t-t_0)}\,|x_0|$$

şi propoziţia e demonstrată.

Cea de-a doua demonstraţie foloseşte formula variaţiei constantelor

$$x(t;t_0,x_0) = C(t;t_0)\,x_0 + \int_{t_0}^{t} C(t;s)\,X(x(s;t_0,x_0),s)\,ds.$$

Rezultă

$$|x(t;t_0,x_0)| \leqslant M\,|x_0| + \int_{t_0}^{t} M\,\beta^2(s)\,|x(s;t_0,x_0)|\,ds.$$

De aici se capătă

$$|x(t;t_0,x_0)| \leqslant M\,|x_0|\,e^{M\int_{t_0}^{t}\beta^2(s)\,ds}$$

şi prima afirmaţie a propoziţiei e demonstrată.

În sfîrşit, dacă soluţia banală a sistemului liniar de primă aproximaţie este uniform asimptotic stabilă deducem

$$|C(t;s)| \leqslant Be^{-\alpha(t-s)}$$

deci

$$|x(t;t_0,x_0)| \leqslant Be^{-\alpha(t-t_0)}\,|x_0| + \int_{t_0}^{t} Be^{-\alpha(t-s)}\,\beta^2(s)\,|x(s;t_0,x_0)|\,ds$$

deci notînd

$$u(t) = |x(t;t_0,x_0)|\,e^{\alpha t}$$

deducem

$$u(t) \leqslant Bu(t_0) + B\int_{t_0}^{t} \beta^3(s)\, u(s)\, ds,$$

deci

$$u(t) \leqslant B\, u(t_0)\, e^{B\int_{t_0}^{t} \beta^2(s)\, ds}$$

de unde deducem

$$|x(t;\, t_0,\, x_0)| \leqslant Be^{-\alpha(t-t_0)}\, |x_0|\, e^{B\int_{t_0}^{t} \beta^2(s) ds} < Be^{KB}\, e^{-\alpha(t-t_0)}\, |x_0|$$

şi propoziţia e complet demonstrată.

PROPOZIŢIA 3. *Considerăm sistemul*

$$\frac{dx}{dt} = X(t,\, x,\, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\, y + Y(t,\, x,\, y),$$

*unde* $|X(t, x, y)| \leqslant K\, |y|^{\beta}$, $\beta > 0$, $|Y(t, x, y)| \leqslant k\, |y|$ *pentru* $|x| \leqslant \alpha_0$, $|y| \leqslant \alpha_0$, $k$ *suficient de mic.*

*Presupunem că soluţia banală a sistemului liniar*

$$\frac{dz}{dt} = A(t)\, z$$

*este uniform asimptotic stabilă. Atunci soluţia banală a sistemului dat este uniform stabilă şi în plus pentru orice soluţie pentru care valorile iniţiale sînt suficient de mici avem*

$$y(t) \to 0, \quad x(t) \to l \text{ pentru } t \to \infty.$$

*Demonstraţie.* Vom da şi pentru această teoremă două demonstraţii, prima bazată pe construcţia unei funcţii Liapunov, iar a doua pe formula variaţiei constantelor. Fie $V(t)$ matricea construită ca în teorema 1.6″ pentru sistemul în $z$. Notînd

$$V^*(t) = (V(t)\, y(t;\, t_0,\, x_0,\, y_0),\; y(t;\, t_0,\, x_0,\, y_0))$$

obţinem ca în teorema 1.7

$$\frac{dV^*}{dt} = -\, |y(t;\, t_0,\, x_0,\, y_0)|^2 +$$

$$+ 2\,(V(t) y(t;\, t_0,\, x_0,\, y_0),\; Y(t,\, x(t;\, t_0,\, x_0,\, y_0),\, y(t;\, t_0,\, x_0,\, y_0)))$$

deci

$$\frac{\mathrm{d}V^*}{\mathrm{d}t} \leqslant -|y(t; t_0, x_0, y_0)|^2 + 2Mk\,|y(t; t_0, x_0, y_0)|^2.$$

Mai departe, ca în teorema 1.7, deducem

$$\frac{\mathrm{d}V^*}{\mathrm{d}t} \leqslant -\frac{1}{2}|y(t; t_0, x_0, y_0)|^2 \leqslant -\frac{1}{2M}V^*(t)$$

deci

$$\mu\,|y(t; t_0, x_0, y_0)|^2 \leqslant V^*(t) \leqslant M\,|y_0|^2\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2M}(t-t_0)}$$

deci

$$|y(t; t_0, x_0, y_0)| \leqslant \sqrt{\frac{M}{\mu}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4M}(t-t_0)}\,|y_0|.$$

Din

$$x(t; t_0, x_0, y_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X[u, x(u; t_0, x_0, y_0), y(u; t_0, x_0, y_0)]\,\mathrm{d}u$$

rezultă

$$|x(t; t_0, x_0, y_0)| \leqslant |x_0| + \int_{t_0}^{t} K\left(\sqrt{\frac{M}{\mu}}\right)^{\beta} \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{4M}(u-t_0)}\,\mathrm{d}u\,|y_0|^{\beta} =$$

$$= |x_0| + K\left(\sqrt{\frac{M}{\mu}}\right)^{\beta}\int_{0}^{t-t_0} \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{4M}u}\,\mathrm{d}u\,|y_0|^{\beta} \leqslant |x_0| + K\left(\sqrt{\frac{M}{\mu}}\right)^{\beta}\frac{4M}{\beta}|y_0|^{\beta}$$

ceea ce arată stabilitatea uniformă.

În plus, $\int_{t_0}^{t} X[u, x(u; t_0, x_0, y_0), y(u; t_0, x_0, y_0)]\,\mathrm{d}u$ rezultă convergentă, deci $\lim\limits_{t\to\infty} x(t; t_0, x_0, y_0)$ există. Propoziția este demonstrată.

Trecem la cea de-a doua demonstrație. Fie $C(t, s)$ matricea fundamentală de soluții pentru sistemul în $z$; avem

$$|C(t, s)| \leqslant B\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}$$

Rezultă

$$y(t; t_0, x_0, y_0) = C(t; t_0)\,y_0 +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} C(t, s)\; Y(s; x(s; t_0, x_0, y_0), y(s; t_0, x_0, y_0))\,\mathrm{d}s,$$

deci

$$|y(t; t_0, x_0, y_0)| \leqslant B\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}\,|y_0| + Bk\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\,|y(s; t_0, x_0, y_0)|\,\mathrm{d}s.$$

Notînd

$$u(t) = e^{\alpha t} \,|\, y(t; t_0, x_0, y_0) \,|,$$

obținem

$$u(t) \leqslant Bu(t_0) + Bk\int_{t_0}^{t} u(s)\,ds,$$

deci

$$u(t) \leqslant Bu(t_0)\, e^{Bk(t-t_0)}.$$

Rezultă

$$|y(t; t_0, x_0, y_0)| \leqslant Be^{-\alpha(t-t_0)}\, e^{Bk(t-t_0)}\, |y_0|.$$

Dacă avem $k < \frac{\alpha}{B}$, rezultă evaluarea exponențială pentru $|y(t; t_0, x_0, y_0)|$ și demonstrația continuă ca mai sus.

Cu ajutorul propoziției 3 vom stabili un criteriu de stabilitate de tip special relativ la sistemele de ordinul al doilea.

PROPOZIȚIA 4. *Considerăm sistemul de ordinul al doilea* $\frac{dy}{dt} = Y(y, t)$, *unde* $Y$ *depinde analitic de* $y$ *și are dezvoltarea în serie cu coeficienți mărginiți pentru* $t \geqslant 0$. *Fie* $\varphi(t, h)$ *o familie de soluții mărginite pentru* $t \geqslant 0$ *ale sistemului depinzînd analitic de* $h$ *și cu proprietatea că funcțiile* $\varphi^{(k)}_{h^k}(t, 0)$ *sînt mărginite pentru* $t \geqslant 0$. *Dacă*

$$|\varphi'_h(t, 0)| \geqslant \gamma > 0$$

*și*

$\int_{t_0}^{t} \left\{ \mathrm{Sp}\, \frac{\partial Y}{\partial y}[\varphi(t, 0), t] \right\} dt \leqslant -\nu(t - t_0) + \chi(t)$, *unde* $\chi(t)$ *este o funcție mărginită, atunci soluția* $y = \varphi(t, 0)$ *este uniform stabilă.*

*Observație.* Dacă $Y$ nu depinde explicit de $t$ și sistemul admite o soluție mărginită $y = \varphi(t)$, atunci există și soluțiile $\varphi(t + h)$; în acest caz $\varphi'_h(t, 0) = \dot{\varphi}(t)$ și în general

$$\varphi^{(k)}_{h^k}(t, 0) = \frac{d^k}{dt^k}\varphi(t),$$

deci condiția ca aceste derivate să fie mărginite este verificată automat. Pentru cazul cînd $Y$ nu depinde explicit de $t$ și soluția $\varphi(t)$ este periodică, rezultatul a fost stabilit de Poincaré.

*Demonstrație.* Fie $\varphi(t, 0) = \varphi(t)$. Facem schimbarea de variabile $x = y - \varphi(t)$ și obținem

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + X(t, x),$$

unde

$$A(t) = \frac{\partial Y}{\partial y}(\varphi(t), t)$$

iar dezvoltarea în serie în raport cu $x$ a lui $X(t, x)$ începe cu termeni

de grad mai mare sau egal cu doi. Atît $A(t)$, cît și $X(t, x)$ sînt mărginite ca funcții de $t$ pentru $t \geqslant 0$. Sistemul în $x$ admite familia de soluții

$$x = \varphi(t, h) - \varphi(t, 0) = h\, \varphi'_h(t, 0) + \frac{1}{2} h^2\, \varphi''_{h^2}(t, 0) + \ldots$$

Înlocuind în sistem se constată că $\varphi'_h(t, 0)$ este o soluție a sistemului liniar $\frac{dz}{dt} = A(t)\, z$. Conform ipotezelor această soluție este mărginită. Vom nota în cele ce urmează cu $\psi_1$, $\psi_2$ componentele vectorului $\varphi'_h(t, 0)$. Avem prin ipoteză $\psi_1^2 + \psi_2^2 \geqslant \gamma^2 > 0$. Fie $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\psi_2 \\ \psi_2 & \psi_1 \end{pmatrix}$. Rezultă $\det \Psi = \psi_1^2 + \psi_2^2$,

$$\Psi^{-1} = \frac{1}{\psi_1^2 + \psi_2^2} \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ -\psi_2 & \psi_1 \end{pmatrix}, \quad \dot{\Psi} = \begin{pmatrix} \dot{\psi}_1 & -\dot{\psi}_2 \\ \dot{\psi}_2 & \dot{\psi}_1 \end{pmatrix}$$

și se vede că pe baza ipotezelor teoremei, $\Psi$, $\Psi^{-1}$ $\dot{\Psi}$ sînt mărginite. Facem schimbarea de variabile $x = \Psi x^*$. Sistemul devine

$$\frac{dx^*}{dt} = \left( \Psi^{-1} A \Psi - \Psi^{-1} \frac{d\Psi}{dt} \right) x^* + \Psi^{-1} X(t, \Psi x^*).$$

Sistemul liniar

$$\frac{dz}{dt} = A(t)\, z$$

devine prin schimbarea de variabile $z = \Psi z^*$,

$$\frac{dz^*}{dt} = \left( \Psi^{-1} A \Psi - \Psi^{-1} \frac{d\Psi}{dt} \right) z^*.$$

Acest sistem va admite soluția $z_1^* = 1$, $z_2^* = 0$ care corespunde soluției $z_1 = \psi_1$, $z_2 = \psi_2$.

De aici rezultă că matricea $\Psi^{-1} A \Psi - \Psi^{-1} \frac{d\Psi}{dt}$ are prima coloană nulă; fie $a(t)$, $b(t)$ elementele celei de-a doua coloane.

Avem

$$b(t) = \mathrm{Sp} \left[ \Psi^{-1} A \Psi - \Psi^{-1} \frac{d\Psi}{dt} \right] = \mathrm{Sp}\, \Psi^{-1} A \Psi - \mathrm{Sp}\, \Psi^{-1} \frac{d\Psi}{dt} =$$

$$= \mathrm{Sp}\, A - \mathrm{Sp}\, \Psi^{-1} \frac{d\Psi}{dt} = \mathrm{Sp}\, A - \frac{d}{dt} \ln \det \Psi = \mathrm{Sp}\, A - \frac{d}{dt} \ln(\psi_1^2 + \psi_2^2).$$

Sistemul în $x^*$ are deci forma

$$\frac{dx_1^*}{dt} = a(t)x_2^* + X_1^*(t, x_1^*, x_2^*),$$

$$\frac{dx_2^*}{dt} = b(t)x_2^* + X_2^*(t, x_1^*, x_2^*),$$

unde $X^*$ are aceleaşi proprietăţi ca şi $X$.

Din $x^* = \Psi^{-1} x$ rezultă că acest sistem admite familia de soluţii mărginite

$$x^* = h\Psi^{-1} \varphi_h'(t, 0) + \frac{1}{2}h^2 \Psi^{-1} \varphi_{h^2}''(t, 0) + \ldots$$

Ţinînd seama de faptul că $\varphi_h'(t, 0)$ este prima coloană a matricii $\Psi$ rezultă că $\Psi^{-1} \varphi_h'(t, 0)$ are componentele 1 şi 0, deci

$$x_1^* = h + h^2 \alpha_2(t) + \ldots,$$

$$x_2^* = h^2 \beta_2(t) + \ldots,$$

unde conform ipotezelor $\alpha_k$ şi $\beta_k$ sînt funcţii mărginite de $t$ pentru $t \geqslant 0$. Efectuăm o nouă schimbare de variabile

$$x_1^* = u + u^2 \alpha_2(t) + \ldots$$

$$x_2^* = v + u^2 \beta_2(t) + \ldots$$

În vecinătatea punctului $x_1^* = x_2^* = 0$ se capătă

$$u = x_1^* - x_1^{*2} \alpha_2(t) + \ldots$$

$$v = x_2^* - x_1^{*2} \beta_2(t) + \ldots$$

şi proprietăţile de stabilitate pentru sistemul în $(u, v)$ conduc la proprietăţi de stabilitate pentru sistemul în $x^*$. După ultima transformare sistemul devine

$$\frac{du}{dt} = a(t)v + U(t, u, v),$$

$$\frac{dv}{dt} = b(t)v + V(t, u, v),$$

unde $U$ şi $V$ sînt mărginite ca funcţii de $t$ pentru $t \geqslant 0$ şi au dezvoltări în serie după puterile lui $u$ şi $v$ începînd cu termenii de grad $\geqslant 2$. Acest sistem admite familia de soluţii $u = h, v = 0$, ceea ce impune ca $U(t, u, 0) \equiv 0$ $V(t, u, 0) \equiv 0$. De aici rezultă că pentru $|u| \leqslant u_0$, $|v| \leqslant v_0$ avem $|U(t, u, v)| < \alpha |v|$, $|V(t, u, v)| \leqslant \beta |v|$, unde $\alpha$ şi $\beta$ pot fi aleşi oricît de mici, cu condiţia ca $u_0$ şi $v_0$ să fie suficient de mici.

Pe de altă parte, din

$$b(t) = \mathrm{Sp}\, A - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln(\psi_1^2 + \psi_2^2)$$

rezultă

$$\int_{t_0}^{t} b(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} (\mathrm{Sp}A)\,\mathrm{d}s - \ln\frac{\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t)}{\psi_1^2(t_0) + \psi_2^2(t_0)}.$$

Soluția generală a ecuației $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = b(t)\,w$

se scrie

$$w(t) = w(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} b(s)\,\mathrm{d}s} = w(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{Sp}\, A\,\mathrm{d}s}\, e^{-\ln\frac{\psi_1^2(t)+\psi_2^2(t)}{\psi_1^2(t_0)+\psi_2^2(t_0)}} =$$

$$= w(t_0)\,\frac{\psi_1^2(t_0)+\psi_2^2(t_0)}{\psi_1^2(t)+\psi_2^2(t)}\, e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{Sp}\, A\,\mathrm{d}s}.$$

Conform ipotezelor din enunț, $|w(t)| \leqslant (w(t_0)| \cdot \frac{|\varphi_h'(t_0, 0)|^2}{\gamma^2} e^{-\nu(t-t_0)} e^{\chi(t)}$,
ceea ce arată că soluția banală a ecuației în $w$ este uniform asimptotic stabilă. Putem aplica propoziția 3, deci soluția banală a sistemului în $(u, v)$ este uniform stabilă, ceea ce atrage stabilitatea uniformă a soluției banale pentru sistemul în $x^*$, deci pentru sistemul în $x$, deci stabilitatea uniformă a soluției $\varphi(t)$. În plus pentru $u(t_0)$, $v(t_0)$ suficient de mici avem $u(t) \to h$, $v(t) \to 0$, deci $x_1^*(t) - (h + h^2 \alpha_2(t) + \ldots) \to 0$, $x_2^*(t) - (h^2 \beta_2(t) + \ldots) \to 0$ deci soluțiile $x(t)$ tind către una din soluțiile $\varphi(t, h) - \varphi(t)$ deci pentru orice soluție $y(t)$ din vecinătatea lui $\varphi(t)$ există $h$ astfel ca

$$\lim_{t\to\infty} (y(t) - \varphi(t, h)) = 0.$$

## § 8. STABILITATEA ÎN RAPORT CU PERTURBAȚII PERMANENTE

În cele ce urmează vom stabili o serie de teoreme care pun în evidență faptul că dacă o soluție este uniform asimptotic stabilă ea prezintă anumite proprietăți de stabilitate și în raport cu diferite clase de perturbații permanente.

Ca și pînă acum, va fi vorba numai despre cazul stabilității soluției banale, deoarece prin procedeul cunoscut, studiul stabilității oricărei soluții se reduce la acesta.

DEFINIȚIE. *Soluția banală a sistemului* (1) *se numește stabilă în raport cu perturbații permanente dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta_1(\varepsilon)$ *și* $\delta_2(\varepsilon)$ *cu proprietatea ca oricare ar fi funcția* $R(t, x)$ *cu* $|R(t, x)| < \delta_2$ *pentru*

$|x| \leqslant \varepsilon$, $t \geqslant t_0$ *şi oricare ar fi* $y_0$ *cu* $|y_0| < \delta_1$, *soluţia* $y(t;\, t_0,\, y_0)$ *a sistemului*

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) + R(t, y) \tag{8}$$

*verifică inegalitatea* $|y(t;\, t_0,\, y_0)| < \varepsilon$ *pentru* $t \geqslant t_0$.

TEOREMA 1.8. *Dacă soluţia banală a sistemului* (1) *este uniform asimptotic stabilă, atunci ea este stabilă şi în raport cu perturbaţii permanente.*

Se presupune că $f$ îndeplineşte condiţia $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqslant \leqslant L(t)\,|x_1 - x_2|$ pentru $|x_1| \leqslant \alpha_0$, $|x_2| \leqslant \alpha_0$ şi $\left|\int_t^{t+u} L(s)\,ds\right| < K\,|u|$.

*Demonstraţie.* Conform teoremei 1.6′, din stabilitatea asimptotică uniformă a sistemului (1) rezultă că există o funcţie $V(t, x)$ cu proprietăţile :

$$a(|x|) \leqslant V(t, x) \leqslant b(|x|),$$

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{V[t+h,\, x(t+h;\, t_0,\, x_0)] - V[t,\, x(t;\, t_0,\, x_0)]}{h} \leqslant -c(|x(t;\, t_0,\, x_0)|),$$

$|V(t, x_1) - V(t, x_2)| \leqslant M\,|x_1 - x_2|$ pentru $|x_1| \leqslant \delta(\delta_0)$, $|x_2| \leqslant \delta(\delta_0)$, unde $\delta(\varepsilon)$ şi $\delta_0$ apar în definiţia stabilităţii asimptotice uniforme. Fie $y_0$ cu $|y_0| < \frac{1}{2}\alpha_0$ ; considerăm soluţia $y(v;\, t,\, y_0)$ a sistemului (8). Din

$$y(v;\, t,\, y_0) = y_0 + \int_t^v \{f(u,\, y(u;\, t,\, y_0)) + R(u,\, y(u;\, t,\, y_0))\}\,du,$$

rezultă

$$|y(v;\, t,\, y_0)| \leqslant |y_0| + \int_t^v L(u)\,|y(u;\, t,\, y_0)|\,du + h\eta,$$

unde $\eta = \sup\limits_{t \geqslant 0,\ |y| \leqslant \alpha_0} |R(t, y)|$. Inegalitatea are loc pentru $t \leqslant v \leqslant t + h$ astfel încît $|y(u;\, t,\, y_0)| \leqslant \alpha_0$. Rezultă

$$|y(v;\, t,\, y_0)| \leqslant (|y_0| + h\eta)\,e^{Kh},$$

deci pentru $h$ suficient de mic vom avea în orice caz $|y(u;\, t,\, y_0)| \leqslant \alpha_0$ şi inegalitatea este adevărată pentru orice $t \leqslant v \leqslant t + h$ cu $h$ suficient de mic.

Fie mai departe $x(v;\, t,\, y_0)$ soluţia sistemului (1). Avem

$$y(v;\, t,\, y_0) - x(v;\, t,\, y_0) = \int_t^v \{f(u,\, y(u;\, t,\, y_0)) - f(u,\, x(u;\, t,\, y_0))\}\,du + \\ + \int_t^v R(u,\, y(u;\, t,\, y_0))\,du \cdot$$

Fie $\varepsilon > 0$, $l < \min\left\{a(\varepsilon), a\left(\frac{1}{2}\alpha_0\right)\right\}$, $\delta_1(\varepsilon) = b^{-1}(l)$, $\delta_2(\varepsilon) = \frac{c[b^{-1}(l)]}{M}$.

Alegem $|y_0| < \delta_1\left(\text{vom avea în orice caz } |y_0| < \frac{1}{2}\alpha_0\right)$.

Dacă $R(t, x)$ este astfel încît $|R(t, x)| < \delta_2$ pentru $|x| \leqslant \varepsilon$, $t \geqslant t_0$, vom avea $\eta_1 = \sup\limits_{t\geqslant 0, |y| \leqslant \varepsilon} |R(t, y)| < \delta_2$. Ca mai sus se vede că dacă $|y_0| < \delta_1$, atunci pentru $h$ suficient de mic vom avea $|y(u; t, y_0)| < \varepsilon$ pentru $t \leqslant u \leqslant t + h$.

Rezultă că putem scrie evaluarea

$$|y(v; t, y_0) - x(v; t, y_0)| \leqslant h\eta_1 + \int_t^v L(u)\,|y(u; t, y_0) - x(u; t, y_0)|\,du$$

de unde

$$|y(v; t, y_0) - x(v; t, y_0)| \leqslant h\eta_1 e^{Kh},$$

valabilă în orice caz pentru $h$ suficient de mic. Pe de altă parte, avem

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V[t+h, y(t+h; t, y)] - V[t, y]}{h} \leqslant \limsup_{h\to 0+} \frac{V[t+h, x(t+h; t, y)] - V[t, y]}{h} +$$

$$+ \limsup_{h\to 0+} \frac{V[t+h, y(t+h; t, y)] - V[t+h, x(t+h; t, y)]}{h}.$$

Dar

$$|V(t+h, y(t+h; t, y)] - V[t+h, x(t+h; t, y)] <$$
$$< M\,|y(t+h; t, y) - x(t+h; t, y)|$$

dacă

$$|x(t+h; t, y)| < \delta(\delta_0), \; |y(t+h; t, y)| < \delta(\delta_0).$$

Dacă

$$|y| < \min\left\{\frac{1}{2}\delta(\delta_0), \frac{1}{2}\alpha_0, \varepsilon\right\},$$

se vede ca mai sus că pentru $h$ suficient de mic are loc evaluarea

$$|y(t+h; t, y) - x(t+h; t, y)| < h\,\eta_1 e^{Kh},$$

deci

$$|V[t+h, y(t+h; t, y)] - V[t+h, x(t+h; t, y)]| < M\,h\,\eta_1 e^{Kh}$$

De aici rezultă

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V[t+h, y(t+h; t, y)] - V[t+h, x(t+h; t, y)]}{h} \leqslant M\,\eta_1.$$

Deducem

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V[t+h, y(t+h; t, y)] - V[t, y]}{h} \leqslant -c(|y|) + M\,\eta_1 <$$

$$< -c(|y|) + M\delta_2 = -c(|y|) + c[b^{-1}(l)]$$

dacă $|y| < \varepsilon$ cu $\varepsilon$ suficient de mic.

Putem acum demonstra că $|y(t; t_0, y_0)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0$.

Dacă proprietatea nu are loc există $t_1 > t_0$ astfel ca $|y(t_1; t_0\ y_0)| \geqslant \varepsilon$; există atunci $t_0 < t_2 \leqslant t_1$ astfel ca $|y(t_2; t_0, y_0)| = \varepsilon$ şi $|y(t; t_0, y_0)| < \varepsilon$ pentru $t_0 \leqslant t < t_2$. Fie $V^*(t) = V[t, y(t; t_0, y_0)]$. Avem

$$V^*(t_2) = V[t_2, y(t_2; t_0, y_0)] \geqslant a(|y(t_2; t_0, y_0)|) = a(\varepsilon) > l,$$

$$V^*(t_0) = V(t_0, y_0) \leqslant b(|y_0|) < b(\delta_1) = b[b^{-1}(l)] = l.$$

Rezultă că există $t_0 < t_3 < t_2$ astfel ca $V^*(t_3) = l$, $V^*(t) > l$ pentru $t_3 < t \leqslant t_2$. Avem

$$a(|y(t_3; t_0, y_0)|) \leqslant V[t_3, y(t_3; t_0, y_0)] = V^*(t_3) = l \leqslant b[|y(t_3; t_0, y_0)|].$$

Rezultă

$$b^{-1}(l) \leqslant |y(t_3; t_0, y_0)| \leqslant a^{-1}(l) < \varepsilon.$$

Putem deci scrie

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{V[t_3+h, y(t_3+h; t_3, y(t_3; t_0, y_0))] - V[t_3, y(t_3; t_0, y_0)]}{h} =$$

$$= \limsup_{h \to 0+} \frac{V^*(t_3+h) - V^*(t_3)}{h} < -c(|y(t_3; t_0, y_0)|) + c[b^{-1}(l)] <$$

$$< -c[b^{-1}(l)] + c[b^{-1}(l)] = 0$$

deci $V^*(t) < V^*(t_3) = l$ pentru $t > t_3$ ceea ce este contradictoriu. Teorema a fost astfel complet demonstrată.

Vom da acum unele aplicaţii ale acestei teoreme.

*Aplicaţii.* 1° Să presupunem că sistemul (1) conţine un număr de parametri; vom nota cu $\alpha$ un punct în spaţiul parametrilor.

Sistemul (1) se scrie

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x; \alpha).$$

Mulţimea punctelor pentru care soluţia banală este uniform asimptotic stabilă formează în spaţiul parametrilor domeniul de stabilitate al sistemului; fie $G$ acest domeniu. Considerăm un punct $\alpha_0 \in \operatorname{fr} G$; *punctul se va numi punct nepericulos al frontierei domeniului de stabilitate dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta_1(\varepsilon) > 0$ *şi* $\delta_2(\varepsilon) > 0$ *cu proprietatea că dacă* $|x_0| < \delta_1(\varepsilon)$ *şi* $\rho(\alpha, \alpha_0) < \delta_2(\varepsilon)$, *atunci* $|x(t; t_0, x_0; \alpha)| < \varepsilon$ *pentru* $t \geqslant t_0$. Am notat aici cu $\rho(\alpha, \alpha_0)$ distanţa dintre $\alpha$ şi $\alpha_0$ în spaţiul parametrilor.

Semnificaţia acestei definiţii este următoarea. Dacă $\alpha_0$ este un punct al frontierei domeniului de stabilitate, oricît de aproape de el se află puncte din afara acestui domeniu, deci puncte $\alpha$ pentru care soluţia banală încetează să mai fie stabilă; faptul că $\alpha_0$ este un punct nepericulos al frontierei înseamnă că dacă $\alpha$ este destul de apropiat de $\alpha_0$, chiar dacă se află în

afara domeniului de stabilitate, soluţia $x(t;\ t_0,\ x_0,\ \alpha)$ continuă să rămînă apropiată de soluţia banală, deci se păstrează anumite proprietăţi de stabilitate, suficiente pentru nevoile practice. Rezultă de aici că punctele nepericuloase ale frontierei domeniului de stabilitate au proprietatea că ne putem apropia oricît de mult de ele fără să riscăm ca erori sau perturbaţii mici să provoace pierderea stabilităţii. O consecinţă imediată a teoremei 1.8 este următoarea:

*Dacă soluţia banală a sistemului*

$$\frac{dx}{dt} = f(t;\ x;\ \alpha_0)$$

*este uniform asimptotic stabilă, punctul* $\alpha_0$ *este un punct nepericulos al frontierei domeniului de stabilitate.*

Într-adevăr, sistemul

$$\frac{dx}{dt} = f(t,\ x;\ \alpha)$$

se poate scrie

$$\frac{dx}{dt} = f(t,\ x;\ \alpha_0) + \{f(t,\ x;\ \alpha) - f(t,\ x;\ \alpha_0)\}.$$

Punînd

$$R(t,\ x) = f(t,\ x;\ \alpha) - f(t,\ x;\ \alpha_0),$$

rezultă că dacă presupunem că $f$ este continuă în raport cu $\alpha$, uniform în raport cu $t$, $x$, atunci pentru $\delta_3(\varepsilon) > 0$ dat există $\delta_2(\varepsilon) > 0$ astfel ca $\rho(\alpha_1,\ \alpha_0) < \delta_2$, $|x| \leqslant \varepsilon$ să implice $|R(t,\ x)| < \delta_3(\varepsilon)$. Soluţia banală a sistemului

$$\frac{dx}{dt} = f(t;\ x;\ \alpha_0)$$

fiind uniform asimptotic stabilă, ea rezultă stabilă în raport cu perturbaţii permanente, deci există $\delta_1(\varepsilon)$ şi $\delta_3(\varepsilon)$ astfel ca $|x_0| < \delta_1(\varepsilon)$ şi $|R(t,\ x)| < \delta_3(\varepsilon)$ pentru $|x| < \varepsilon$ să implice $|x(t;\ t_0,\ x_0)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0$. Dar $\rho(\alpha,\ \alpha_0) < \delta_2(\varepsilon)$ implică $|R(t,\ x)| < \delta_3(\varepsilon)$, deci, dacă $|x_0| < \delta_1(\varepsilon)$ şi $\rho(\alpha,\ \alpha_0) < \delta_2(\varepsilon)$ rezultă $|x(t;\ t_0,\ x_0;\ \alpha)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0$, ceea ce arată că $\alpha_0$ este un punct nepericulos al frontierei.

Să observăm că din cele de mai sus decurge importanţa studierii stabilităţii şi în punctele frontierei domeniului de stabilitate. Acest studiu este de obicei mult mai dificil decît pentru punctele interioare ale domeniului de stabilitate.

2° *Considerăm sistemul*

$$\frac{dx}{dt} = X(t,\ x,\ y), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(t,\ x,\ y), \tag{9}$$

*unde $x$ şi $y$ sînt vectori. Presupunem $X(t, 0, 0) = 0$, $Y(t, 0, 0) = 0$ şi că soluţia banală a sistemului (9) este stabilă în raport cu componentele $x$; aceasta înseamnă că există $\delta_1(\varepsilon)$ astfel ca $|x_0| + |y_0| < \delta_1$ să implice $|x(t; t_0, x_0, y_0)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0$.*

*Presupunem în plus că soluţia banală a sistemului ajutător*

$$\frac{dz}{dt} = Y(t, 0, z)$$

*este uniform asimptotic stabilă.*

*În aceste condiţii, soluţia banală a sistemului (9) rezultă uniform stabilă.*

*Demonstraţie.* Sistemul

$$\frac{dy}{dt} = Y(t, x, y)$$

se poate scrie sub forma

$$\frac{dy}{dt} = Y(t, 0, y) + \{Y(t, x, y) - Y(t, 0, y)\}.$$

Prin ipoteză, soluţia banală a sistemului ajutător este uniform asimptotic stabilă, deci, pe baza teoremei 1.8, este stabilă în raport cu perturbaţii permanente. Rezultă că există $\delta_2(\varepsilon)$ şi $\delta_3(\varepsilon)$ astfel că din $|y_0| < \delta_2$ şi $|Y(t, x, y) - Y(t, 0, y)| < \delta_3(\varepsilon)$ pentru $|y| < \varepsilon$, rezultă $|y(t; t_0, x_0, y_0)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0$. Deoarece $Y$ este presupusă continuă în $x$, rezultă că există $\delta_4(\varepsilon)$ astfel ca $|x| < \delta_4$ să implice $|Y(t, x, y) - Y(t, 0, y)| < \delta_3(\varepsilon)$ pentru $t \geqslant 0$, $|y| < \varepsilon$. Pe de altă parte, dacă $|x_0| + |y_0| < \delta_1[\delta_4(\varepsilon)]$, rezultă $|x(t; t_0, x_0, y_0)| < \delta_4(\varepsilon)$.

Fie $\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_1[\delta_4(\varepsilon)]\}$. Atunci $|x_0| + |y_0| < \delta(\varepsilon)$ implică pe de o parte

$$|x(t; t_0, x_0, y_0)| < \delta_4(\varepsilon) < \varepsilon,$$

iar pe de alta

$$|Y(t, x(t; t_0, x_0, y_0), y) - Y(t, 0, y)| < \delta_3(\varepsilon) \text{ pentru } |y| < \varepsilon,$$

deci

$$|y(t; t_0, x_0, y_0)| < \varepsilon \text{ pentru } t \geqslant t_0.$$

Propoziţia e demonstrată.

Un exemplu de aplicare a acestei propoziţii a fost dat de T. Hacker în studiul stabilităţii avionului. În cazul cînd sistemul (9) reprezintă sistemul mişcării perturbate pentru un avion, prin natura lucrurilor o parte din componente pot fi controlate de către pilot. Considerînd că acestea sînt componentele notate cu $x$ şi că sistemul (9) conţine în el şi acţiunea pilotului, controlul pilotului se va traduce prin faptul că soluţia banală a sistemului (9) este stabilă în raport cu componentele $x$. Admiţînd, ceea ce este firesc, că acţiunea pilotului e nulă cînd componentele $x$ sînt nule (adică admiţînd că pilotul nu acţionează atunci cînd nu apar perturbaţii), rezultă că sistemul ajutător nu depinde de acţiunea pilotului, ci numai de parametrii constructivi ai avionului. Alegînd aceşti parametri în aşa fel încît soluţia banală a sistemului ajutător să fie uni-

form asimptotic stabilă, acţiunea pilotului asupra componentelor controlabile va fi suficientă pentru a asigura stabilitatea mişcării avionului.

*Să presupunem acum că soluţia banală a sistemului (9) este uniform asimptotic stabilă în raport cu componentele $x$ şi că soluţia banală a sistemului ajutător este şi ea uniform asimptotic stabilă. Atunci soluţia banală a sistemului (9) este uniform asimptotic stabilă.*

*Demonstraţie.* Deoarece soluţia banală a sistemului (9) este uniform asimptotic stabilă în raport cu componentele $x$, există $\delta_0$ şi $T(\varepsilon)$ astfel ca $|x_0| + |y_0| < \delta_0$ şi $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$ să implice $|x(t; t_0, x_0, y_0)| < \varepsilon$. Să notăm $R(t, y) = Y(t, x(t; t_0, x_0, y_0), y) - Y(t, 0, y)$.

Fie $\alpha(\varepsilon) < \delta(\varepsilon)$ cu proprietatea că $|x| < \alpha(\varepsilon), |y| < \varepsilon(\delta_0)$ implică $|Y(t, x, y) - Y(t, 0, y)| < \dfrac{\gamma(\varepsilon)}{2M}$, unde $M$ este constanta Lipschitz a funcţiei Liapunov construită pentru sistemul ajutător, iar $\gamma(\varepsilon) = c[\delta(\varepsilon)]$. Fie $T_0(\varepsilon)$ astfel încît $t \geqslant t_0 + T_0(\varepsilon)$ să implice $|x(t; t_0, x_0, y_0)| < \alpha(\varepsilon)$. Fie $b_0 = b(\delta_0)$ şi $c_1$ astfel ca

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{V[t+h, y(t+h; t_0, x_0, y_0)] - V[t, y(t; t_0, x_0, y_0)]}{h} \leqslant c_1$$

pentru $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T_0$ şi $|x_0| + |y_0| < \delta_0$. Existenţa lui $c_1$ rezultă din faptul că, la fel ca în teorema de stabilitate în raport cu perturbaţii permanente, avem

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{V[t+h, y(t+h; t_0, x_0, y_0)] - V[t, y(t; t_0, x_0, y_0)]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant -c(|y(t; t_0, x_0, y_0)|) + M\eta,$$

unde $\eta > |R(t, y)|$. Or, $|x_0| + |y_0| < \delta_0$ implică

$$|y(t; t_0, x_0, y_0)| < \varepsilon(\delta_0), \quad |x(t; t_0, x_0, y_0)| < \varepsilon(\delta_0),$$

ceea ce arată că $\eta$ va depinde numai de $\delta_0$ şi nu de $t_0$, deci se poate lua $c_1 = M\eta$.

$$\text{Fie } T_1(\varepsilon) = \frac{2(b_0 + c_1 T_0)}{\gamma(\varepsilon)} \text{ şi } T(\varepsilon) = T_0(\varepsilon) + T_1(\varepsilon).$$

În $[t_0 + T_0, t_0 + T]$ există $t'$ astfel ca $|y(t'; t_0, x_0, y_0)| < \delta(\varepsilon)$. Dacă $t'$ n-ar exista, atunci am avea în tot intervalul

$$|y(t; t_0, x_0, y_0)| \geqslant \delta(\varepsilon) \quad \text{deci}$$

$$-c(|y(t; t_0, x_0, y_0)|) < -c(\delta(\varepsilon)) = -\gamma(\varepsilon);$$

rezultă

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{V[t+h, y(t+h; t_0, x_0, y_0)] - V[t, y(t; t_0, x_0, y_0)]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant -\gamma(\varepsilon) + M\frac{\gamma(\varepsilon)}{2M} = -\frac{\gamma(\varepsilon)}{2}$$

căci pentru $t \geqslant t_0 + T_0$ avem $| x(t; t_0, x_0, y_0) | < \alpha(\varepsilon)$, deci $| R(t, y) | < \dfrac{\gamma(\varepsilon)}{2M}$.

Notînd

$$V^*(t) = V[t, y(t; t_0, x_0, y_0)]$$

rezultă

$$V^*(t_0 + T) - V^*(t_0) = V^*(t_0 + T) - V^*(t_0 + T_0) + V^*(t_0 + T_0) - $$
$$- V^*(t_0) < -\frac{\gamma}{2} T_1 + c_1 T_0,$$

deci

$$V^*(t_0 + T) \leqslant b(\delta_0) - \frac{\gamma}{2} T_1 + c_1 T_0 = 0,$$

ceea ce este contradictoriu.

Rezultă că există $t' \in [t_0 + T_0, t_0 + T]$ astfel ca $| y(t'; t_0, x_0, y_0) | < \delta(\varepsilon)$ deci $|y(t; t_0, x_0, y_0)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$. Cu aceasta demonstraţia e terminată.

O variantă a noţiunii de stabilitate în raport cu perturbaţii permanente se obţine dacă în loc să cerem ca perturbaţiile permanente să fie mici tot timpul, le impunem numai cererea de a fi mici în medie. Sînt astfel luate în consideraţie clase mai largi de perturbaţii permanente, deci obţinem o proprietate de stabilitate mai puternică.

DEFINIŢIE. *Soluţia banală a sistemului* (1) *se numeşte stabilă în raport cu perturbaţii permanente mărginite în medie dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *şi* $T > 0$ *există* $\delta > 0$ *şi* $\eta > 0$ *astfel încît oricare ar fi funcţia* $R(t, y)$ *cu* $| R(t, y)| \leqslant \varphi(t)$ *pentru* $| y | \leqslant \varepsilon$ *şi* $\int_t^{t+T} \varphi(s)\, ds < \eta$ *şi oricare ar fi* $y_0$ *cu* $| y_0 | < \delta$, *să rezulte* $| y(t; t_0, y_0)| < \varepsilon$ *pentru* $t \geqslant t_0$, *unde* $y(t; t_0, y_0)$ *este soluţia sistemului* (8).

TEOREMA 1.8′. *Dacă soluţia banală a sistemului* (1) *este uniform asimptotic stabilă, atunci ea este stabilă în raport cu perturbaţii permanente mărginite în medie. Sînt presupuse îndeplinite aceleaşi condiţii ca în teorema* 1.8.

*Demonstraţie.* Fie $V(t, x)$ ca în demonstraţia teoremei 1.8. Considerăm o soluţie $y(t; t_0, y_0)$ a sistemului (8), $\tau \in [t_0, t]$ şi soluţia $x(t; \tau, y(\tau; t_0, y_0))$ a sistemului (1). Vom avea

$$V[\tau + h, y(\tau + h; t_0, y_0)] - V[\tau + h, x(\tau + h; \tau, y(\tau; t_0, y_0))] \leqslant$$
$$\leqslant M | y(\tau + h; t_0, y_0) - x(\tau + h; \tau, y(\tau; t_0, y_0))|,$$

dacă $| y(\tau; t_0, y_0) |$ este suficient de mic.

Putem scrie

$$y(\tau + h; t_0, y_0) - x(\tau + h; \tau, y(\tau; t_0, y_0)) = y(\tau + h; t_0, y_0) - y(\tau; t_0, y_0) -$$
$$- [x(\tau + h; \tau, y(\tau; t_0, y_0)) - y(\tau; t_0, y_0)] =$$
$$= \int_\tau^{\tau+h} \dot{y}(t; t_0, y_0)\, dt - \int_\tau^{\tau+h} f[t, x(t; \tau, y(\tau; t_0, y_0))] | \, dt.$$

Rezultă

$$|V[\tau+h,\ y(\tau+h;t_0,y_0)]-V[\tau+h,\ x(\tau+h;\tau,\ y(\tau;t_0,\ y_0))]|\leqslant$$

$$\leqslant M\int_{\tau}^{\tau+h}|\dot y(t;t_0,\ y_0)-f[t,\ x(t;\tau,\ y(\tau;t_0,y_0))]|\ \mathrm{d}t.$$

De aici se capătă

$$\limsup_{h\to 0+}\frac{V[\tau+h,y(\tau+h;t_0,\ y_0)]-V[\tau+h,\ x(\tau+h;\tau,\ y(\tau;t_0,\ y_0))]}{h}\leqslant$$

$$\leqslant M\,|\dot y(\tau;t_0,y_0)-f[\tau,\ y(\tau;t_0,\ y_0)]|\leqslant M\ \varphi(\tau)$$

dacă $|y(\tau;\ t_0,\ y_0)|<\varepsilon$.

Deducem mai departe

$$\limsup_{h\to 0+}\frac{V[\tau+h,\ y(\tau+h;\ t_0,\ y_0)]-V[\tau,\ y(\tau;\ t_0,\ y_0)]}{h}\leqslant$$

$$\leqslant\limsup_{h\to 0+}\frac{V[\tau+h,y(\tau+h;t_0,y_0)]-V[\tau+h,\ x(\tau+h;\tau,y(\tau;t_0,y_0))]}{h}+$$

$$+\limsup_{h\to 0+}\frac{V[\tau+h,\ x(\tau+h;\ \tau,\ y(\tau;\ t_0,\ y_0))]-V[\tau,\ y(\tau;\ t_0,\ y_0)]}{h}\leqslant$$

$$\leqslant M\ \varphi(\tau)-c(|y(\tau;\ t_0,\ y_0)|).$$

Integrînd de la $t_0$ la $t$ se capătă

$$V[t,\ y(t;\ t_0,\ y_0)]-V(t_0,\ y_0)\leqslant M\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau-\int_{t_0}^{t}c(|y(\tau;\ t_0,\ y_0)|)\,\mathrm{d}\tau\quad (*)$$

Fie acum $\varepsilon>0$, $T>0$. Alegem $\delta<b^{-1}\left(\frac{1}{2}a(\varepsilon)\right)$ şi $\eta<\min\left\{\frac{T}{M}c\left[b^{-1}\left(\frac{1}{2}a(\varepsilon)\right)\right],\frac{1}{2M}a(\varepsilon)\right\}$. Fie $|y_0|<\delta$, $\int_{t_0}^{t_0+T}\varphi(s)\,\mathrm{d}s<\eta$.

Arătăm că $|y(t;t_0,\ y_0)|<\varepsilon$ pentru $t\geqslant t_0$.

Presupunem că n-ar fi aşa; atunci există $t_1>t_0$ astfel ca $|y(t_1;t_0,\ y_0)|\geqslant\varepsilon$. Rezultă că există $t_0<t_2\leqslant t_1$ astfel ca $|y(t_2;\ t_0,\ y_0)|=\varepsilon$ şi $|y(t;\ t_0,\ y_0)|<\varepsilon$ pentru $t_0\leqslant t<t_2$.

Avem

$$a(\varepsilon)=a(|y(t_2;\ t_0,\ y_0)|)\leqslant V[t_2,\ y(t_2;\ t_0,\ y_0)]=V^*(t_2)$$

$$V^*(t_0)=V[t_0,\ y_0]\leqslant b(|y_0|)<\frac{1}{2}a(\varepsilon).$$

Rezultă că există $t_0 < t_3 < t_2$ astfel ca $V^*(t_3) = \frac{1}{2} a(\varepsilon)$ şi

$$V^*(t) > \frac{1}{2} a(\varepsilon) \text{ pentru } t_3 < t \leqslant t_2.$$

Rezultă, pentru $t_3 < t \leqslant t_2$, că avem

$$\frac{1}{2} a(\varepsilon) < V^*(t) = V[t, y(t;\, t_0, y_0)] \leqslant b(|y(t;\, t_0, y_0)|)$$

deci

$$|y(t;\, t_0, y_0)| > b^{-1}\left[\frac{1}{2} a(\varepsilon)\right],$$

deci

$$c(|y(t;\, t_0, y_0)|) > c\left[b^{-1}\left(\frac{1}{2} a(\varepsilon)\right)\right].$$

Din $t \leqslant t_2$ rezultă $|y(t;\, t_0, y_0)| \leqslant \varepsilon$, deci putem aplica formula (*) şi deducem

$$V[t_2, y(t_2;\, t_0, y_0)] \leqslant V[t_3, y(t_3;\, t_0, y_0)] + M\int_{t_3}^{t_2} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau -$$

$$-\int_{t_3}^{t_2} c(|y(\tau;\, t_0, y_0)|)\,\mathrm{d}\tau \leqslant \frac{1}{2} a(\varepsilon) + M\int_{t_3}^{t_2} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau - (t_2 - t_3)c\left[b^{-1}\left(\frac{1}{2} a(\varepsilon)\right)\right].$$

Fie $(m-1)T \leqslant t_2 - t_3 < mT$; rezultă

$$\int_{t_3}^{t_2} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau < \int_{t_3}^{t_3+mT} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau < m\eta.$$

Dar

$$m - 1 \leqslant \frac{1}{T}(t_2 - t_3),$$

deci

$$m \leqslant \frac{1}{T}(t_2 - t_3) + 1,$$

deci

$$\int_{t_3}^{t_2} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau < \frac{\eta}{T}(t_2 - t_3) + \eta < \frac{1}{M} c\left[b^{-1}\left(\frac{1}{2} a(\varepsilon)\right)\right](t_2 - t_3) + \eta.$$

Rezultă

$$V[t_2, y(t_2;\, t_0, y_0)] \leqslant \frac{1}{2} a(\varepsilon) + M\eta +$$

$$+ (t_2 - t_3)\left\{c\left[b^{-1}\left(\frac{1}{2} a(\varepsilon)\right)\right] - c\left[b^{-1}\left(\frac{1}{2} a(\varepsilon)\right)\right]\right\}$$

deci

$$V[t_2, y(t_2; t_0, y_0)] \leqslant \frac{1}{2} a(\varepsilon) + M\eta.$$

Dar $\eta < \frac{1}{2M} a(\varepsilon)$, deci în definitiv $V[t_2, y(t_2; t_0, y_0)] < a(\varepsilon)$.

Rezultă

$$a(|y(t_2; t_0, y_0)|) \leqslant V[t_2, y(t_2; t_0, y_0)] < a(\varepsilon),$$

deci $|y(t_2; t_0, y_0)| < \varepsilon$, ceea ce contrazice alegerea lui $t_2$.

Teorema este demonstrată.

O variantă puţin diferită a aceluiaşi tip de stabilitate, bazată tot pe ideea considerării unor perturbaţii care pot fi în unele momente mari dar sînt mici în medie, a fost definită de Ivo Vrkoč care a numit-o stabilitate integrală.

DEFINIŢIE. *Vom spune că soluţia banală a sistemului (1) este integral stabilă dacă există* $\delta_0 > 0$ *şi funcţia* $B(\delta) > 0$ *definită pentru* $0 < \delta < \delta_0$ *(pe care o presupunem monotonă şi continuă) cu* $\lim_{\delta \to 0} B(\delta) = 0$ *astfel ca* $|y_0| < \delta$ şi $\int_{t_0}^{\infty} \sup_{|y| < B(\delta)} |R(t, y)|\,dt < \delta$ *să implice* $|y(t; t_0, y_0)| < B(\delta)$ *pentru* $t \geqslant t_0$, $y(t; t_0, y_0)$ *fiind soluţie a sistemului* (8).

Este uşor de văzut că această definiţie este echivalentă cu următoarea

*Soluţia banală a sistemului (1) este integral stabilă dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta_1 > 0$ *şi* $\delta_2 > 0$ *astfel încît* $|y_0| < \delta_1$ *şi* $\int_{t_0}^{\infty} \sup_{|y| \leqslant \varepsilon} |R(t, y)|\,dt < \delta_2$ *să implice* $|y(t; t_0, y_0)| < \varepsilon$ *pentru* $t \geqslant t_0$; dacă luăm $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ şi $B(\delta)$ ca inversă a funcţiei $\delta(\varepsilon)$ cădem peste prima definiţie, iar prima definiţie implică pe a doua cu $\delta_1 = \delta_2$.

*Soluţia banală a sistemului (1) se numeşte asimptotic integral stabilă dacă e integral stabilă şi în plus există funcţiile* $T(\delta, \varepsilon)$ *şi* $\gamma(\delta, \varepsilon)$ *astfel ca* $|y_0| < \delta$, $\int_{t_0}^{\infty} \sup_{|y| < B(\delta)} |R(t, y)|\,dt < \gamma(\delta, \varepsilon)$, $t \geqslant t_0 + T(\delta, \varepsilon)$ *să implice* $|y(t; t_0, y_0)| < \varepsilon$.

În cele ce urmează vom pune în evidenţă o serie de condiţii echivalente cu stabilitatea integrală, respectiv stabilitatea integrală asimptotică.

1) *Soluţia banală a sistemului (1) este integral stabilă dacă şi numai dacă există* $\delta_0 > 0$ *şi* $B(\delta)$ *definită pe* $(0, \delta_0)$ $B(\delta) > 0$, $\lim_{\delta \to 0} B(\delta) = 0$, *astfel ca oricare ar fi funcţia* $\varphi(t)$ *continuă cu* $\int_{t_0}^{\infty} |\varphi(t)|\,dt < \delta$ *soluţia* $y(t; t_0, y_0)$ *a sistemului*

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) + \varphi(t) \tag{10}$$

*cu* $|y_0| < \delta$ *să verifice inegalitatea* $|y(t; t_0, y_0)| < B(\delta)$ *pentru* $t \geqslant t_0$.

*Demonstraţie*. E suficient să arătăm că dacă proprietatea din enunţ are loc, soluţia banală a sistemului (1) este integral stabilă. Fie $R(t, y)$ astfel ca

$$\int_{t_0}^{\infty} \sup_{|y| \leqslant B(\delta)} |R(t, y)| \, dt < \delta,$$

unde $B(\delta)$ e ales pe baza proprietăţii din enunţ. Fie $y_0$ cu $|y_0| < \delta$ şi soluţia $y(t; t_0, y_0)$ a sistemului (8). Dacă nu am avea pentru toţi $t \geqslant t_0$ inegalitatea $|y(t; t_0, y_0)| < B(\delta)$ ar exista un prim punct $t_1 > t_0$ astfel ca $|y(t_1; t_0, y_0) = B(\delta)$. Pentru $t \in [t_0, t_1]$ luăm $\varphi(t) = R(t, y(t; t_0, y_0))$; avem

$$\int_{t_0}^{t_1} |\varphi(t)| \, dt = \int_{t_0}^{t_1} |R(t, y(t; t_0, y_0))| \, dt \leqslant \int_{t_0}^{t_1} \sup_{|y| \leqslant B(\delta)} |R(t, y)| \, dt < \delta.$$

Prelungim pe $\varphi(t)$ continuu pe toată semiaxa $t \geqslant t_0$ astfel ca $\int_{t_0}^{\infty} |\varphi(t)| \, dt < \delta$; pentru aceasta e suficient să luăm $t_2 > t_1$ astfel ca $t_2 - t_1 <$ $< \dfrac{2\left(\delta - \int_{t_0}^{t_1} |\varphi(t)| dt\right)}{|\varphi(t_1)| + 1}$, să punem $\varphi(t_2) = 0$, şi să luăm pe $\varphi(t)$ liniară pe $[t_1, t_2]$ şi nulă pentru $t \geqslant t_2$.

Fie acum $z(t; t_0, y_0)$ soluţia sistemului (10) cu $\varphi(t)$ ales ca mai sus. Din $|y_0| < \delta$ şi $\int_{t_0}^{\infty} |\varphi(t)| \, dt < \delta$ rezultă $|z(t; t_0, y_0)| < B(\delta)$ pentru $t \geqslant t_0$ deci $|z(t_1; t_0, y_0)| < B(\delta)$. Dar pe $[t_0, t_1]$, $z(t; t_0, y_0) \equiv$ $\equiv y(t; t_0, y_0)$, deci $|y(t_1; t_0, y_0)| < B(\delta)$ ceea ce este contradictoriu.

2) *Soluţia banală a sistemului* (1) *este asimptotic integral stabilă dacă şi numai dacă e integral stabilă şi în plus există* $T(\delta, \varepsilon) > 0$ *şi* $\gamma(\delta, \varepsilon) > 0$ *definite pe* $(0, \delta_0)$, $\varepsilon > 0$ *astfel ca oricare ar fi* $\varphi(t)$ *continuă cu* $\int_{t_0}^{\infty} |\varphi(t)| \, dt <$ $< \gamma(\delta, \varepsilon)$, $|y_0| < \delta$ *şi* $t \geqslant t_0 + T(\delta, \varepsilon)$ *să rezulte* $|y(t; t_0, y_0)| < \varepsilon$, $y(t; t_0, y_0)$ *fiind soluţia sistemului* (10).

*Demonstraţie*. Din nou e suficient să arătăm că cererea din enunţ implică stabilitatea integrală asimptotică. Dacă nu ar fi aşa ar exista $\delta' < \delta_0$ şi $\varepsilon' > 0$ astfel încît oricare ar fi $T > 0$ şi $\gamma > 0$ să existe $y_0$ cu $|y_0| < \delta'$, $R(t, y)$ cu $\int_{t_0}^{\infty} \sup_{|y| \leqslant B(\delta)} |R(t, y)| \, dt < \gamma$ şi $t_1 > t_0 + T$ astfel ca $|y(t_1; t_0, y_0)| \geqslant \varepsilon'$, $y(t_1; t_0, y_0)$ fiind soluţia sistemului (8). Fie $T(\delta', \varepsilon')$, $\gamma(\delta', \varepsilon')$ construite pe baza proprietăţii din enunţ, $y_0$, $R(t, y)$ şi $t_1$ corespunzătoare pe baza ipotezei raţionamentului prin absurd. Fie $\varphi(t) =$ $= R(t, y(t; t_0, y_0))$ pentru $t \in [t_0, t_1]$; avem

$$\int_{t_0}^{t_1} |\varphi(t) \, dt = \int_{t_0}^{t_1} |R(t, y(t; t_0, y_0))| \, dt \leqslant \int_{t_0}^{t_1} \sup_{|y| \leqslant B(\delta)} |R(t, y)| \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{\infty} \sup_{|y| \leqslant B(\delta)} |R(t, y)| \, dt < \gamma(\delta', \varepsilon').$$

Ca în cazul precedent prelungim continuu pe $\varphi(t)$ pe toată axa cu păstrarea acestei inegalități și luăm soluția $z(t;\ t_0,\ y_0)$ a sistemului (10) cu $\varphi(t)$ astfel ales. Din $\int_{t_0}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt < \gamma(\delta',\ \varepsilon')$, $|y_0| < \delta'$ și $t_1 > t_0 + T(\delta',\ \varepsilon')$ rezultă $|z(t_1;\ t_0,\ y_0)| < \varepsilon'$. Dar pe $[t_0,\ t_1]$ avem $z(t;t_0,y_0) \equiv y(t;\ t_0,\ y_0)$, deci $|y(t_1;\ t_0,\ y_0)| < \varepsilon'$ ceea ce este contradictoriu.

3) *Soluția banală a sistemului* (1) *este integral stabilă dacă și numai dacă pentru orice* $0 < \delta < \delta_0$ *există* $B(\delta) > 0$, $\lim_{\delta\to 0} B(\delta) = 0$ (*monotonă și continuă*), *astfel ca oricare ar fi* $y(t)$ *cu derivată continuă pe* $[t_0,\ t_1]$ *cu* $|y(t_0)| < \delta$, $\int_{t_0}^{t_1} |\dot y(t) - f(t,\ y(t))|\, dt < \delta$, *să rezulte* $|y(t)| < B(\delta)$ *pentru* $t \in [t_0,\ t_1]$.

*Demonstrație.* Să presupunem soluția banală integral stabilă și fie $B(\delta)$ construit conform proprietății de stabilitate integrală, $y(t)$ ca în enunț. Fie $\varphi(t)$ continuă pentru $t \geqslant t_0$ astfel ca $\varphi(t) = \dot y(t) - f(t,\ y(t))$ pe $[t_0,\ t_1]$, $\int_{t_0}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt < \delta$; asemenea funcție se construiește ca la punctul 1).

Considerăm sistemul (10) cu $\varphi(t)$ astfel ales și soluția $z(t;\ t_0,\ y(t_0))$.

Conform celor stabilite la punctul 1) rezultă $|z(t;\ t_0,\ y(t_0))| < B(\delta)$ pentru $t \geqslant t_0$ și cum pe $[t_0,\ t_1]$ avem $z(t;\ t_0,\ y(t_0)) \equiv y(t)$, rezultă $|y(t)| < B(\delta)$ pe $[t_0,\ t_1]$.

Fie acum $B(\delta)$ ca în enunț și $\varphi(t)$ continuă pentru $t \geqslant t_0$ cu $\int_{t_0}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt < \delta$. Soluția $y(t;t_0,y_0)$ cu $|y_0| < \delta$ a sistemului (10) verifică pentru orice $t_1$ condiția din enunț, deci pentru orice $t_1 > t_0$ avem $|y(t;\ t_0,\ y_0)| < B(\delta)$ pe $[t_0,\ t_1]$, deci condiția de la punctul 1) e îndeplinită și soluția banală a sistemului (1) e integral stabilă.

Propri tat a 3) arată că noțiunea de stabilitate integrală definită de Ivo Vrkoč este echivalentă cu noțiunea de stabilitate tare definită de Okamura și reluată recent de Kyuzo Hayashi.

4) *Soluția banală a sistemului* (1) *este asimptotic integral stabilă dacă și numai dacă e integral stabilă și în plus pentru orice* $0 < \delta < \delta_0$, $\varepsilon > 0$, *există* $T(\delta,\ \varepsilon) > 0$, $\gamma(\delta,\ \varepsilon) > 0$ *cu proprietatea că pentru oricare* $y(t)$ *cu derivată continuă pe* $[t_0,\ t_1]$, $t_1 > t_0 + T$ *și astfel ca* $|y(t_0)| < \delta$, $\int_{t_0}^{t_1} |\dot y(t) - f(t,\ y(t))|\, dt < \gamma(\delta,\ \varepsilon)$ *rezultă* $|y(t)| < \varepsilon$ pe $[t_0 + T,\ t_1]$.

*Demonstrație.* Presupunem soluția banală a sistemului (1) asimptotic integral stabilă și fie $T(\delta,\ \varepsilon)$, $\gamma(\delta,\ \varepsilon)$ ca la punctul 2) $y(t)$ ca în enunț. Definim pentru $t \geqslant t_0$ funcția $\varphi(t)$ punînd $\varphi(t) = \dot y(t) - f(t, y(t))$ pentru $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ și cerînd $\int_{t_0}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt < \gamma(\delta,\ \varepsilon)$.

Considerăm soluția $z(t;\ t_0,\ y(t_0))$ a sistemului (10). Rezultă $|z(t;\ t_0,\ y(t_0))| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0 + T$ și cum pe $[t_0,\ t_1]$ avem $z(t;t_0,\ y(t_0)) \equiv y(t)$, rezultă $|y(t)| < \varepsilon$ pe $[t_0 + T,\ t_1]$.

Reciproc, fie $T(\delta,\ \varepsilon)$ și $\gamma(\delta,\ \varepsilon)$ ca în enunț și $\varphi(t)$ continuă cu $\int_{t_0}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt < \gamma(\delta,\ \varepsilon)$; atunci soluția $y(t;\ t_0,\ y_0)$ a sistemului (10) cu

$|y_0| < \delta$ verifică pentru orice $t_1 > t_0$ condiţia din enunţ, deci $|y(t; t_0, y_0)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0 + T$.

LEMĂ. *Dacă $V(t, x)$ are proprietăţile:*

1°. *$V(t, x)$ e continuă;*

2°. *$|V(t, x_1) - V(t, x_2)| \leqslant M |x_1 - x_2|$ pentru $|x_i| \leqslant \delta_0$;*

3° $$\limsup_{h\to 0+} \frac{V[t+h, x(t+h; t_0, x_0)] - V[t, x(t; t_0, x_0)]}{h} \leqslant \Phi[x(t; t_0, x_0)],$$

*unde $x(t; t_0, x_0)$ e soluţia sistemului (1) iar $\Phi$ e continuă, atunci*

$$V(t, y(t)) \leqslant V(t_0, y(t_0)) + M \int_{t_0}^{t} |\dot{y}(t) - f(t, y(t))|\, dt + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(y(t))\, dt$$

*pentru orice funcţie $y(t)$ cu derivată continuă pe $[t_0, t]$.*

*Demonstraţie.* Fie $\tau \in [t_0, t]$; considerăm soluţia $x(t; \tau, y(\tau))$ a sistemului (1). Avem

$$|V[\tau+h, y(\tau+h)] - V[\tau+h, x(\tau+h; \tau, y(\tau))]| \leqslant M|y(\tau+h) - x(\tau+h; \tau, y(\tau))| = M\left|y(\tau+h) - y(\tau) - \int_{\tau}^{\tau+h} f[t, x(t; \tau, y(\tau))]\, dt\right| =$$

$$= Mh\left|\frac{1}{h}\int_{\tau}^{\tau+h} \dot{y}(t)\, dt - \frac{1}{h}\int_{\tau}^{\tau+h} f[t, x(t; \tau, y(\tau))]\, dt\right|$$

deci

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V[\tau+h, y(\tau+h)] - V[\tau+h, x(\tau+h; \tau, y(\tau))]}{h} \leqslant M|\dot{y}(\tau) - f[\tau, y(\tau)]|.$$

Rezultă

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V[\tau+h, y(\tau+h)] - V[\tau, y(\tau)]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{h\to 0+} \frac{V[\tau+h, y(\tau+h)] - V[\tau+h, x(\tau+h; \tau, y(\tau))]}{h} +$$

$$+ \limsup_{h\to 0+} \frac{V[\tau+h, x(\tau+h; \tau, y(\tau))] - V[\tau, y(\tau)]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant M|\dot{y}(\tau) - f[\tau; y(\tau)]| + \Phi(y(\tau)).$$

Integrînd, se capătă inegalitatea din enunţ.

LEMĂ. *Dacă există o funcţie continuă $V(t, x)$ definită pentru $t \geqslant 0$, $|x| \leqslant \delta_0$ cu proprietăţile:*

1°. $V(t, x) \geqslant a(|x|)$, $V(t, 0) \equiv 0$;

2°. $|V(t, x_1) - V(t, x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|$;

$$3^\circ.\ \limsup_{h\to 0+} \frac{V[t+h,\ x(t+h;\ t_0,\ x_0)] - V[t,\ x(t;\ t_0,\ x_0)]}{h} \leqslant$$
$$\leqslant g(t)\, V[t,\ x(t;\ t_0,\ x_0)]$$

*cu* $\int_0^\infty g(t)\,\mathrm{d}t < \infty$, $g(t) \geqslant 0$, $x(t;\ t_0,\ x_0)$ *soluție a sistemului* (1), *atunci soluția banală a sistemului* (1) *este integral stabilă.*

*Demonstrație.* Avem ca în lema precedentă

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V[\tau+h,\ y(\tau+h)] - V[\tau,\ y(\tau)]}{h} \leqslant$$
$$\leqslant M\,|\dot{y}(\tau) - f[\tau,\ y(\tau)]| + g(\tau)\,V[\tau,\ y(\tau)].$$

De aici se capătă prin integrare

$$V[t,\ y(t)] \leqslant V[t_0,\ y(t_0)]\,\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} g(t)\,\mathrm{d}t} +$$
$$+ M\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} g(t)\,\mathrm{d}t} \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{\tau} g(u)\,\mathrm{d}u}\, |\dot{y}(\tau) - f[\tau,\ y(\tau)]|\,\mathrm{d}\tau.$$

Dacă

$$|y(t_0)| < \delta,\ \int_{t_0}^{\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = k,\ \int_{t_0}^{t_1} |\dot{y}(\tau) - f[\tau,\ y(\tau)]|\,\mathrm{d}\tau < \delta,$$

rezultă

$$a(|y(t)|) \leqslant V[t,\ y(t)] < M\mathrm{e}^k\delta + M\mathrm{e}^k\delta = 2M\mathrm{e}^k\delta,$$

deci

$$|y(t)| \leqslant a^{-1}(2M\mathrm{e}^k\delta) = B(\delta).$$

Pe baza proprietății 3) rezultă stabilitatea integrală.

LEMĂ. *Dacă există* $V(t,\ x)$ *definită pentru* $t \geqslant 0$, $|x| \leqslant \delta_0$ *cu proprietățile*:

a) $V(t,\ x) \geqslant a(|x|)$, $V(t,\ 0) \equiv 0$;

b) $|V(t,\ x_1) - V(t,\ x_2)| < M\,|x_1 - x_2|$;

c) $\limsup_{h\to 0+} \frac{V[t+h,\ x(t+h;\ t_0,\ x_0)] - V[t,\ x(t;\ t_0,\ x_0)]}{h} \leqslant$

$\leqslant -c(|x(t;\ t_0,\ x_0)|)$, *atunci soluția banală a sistemului* (1) *este asimptotic integral stabilă.*

*Demonstrație.* Pe baza lemei precedente soluția banală a sistemului (1) e integral stabilă. Pentru $\varepsilon > 0$ alegem $\gamma_1 > 0$ astfel încît dacă $|y(t_2)| < \gamma_1$ și $\int_{t_2}^{t_3} |\dot{y}(t) - f[t,\ y(t)]|\,\mathrm{d}t < \gamma_1$ să rezulte $|y(t)| < \varepsilon$ pentru $t_2 \leqslant t \leqslant t_3$; asemenea $\gamma_1$ există pe baza proprietății 3), anume $\gamma_1 = B^{-1}(\varepsilon)$. Luăm apoi $\gamma = \min(\delta,\ \gamma_1)$, $l = c(\gamma_1)$, $T(\delta,\ \varepsilon) = \frac{M(\delta+\gamma)}{l}$. Fie $y(t)$ cu de-

rivată continuă pe $[t_0, t_1]$, $t_1 > t_0 + T(\delta, \varepsilon)$, $|y(t_0)| < \delta$, $\int_{t_0}^{t_1} |\dot{y}(t) - f[t, y(t)]| \, dt < \gamma$. Dacă am avea $|y(t)| \geqslant \gamma$ pe $[t_0, t_0 + T]$, atunci

$$V[t_0 + T, y(t_0 + T)] \leqslant V[t_0, y(t_0)] + M \int_{t_0}^{t_0+T} |\dot{y}(t) - f[t, y(t)]| \, dt - \int_{t_0}^{t_0+T} c(|y(t)|) \, dt \leqslant M\delta + M\gamma - Tl = 0$$

ceea ce e contradictoriu.

Rezultă că există $\tau \in [t_0, t_0 + T]$ astfel ca $|y(\tau)| < \gamma \leqslant \gamma_1$.

Cum

$$\int_{\tau}^{t_1} |\dot{y}(t) - f(t, y(t))| \, dt \leqslant \int_{t_0}^{t_1} |\dot{y}(t) - f(t, y(t))| \, dt < \gamma \leqslant \gamma_1$$

rezultă conform alegerii lui $\gamma_1$ că $|y(t)| < \varepsilon$ pentru $\tau \leqslant t \leqslant t_1$, deci în orice caz pe $[t_0 + T, t_1]$. Conform proprietăţii 4) rezultă imediat stabilitatea asimptotică integrală.

Din această lemă rezultă imediat:

TEOREMA 1.8″. *Dacă soluţia banală a sistemului* (1) *este uniform asimptotic stabilă ea este şi integral asimptotic stabilă.*

Am văzut în acest paragraf că stabilitatea asimptotică uniformă implică stabilitatea în raport cu perturbaţii permanente, stabilitatea în raport cu perturbaţii permanente mărginite în medie, stabilitatea asimptotică integrală. În încheierea acestui paragraf vom arăta că ea se conservă şi în cazul unor perturbaţii permanente care însă tind către zero cînd $t \to \infty$. Pentru aceasta vom avea nevoie de o lemă, cu interes în sine, care dă o slăbire a condiţiilor din teorema 1.5.

LEMĂ. *Presupunem că există o funcţie* $V(t, x)$ *cu proprietăţile*:

1° $a(t, |x|) \leqslant V(t, x) \leqslant b(|x|)$

2° $\limsup_{h \to 0+} \dfrac{V[t + h, x(t + h; t, x)] - V[t, x]}{h} \leqslant -c(t, |x|)$

*unde* $b(r)$ *e continuă, monoton crescătoare,* $b(0) = 0$, *iar* $a(t, r)$, $c(t,r)$ *sînt continue şi astfel încît pentru orice pereche* $0 < \alpha \leqslant \beta < H$ ***există*** $\theta(\alpha, \beta) \geqslant 0$, $k(\alpha, \beta) > 0$ *astfel încît* $a(t, r) > k(\alpha, \beta)$, $c(t, r) > k(\alpha, \beta)$ *pentru* $\alpha \leqslant r \leqslant \beta$, $t \geqslant \theta(\alpha, \beta)$. *Atunci soluţia banală a sistemului* (1) *este uniform asimptotic stabilă.*

*Demonstraţie*. Fie $\varepsilon > 0$, $\theta_1 = \theta(\varepsilon, \varepsilon)$, $k_1 = k(\varepsilon, \varepsilon)$. Avem $a(t, \varepsilon) > k_1$ pentru $t \geqslant \theta_1$. Fie $\eta_1(\varepsilon) \leqslant b^{-1}[k(\varepsilon, \varepsilon)]$. Vom avea $V(t, x) \geqslant a(t, |x|) > k_1$ dacă $|x| = \varepsilon$, $t \geqslant \theta_1$, şi $V(t, x) \leqslant b(|x|) \leqslant k_1$, dacă $|x| < \eta_1(\varepsilon)$.

Fie $\theta_2 = \theta[\eta_1(\varepsilon), \varepsilon]$. Atunci pentru $t \geqslant \theta_2$, $\eta_1 \leqslant r \leqslant \varepsilon$ vom avea $c(t, r) > 0$.

Fie acum $\theta = \max(\theta_1, \theta_2)$ şi $\eta(\varepsilon)$ ales astfel încît $|x_0| < \eta$ şi $0 \leqslant t_0 \leqslant \theta$ să implice $|x(t; t_0, x_0)| < \eta_1$ pentru $t_0 \leqslant t \leqslant \theta$. Alegerea lui $\eta(\varepsilon)$ este posibilă pe baza lemei 0,7, conform căreia avem

$$|x(t; t_0, x_0)| \leqslant |x_0| \, e^{\int_{t_0}^{t} L(u) \, du} \leqslant |x_0| \, e^{K\theta}.$$

Condiția $|x_0| < \eta_1(\varepsilon) e^{-K\theta(\varepsilon)}$ implică $|x(t; t_0, x_0)| < \eta_1$ pentru $t_0 \leqslant t \leqslant \theta$, deci putem lua $\eta(\varepsilon) = \eta_1(\varepsilon) e^{-K\theta(\varepsilon)}$. Dacă $|x_0| < \eta(\varepsilon)$, vom avea în particular $|x(\theta; t_0, x_0)| < \eta_1$ pentru $0 \leqslant t_0 < \theta$.

Dacă există $t > \theta$ astfel ca $|x(t; t_0, x_0)| \geqslant \varepsilon$, există $t_1 > \theta$ astfel ca $|x(t_1; t_0, x_0)| = \varepsilon$ și $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$ pentru $\theta \leqslant t < t_1$.

Deoarece $t_1 > \theta \geqslant \theta_1$ și $|x(t_1; t_0, x_0)| = \varepsilon$, rezultă

$$V[t_1, x(t_1; t_0, x_0)] > k_1;$$

pe de altă parte,

$$V[\theta, x(\theta; t_0, x_0)] < k_1.$$

Rezultă că va exista $\theta < t_2 < t_1$ astfel ca $V[t_2, x(t_2; t_0, x_0)] = k_1$ și $V[t, x(t; t_0, x_0)] \geqslant k_1$, pentru $t_2 \leqslant t \leqslant t_1$. Rezultă deci $|x(t_2; t_0, x_0)| \geqslant \eta_1$. Din $\eta_1 \leqslant |x(t_2; t_0, x_0)| \leqslant \varepsilon$ și $t \geqslant \theta > \theta_2$ rezultă $c(t_2, |x(t_2; t_0, x_0)|) > 0$, deci

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V[t_2+h, x(t_2+h; t_0, x_0)] - V[t_2, x(t_2; t_0, x_0)]}{h} <$$

$$< -c[t_2, |x(t_2; t_0, x_0)|] < 0.$$

Dar din

$$V[t_2, x(t_2; t_0, x_0)] = k_1, \quad V[t, x(t; t_0, x_0)] \geqslant k_1 \text{ pentru } t_2 \leqslant t,$$

rezultă

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V[t_2+h, x(t_2+h; t_0, x_0)] - V[t_2, x(t_2; t_0, x_0)]}{h} \geqslant 0.$$

Am obținut o contradicție, deci $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$ pentru toți $t \geqslant \theta$ dacă $|x_0| < \eta(\varepsilon)$. Cum pentru $t_0 \leqslant t \leqslant \theta$ avem $|x(t; t_0, x_0)| < \eta_1(\varepsilon) < \varepsilon$, rezultă că $|x_0| < \eta(\varepsilon)$ implică $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$ pentru toți $t \geqslant t_0$.

Pentru $t_0 > \theta$ și $|x_0| < \eta < \eta_1$ rezultă $V(t_0, x_0) < k_1$. Dacă există $t > t_0$ astfel ca $|x(t; t_0, x_0)| \geqslant \varepsilon$, atunci există $t_1 > t_0 > \theta$ astfel ca $|x(t_1; t_0, x_0)| = \varepsilon$ și $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$ pentru $t_0 \leqslant t < t_1$.

Din $t_1 > \theta$ rezultă $V[t_1, x(t_1; t_0, x_0)] > k_1$. Mai departe demonstrația decurge ca mai sus și rezultă și în acest caz $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0$.

În definitiv, oricare ar fi $t_0$, dacă $|x_0| < \eta(\varepsilon)$ rezultă

$$|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon \text{ pentru } t \geqslant t_0.$$

Fie acum $h > 0$, $\eta(h)$ găsit ca mai sus, $0 < \delta < \eta(h)$, $\eta(\delta)$ ca mai sus. Alegem $\theta_1 = \theta(\eta, h)$, $k_1 = k(\eta, h)$, $C_1 = b(h)$ $C_2 = \inf c(t, r)$ pentru $0 \leqslant t \leqslant \theta_1, \eta \leqslant r \leqslant h$, $T_1 = \dfrac{C_1 + \theta_1 |C_2|}{k_1}$, $T(\delta) = \theta_1 + T_1$. Demonstrăm că dacă $|x_0| < \eta(h)$, există $t' \in [t_0, t_0 + T]$ astfel ca $|x(t'; t_0, x_0)| < \eta$. Dacă nu ar fi așa, am avea $\eta \leqslant |x(t; t_0, x_0)| \leqslant h$ (căci am ales pe $x_0$ cu $|x_0| < \eta(h)$) deci $c(t, |x(t; t_0, x_0)|) \geqslant C_2$ pentru $t_0 \leqslant t \leqslant \theta_1$ și $c(t, |x(t; t_0, x_0)|) \geqslant k_1$ pentru $\theta_1 \leqslant t \leqslant t_0 + T$. Notăm

$V^*(t) = V[t, x(t; t_0, x_0)]$. Avem $V^*(t_0 + T) - V^*(t_0) = V^*(t_0 + T) - V^*(\theta_1) + V^*(\theta_1) - V^*(t_0) \leqslant -k_1 T + \theta_1 |C_2|$,

deci $V^*(t_0 + T) \leqslant V^*(t_0) - k_1 T_1 + \theta_1 |C_2| \leqslant b(h) - k_1 T_1 + \theta_1 |C_2| = C_1 - k_1 T_1 + \theta_1 |C_2| = 0$, ceea ce contrazice faptul că

$$V^*(t_0 + T) \geqslant a(t_0 + T, |x(t_0 + T; t_0, x_0)|) > k_1 > 0.$$

Rezultă că există $t' \in [t_0, t_0 + T]$ astfel ca $|x(t'; t_0, x_0)| < \eta$, deci $|x(t; t', x(t'; t_0, x_0))| < \delta$ pentru $t \geqslant t'$ deci în orice caz

$$|x(t; t_0, x_0)| < \delta \text{ dacă } |x_0| < \eta(h),\ t \geqslant t_0 + T(\delta).$$

Cu aceasta stabilitatea asimptotică uniformă a soluției banale a sistemului e dovedită.

TEOREMA 1.8'''. *Dacă soluția banală a sistemului* (1) *este uniform asimptotic stabilă și dacă* $R(t, 0) \equiv 0$, $\lim\limits_{t \to \infty} R(t, x) = 0$ *uniform în raport cu* $x$ *pentru* $|x| \leqslant \alpha_0$, *iar* $R$ *este lipschitziană, atunci soluția banală a sistemului* (8) *este uniform asimptotic stabilă.*

*Demonstrație.* Considerăm aceeași funcție $V(t, x)$ ca în teorema 1.8. Prin ipoteză $|R(t, x)| < \Phi(t)$, unde $\Phi(t) \to 0$ cînd $t \to \infty$ și poate fi aleasă monoton descrescătoare. Aceleași calcule ca în teorema 1.8 conduc la

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{V[t + h, y(t + h; t, y)] - V[t, y]}{h} \leqslant -c(|y|) + M\Phi(t).$$

Notăm $c(t, r) = c(r) - M\Phi(t)$. Fie $0 < \alpha \leqslant \beta < h$, $k(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} c(\alpha)$. Din $\lim\limits_{t \to \infty} \Phi(t) = 0$ rezultă că există $\theta(\alpha, \beta) \geqslant 0$ astfel ca pentru $t \geqslant \theta$ să avem $\Phi(t) < \frac{1}{2M} c(\alpha)$. Rezultă că dacă $\alpha \leqslant r \leqslant \beta$, $t \geqslant \theta(\alpha, \beta)$, avem

$$c(t, r) \geqslant c(\alpha) - \frac{1}{2} c(\alpha) > k(\alpha, \beta).$$

Sînt verificate condițiile din lemă și teorema 1.8''' rezultă astfel demonstrată.

## § 9. SISTEME LINIARE CU COEFICIENȚI PERIODICI

Vom studia acum unele probleme de stabilitate pentru sistemele liniare. Începem cu sistemele liniare cu coeficienți periodici.

Fundamentală în teoria sistemelor liniare cu coeficienți periodici este următoarea teoremă:

TEOREMA 1.9. *Fiind dat sistemul*

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x,\ A(t + \omega) = A(t),$$

*există o matrice $P(t)$, periodică de perioadă $\omega$, nesingulară, astfel încît schimbarea de variabile $x = P(t)y$ să transforme sistemul într-un sistem liniar cu coeficienţi constanţi.*

*Demonstraţie.* Ca pentru orice sistem periodic, o dată cu $x(t)$ este soluţie şi $x(t+\omega)$. De aici rezultă pentru sistemele liniare

$$x(t+\omega; s, x_0) = x(t; t_0, x(t_0+\omega; s, x_0)) =$$

$$= C(t; t_0)\, x(t_0+\omega; s, y_0) = C(t; t_0)\, C(t_0+\omega; s)\, x_0.$$

Dar

$$x(t+\omega; s, x_0) = C(t+\omega; s)\, x_0.$$

Rezultă $\quad C(t+\omega; s) = C(t; t_0)\, C(t_0+\omega; s)$

Luînd aici $s = t_0 + \omega$, obţinem

$$C(t+\omega; t_0+\omega) = C(t; t_0).$$

Luînd $t_0 = 0$, $s = 0$, obţinem

$$C(t+\omega; 0) = C(t; 0)\; C(\omega; 0).$$

Notînd $C(t; 0) = U(t)$ această relaţie devine

$$U(t+\omega) = U(t)\, U(\omega).$$

Matricea $U(\omega)$ joacă un rol esenţial în teoria sistemelor liniare cu coeficienţi periodici; ea se numeşte matrice de *monodromie* a sistemului. Matricea $U(\omega)$ este nesingulară, căci pentru orice $t$, $t_0$ matricea $C(t; t_0)$ este inversabilă. Rezultă că putem găsi o matrice $B$ astfel ca $U(\omega) = e^{B\omega}$ *). Punem prin definiţie

$$P(t) = U(t)\, e^{-Bt};$$

---

*) Într-adevăr, pentru orice matrice nesingulară $A$ putem găsi o matrice $B$ astfel ca $e^B = A$ Pentru a arăta aceasta să presupunem mai întîi că $A$ are forma normală Jordan; $A =$

$= \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}$, $J_k = \lambda_k \left(E_k + \dfrac{1}{\lambda_k} Z_k\right)$, $\lambda_k \neq 0$ căci $A$ este nesingulară, $Z_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$, $Z_k^{q_k} =$

$= 0$. Seria $\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\dfrac{Z_k^l}{\lambda_k^l}}{l}$ are un număr finit de termeni nenuli, deci converge. Punem, prin definiţie,

$$\ln\left(E_k + \frac{1}{\lambda_k} Z_k\right) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(Z_k/\lambda_k)^l}{l}.$$

$P(t)$ este derivabilă şi nesingulară o dată cu $U(t)$ şi $e^{-Bt}$. Să arătăm că $P(t)$ este periodică. Avem $P(t+\omega) = U(t+\omega)\, e^{-B(t+\omega)} = U(t)\, U(\omega)\, e^{-B\omega} e^{-Bt} = U(t)\, e^{-Bt} = P(t)$ *).

---

Prin calcul formal se arată că

$$e^{\ln\left(E_k + \frac{1}{\lambda_k} Z_k\right)} = E_k + \frac{1}{\lambda_k} Z_k ;$$

pentru aceasta se observă că se fac aceleaşi calcule ca în identitatea

$$1+x = e^{\ln(1+x)} = 1 + \left(x - \frac{x^2}{2} + \ldots\right) + \frac{1}{2!}\left(x - \frac{x^2}{2} + \ldots\right)^2 + \ldots,$$

unde seria $\left(x - \frac{x^2}{2} + \ldots\right)$ are de data aceasta un număr finit de termeni nenuli. Fie acum

$$B_k = (\ln \lambda_k)\, E_k + \ln\left(E_k + \frac{1}{\lambda_k} Z_k\right).$$

Avem

$$e^{B_k} = \lambda_k\left(E_k + \frac{1}{\lambda_k} Z_k\right)$$

şi dacă luăm

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_s \end{pmatrix}$$

vom avea

$$e^B = \begin{pmatrix} e^{B_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{B_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix} = A.$$

Dacă $A$ este acum o matrice nesingulară oarecare, există $T$ astfel ca $T^{-1} A T = \widetilde{A}$, unde $\widetilde{A}$ este jordaniană ; pe baza celor de mai sus există o matrice $\widetilde{B}$ astfel ca $e^{\widetilde{B}} = \widetilde{A}$. Atunci

$$T e^{\widetilde{B}} T^{-1} = T\left(E + \frac{1}{1!}\widetilde{B} + \frac{1}{2!}\widetilde{B}^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\widetilde{B}^n + \ldots\right) T^{-1} =$$

$$= E + \frac{1}{1!}(T\widetilde{B}T^{-1}) + \frac{1}{2!}(T\widetilde{B}T^{-1})^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(T\widetilde{B}T^{-1})^n + \ldots = e^{T\widetilde{B}T^{-1}} = A,$$

deci luînd $B = T\widetilde{B}T^{-1}$ vom avea $e^B = A$.

*) Am folosit relaţia

$$e^{-B(t+\omega)} = e^{-B\omega} \cdot e^{-Bt};$$

această relaţie rezultă imediat din înmulţirea seriilor corespunzătoare, ca în cazul scalar. Observăm că relaţia

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B}$$

nu e în general valabilă ; ea este însă valabilă dacă matricile $A$ şi $B$ sînt permutabile, adică dacă

$$AB = BA.$$

Să facem acum schimbarea de variabile $x = P(t)\,y$. Avem $x(t;\, x_0) = U(t)\, x_0 = P(t)\, e^{Bt} x_0 = P(t)\, y(t;\, x_0)$.

Rezultă că

$$y(t;\, x_0) = e^{Bt} x_0$$

deci

$$\frac{dy(t,\, x_0)}{dt} = Be^{Bt} x_0 = By(t;\, x_0),$$

deci $y(t;\, x_0)$ este soluţia sistemului liniar cu coeficienţi constanţi

$$\frac{dy}{dt} = By.$$

Teorema este demonstrată.

Să observăm că din această teoremă rezultă structura soluţiilor sistemelor cu coeficienţi periodici. Avem într-adevăr

$$x(t;\, t_0,\, x_0) = P(t)\, y(t;\, t_0,\, x_0) = P(t)\, e^{B(t-t_0)} x_0.$$

De aici se deduce că întreaga comportare a soluţiilor unui sistem liniar cu coeficienţi periodici va depinde de valorile proprii ale matricii $B$. Dar aceste valori proprii sînt de forma $\frac{1}{\omega} \ln \rho_k$, unde $\rho_k$ sînt valorile proprii ale matricii de monodromie $U(\omega)$ *). Putem astfel formula următoarea teoremă:

TEOREMA 1.10. *Dacă valorile proprii ale matricii de monodromie se găsesc în cercul* $|z| \leqslant 1$ *iar valorile proprii situate pe* $|z| = 1$ *corespund unor celule jordaniene unidimensionale, atunci soluţia banală a sistemului este uniform stabilă. Dacă valorile proprii ale matricii de monodromie se găsesc în* $|z| < 1$ *soluţia banală a sistemului este uniform asimptotic stabilă.*

*Demonstraţie.* Dacă $|\rho_k| \leqslant 1$ rezultă $\mathcal{Re}\, \frac{1}{\omega} \ln \rho_k \leqslant 0$; dacă $|\rho_k| = 1$ rezultă $\mathcal{Re}\, \frac{1}{\omega} \ln \rho_k = 0$, deci valorile proprii ale matricii $B$ au părţi reale negative sau nule, iar cele cu părţi reale nule corespund unor celule jordaniene unidimensionale. Ţinînd seama de structura soluţiilor siste-

*) În general, dacă $B$ este construită ca în nota de la pagina precedentă se vede că matricea $\widetilde{B}_k$ are valorile proprii egale cu $\ln \lambda_k$, deoarece $\ln \left( E_k + \frac{1}{\lambda_k} Z_k \right)$ are toţi termenii situaţi deasupra diagonalei principale. Deoarece

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \widetilde{B}_s \end{pmatrix},$$

rezultă că valorile proprii ale lui $\widetilde{B}$ sînt $\ln \lambda_1, \ldots, \ln \lambda_s$. Cum $B = T \widetilde{B} T^{-1}$ rezultă că şi valorile proprii ale lui $B$ vor fi tot $\ln \lambda_1, \ldots, \ln \lambda_s$.

melor liniare cu coeficienți constanți rezultă $|e^{B(t-t_0)}| < M$ pentru $t \geqslant t_0$. Dar atunci

$$|C(t;t_0)| \leqslant |P(t)|\,|e^{B(t-t_0)}|$$

rezultă uniform mărginită, căci $P(t)$ fiind periodică și continuă este sigur mărginită. Dacă $|\rho_k| < 1$, rezultă că valorile proprii ale matricii $B$ au părți reale negative, deci

$$|e^{B(t-t_0)}| < Ke^{-\alpha(t-t_0)},$$

de unde rezultă o evaluare analogă pentru $|C(t;t_0)|$.

Să observăm că dacă există o valoare proprie a matricii de monodromie situată în $|z| > 1$, atunci soluția banală a sistemului este sigur nestabilă.

Să dăm o demonstrație teoremei 1.10 care nu folosește teorema 1.9. Din relația

$$U(t+\omega) = U(t)\,U(\omega)$$

rezultă

$$U(t+k\omega) = U(t)\,[U(\omega)]^k.$$

Deoarece pentru un $t \geqslant 0$ oarecare există $m$ natural astfel încît $(m-1)\,\omega \leqslant t < m\omega$, rezultă

$$U(t) = U(t')\,[U(\omega)]^{m-1},$$

unde $0 \leqslant t' < \omega$. Cum $U$ este continuă, rezultă

$$|U(t)| \leqslant M\,|(U(\omega))^{m-1}|,$$

deci proprietățile de mărginire ale matricii $U(t)$ vor depinde de comportarea șirului $[U(\omega)]^k$. Dacă pentru orice $k \geqslant 0$ acest șir este mărginit, atunci $U(t)$ este mărginită pentru $t \geqslant 0$ și are loc stabilitatea. Dacă

$$|(U(\omega))^k| < q^k \text{ cu } q < 1,$$

rezultă

$$\lim_{k\to\infty} [U(\omega)]^k = 0$$

deci

$$\lim_{t\to\infty} U(t) = 0$$

și are loc stabilitatea asimptotică. Dar, dacă $T$ este matricea care aduce pe $U(\omega)$ la forma normală Jordan, avem

$$T^{-1}\,U(\omega)\,T = \tilde{U},\quad U(\omega) = T\,\tilde{U}\,T^{-1},\quad [U(\omega)]^k = T\,\tilde{U}^k\,T^{-1}.$$

Rezultă că proprietățile de mărginire ale șirului $[U(\omega)]^k$ sînt identice cu cele ale șirului $\tilde{U}^k$. Dar

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}$$

deci

$$\tilde{U}^k = \begin{pmatrix} J_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & J_s^k \end{pmatrix}$$

deci proprietăţile de mărginire ale şirului $\widetilde{U}^k$ vor depinde de cele ale şirurilor $J_l^k$. Dar $J_l^k$ au pe diagonala principală numerele $\rho_l^k$ iar deasupra diagonalei puteri mai mici ale lui $\rho_l$. Rezultă de aici că necesar pentru ca $[U(\omega)]^k$ să fie mărginit este ca şirurile $\{\rho_l^k\}$ să fie mărginite, deci ca pentru valorile proprii $\rho_l$ să avem $|\rho_l| \leqslant 1$. Dacă $|\rho_l| = 1$ şi celula jordaniană corespunzătoare nu e unidimensională, în matricea $J_l^k$ apar termeni de forma $k\,\rho_l^{k-1}$ care atunci cînd $k \to \infty$ devin oricît de mari, deci matricea $J_l^k$ nu este mărginită. Rezultă că necesar şi suficient pentru ca $[U(\omega)]^k$ să formeze un şir mărginit este ca valorile proprii $\rho_l$ să fie în $|z| \leqslant 1$ iar cele pentru care $|\rho_l| = 1$ să corespundă unor celule jordaniene unidimensionale. Dacă $|\rho_l| < 1$, atunci $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_l^k = 0$ şi se vede că $\lim\limits_{k\to\infty} [U(\omega)]^k = 0$. Teorema este astfel demonstrată.

Valorile proprii $\rho_l$ ale matricii de monodromie se numesc *multiplicatorii sistemului*. Denumirea se justifică prin următoarea proprietate.

PROPOZIŢIE. *Necesar şi suficient ca să existe o soluţie a sistemului pentru care $x(t + \omega) = \rho\, x(t)$ este ca $\rho$ să fie o valoare proprie a matricii $U(\omega)$.*

*Demonstraţie.* Orice soluţie $x(t)$ se poate scrie sub forma

$$x(t) = U(t)\, x(0).$$

Condiţia

$$x(t + \omega) = \rho\, x(t)$$

se scrie deci

$$U(t + \omega)\, x(0) = \rho\, U(t)\, x(0).$$

Dar

$$U(t + \omega) = U(t)\, U(\omega)$$

deci

$$U(t)\, U(\omega)\, x(0) = \rho\, U(t)\, x(0).$$

Deoarece $U(t)$ este nesingulară, condiţia devine

$$U(\omega)\, x(0) = \rho\, x(0)$$

şi se vede că $\rho$ trebuie să fie o valoare proprie a matricii $U(\omega)$.

Cu ajutorul teoremei 1.10 se pot obţine condiţii efective de stabilitate pentru sistemele liniare cu coeficienţii periodici. Iată cea mai simplă condiţie de acest fel:

TEOREMA 1.11. *Fie $C$ o matrice constantă ale cărei valori proprii au părţi reale negative, $A(t)$ o matrice periodică de perioadă $\omega$. Dacă $\int_0^\omega |A(t) - C|\, \mathrm{d}t$ este suficient de mică, soluţia banală a sistemului*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)\, x$$

*este asimptotic stabilă.*

*Demonstrație*. Dacă $x(t; x_0)$ este soluția sistemului care pentru $t = 0$ coincide cu $x_0$ putem scrie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t; x_0) = C\, x(t; x_0) + [A(t) - C]\, x(t; x_0),$$

deci pe baza formulei variației constantelor

$$x(t; x_0) = \mathrm{e}^{Ct} x_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{C(t-s)} [A(s) - C]\, x(s; x_0)\, \mathrm{d}s.$$

Această relație se mai poate scrie

$$U(t)\, x_0 = \mathrm{e}^{Ct} x_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{C(t-s)} [A(s) - C]\, U(s)\, x_0\, \mathrm{d}s,$$

deci

$$U(t) = \mathrm{e}^{Ct} + \int_0^t \mathrm{e}^{C(t-s)} [A(s) - C]\, U(s)\, \mathrm{d}s.$$

Conform ipotezelor avem

$$|\mathrm{e}^{Ct}| \leqslant K\mathrm{e}^{-\alpha t},$$

deci

$$|U(t)| \leqslant K\mathrm{e}^{-\alpha t} + \int_0^t K\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)} |A(s) - C|\, |U(s)|\, \mathrm{d}s.$$

Notînd

$$v(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} |U(t)|,$$

obținem

$$v(t) \leqslant K + K\int_0^t |A(s) - C|\, v(s)\, \mathrm{d}s,$$

de unde

$$v(t) \leqslant K\mathrm{e}^{K\int_0^t |A(s)-C|\, \mathrm{d}s}.$$

În particular

$$v(n_0\omega) \leqslant K\mathrm{e}^{K\int_0^{n_0\omega} |A(s)-C|\, \mathrm{d}s},$$

deci

$$|U(n_0\omega)| \leqslant K\mathrm{e}^{-\alpha n_0\omega + K\int_0^{n_0\omega} |A(s)-C|\, \mathrm{d}s}.$$

Dacă

$$\int_0^{n_0\omega} |A(s) - C|\, \mathrm{d}s < \frac{\alpha n_0 \omega}{K} + \frac{1}{K} \ln \frac{q}{K},\quad q < 1,$$

rezultă

$$|U(n_0\omega)| < q < 1.$$

Dar $n_0\omega$ este tot o perioadă a sistemului şi aplicînd teorema 1.10 rezultă stabilitatea asimptotică uniformă.

Avem însă, din cauza periodicităţii,

$$\int_0^{n_0\omega} |A(s) - C|\,\mathrm{d}s = n_0 \int_0^{\omega} |A(s) - C|\,\mathrm{d}s,$$

deci condiţia de stabilitate devine

$$\int_0^{\omega} |A(s) - C|\,\mathrm{d}s < \frac{\alpha\omega}{K} + \frac{1}{Kn_0} \ln \frac{q}{K}.$$

Cum $n_0$ poate fi ales arbitrar de mare, rezultă că dacă

$$\int_0^{\omega} |A(s) - C|\,\mathrm{d}s < \frac{\alpha\omega}{K}$$

condiţia de stabilitate este asigurată.

Vom stabili acum o teoremă care face să intervină unele consideraţii mai profunde.

TEOREMA 1.12. *Dacă $B(t)$ este o matrice periodică astfel încît matricea de monodromie a sistemului*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B(t)\,x$$

*are valori proprii distincte situate pe cercul unitate, iar matricea periodică $A(t)$ are proprietatea că ecuaţia caracteristică a matricii de monodromie a sistemului*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)\,x$$

*este reciprocă şi în plus* $\int_0^{\omega} |A(t) - B(t)|\,\mathrm{d}t$ *este suficient de mică, atunci soluţiile sistemului*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)\,x$$

*sînt mărginite pe toată axa.*

*Demonstraţie.* Fie $V(t)$ matricea fundamentală de soluţii a sistemului

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B(t)\,x,$$

iar $U(t)$ cea a sistemului

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)\,x; \quad V(0) = U(0) = E.$$

Avem

$$\frac{dU(t)}{dt} = A(t)\,U(t) = B(t)\,U(t) + [A(t) - B(t)]\,U(t).$$

Pe baza formulei variaţiei constantelor rezultă

$$U(t) = V(t) + \int_0^t V(t)\,V^{-1}(s)\,[A(s) - B(s)]\,U(s)\,ds.$$

Matricea de monodromie $V(\omega)$ are prin ipoteză valori proprii distincte situate pe cercul unitate, deci are forma normală diagonală, elementele de pe diagonală avînd modulul 1. Rezultă de aici că şirurile $V^n(\omega)$ şi $V^{-n}(\omega)$, $n = 1, 2, \ldots$, sînt mărginite, deci pe baza relaţiei

$$V(t + \omega) = V(t)\,V(\omega)$$

rezultă că $V(t)$ şi $V^{-1}(t)$ sînt mărginite. Într-adevăr, pentru $t$ arbitrar există $m$ întreg astfel încît $(m - 1)\,\omega \leqslant t < m\,\omega$, deci

$$t = t' + (m - 1)\,\omega,$$

unde $0 \leqslant t' < \omega$; rezultă

$$V(t) = V(t')\,V[(m - 1)\,\omega] = V(t')\,V^{m-1}(\omega),$$

deci $V(t)$ e mărginită pe *toată axa*.

La fel, deoarece $V^{-1}(t)$ este matrice de soluţii pentru sistemul adjunct, care este tot un sistem cu coeficienţi periodici, rezultă

$$V^{-1}(t + \omega) = V^{-1}(t)\,V^{-1}(\omega),$$

deci pentru orice $t$

$$V^{-1}(t) = V^{-1}(t')\,V^{-(m-1)}(\omega),$$

ceea ce arată că şi $V^{-1}(t)$ este mărginită pe toată axa. Avem

$$U(t) - V(t) = \int_0^t V(t)\,V^{-1}(s)\,[A(s) - B(s)]\,[U(s) - V(s)]\,ds +$$

$$+ \int_0^t V(t)\,V^{-1}(s)\,[A(s) - B(s)]\,V(s)\,ds.$$

Rezultă pentru $0 \leqslant t \leqslant \omega$ evaluarea

$$|U(t) - V(t)| \leqslant M_1 \int_0^\omega |A(s) - B(s)|\,ds +$$

$$+ M_2 \int_0^\omega |A(s) - B(s)|\,|U(s) - V(s)|\,ds.$$

De aici deducem

$$|U(\omega) - V(\omega)| \leqslant M_1 \int_0^\omega |A(s) - B(s)|\,ds\; e^{M_2 \int_0^\omega |A(s) - B(s)|\,ds}$$

ceea ce arată că dacă $\int_0^\omega |A(s) - B(s)|\, ds$ este destul de mică, atunci matricile $U(\omega)$ și $V(\omega)$ diferă oricît de puțin între ele.

Considerăm valorile proprii ale matricii $V(\omega)$; conform ipotezei ele sînt distincte și situate pe cercul unitate. Înconjurăm aceste valori proprii cu cercuri destul de mici pentru ca în fiecare cerc să se afle o singură valoare proprie și cercurile să nu se intersecteze. Dacă $\int_0^\omega |A(s)-B(s)|\, ds$ este destul de mică, matricile $U(\omega)$ și $V(\omega)$ sînt destul de apropiate pentru ca în fiecare asemenea cerc să se afle o valoare proprie și numai una a matricii $U(\omega)$. Prin ipoteză, matricea $U(\omega)$ are ecuația caracteristică reciprocă, deci o dată cu $\rho_k$ este valoare proprie și $\frac{1}{\rho_k}$; deoarece $U(\omega)$ este reală, atunci este valoare proprie și $\frac{1}{\bar{\rho}_k}$. Valorile $\rho_k$ și $\frac{1}{\bar{\rho}_k}$ sînt simetrice față de cercul unitate și dacă $\rho_k$ este într-un cerc mic cu centrul pe cercul unitate, atunci $\frac{1}{\bar{\rho}_k}$ este în același cerc. Dar în cercurile construite se află o singură valoare proprie a matricii $U(\omega)$, deci $\rho_k$ și $\frac{1}{\bar{\rho}_k}$ coincid.

Aceasta înseamnă însă că $\rho_k \bar{\rho}_k = 1$, deci $|\rho_k| = 1$, deci valorile proprii ale matricii $U(\omega)$ se află pe cercul unitate. Din faptul că valorile proprii ale matricii $V(\omega)$ sînt distincte, rezultă că și cele ale matricii $U(\omega)$ sînt distincte și teorema este demonstrată.

Vom stabili acum unele fapte care ne vor permite să dăm teoremei demonstrate un caracter mai efectiv.

Foarte adesea în problemele de mecanică se întîlnesc sistemele canonice de forma

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

În cazul cînd $H$ este o formă pătratică în variabilele $p_i$, $q_i$ cu coeficienții funcții de $t$, sistemul rezultă liniar.

Notînd $p_i = x_i$, $q_i = x_{n+i}$, $H = \frac{1}{2} \sum h_{ij}(t)\, x_i\, x_j$, sistemul canonic liniar se scrie:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_j h_{n+i,\, j}(t)\, x_j, \quad \frac{dx_{n+i}}{dt} = -\sum_j h_{ij}\, x_j.$$

Notînd cu $H$ matricea $\{h_{ij}\}$ şi cu $I$ matricea $\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$, unde $E_n$ este matricea unitate de ordinul $n$, vom avea

$$IH = \begin{pmatrix} 0 \ldots 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 & 0 & 1 \ldots 0 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ -1 \ldots 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ 0 \ldots -1 & 0 & \ldots 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \ldots\ldots h_{1n} & h_{1,n+1} & h_{1,n+2} \ldots h_{1,2n} \\ h_{21} \ldots\ldots h_{2n} & h_{2,n+1} & h_{2,n+2} \ldots h_{2,2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_{n+1,1} \ldots h_{n+1,n} & h_{n+1,n+1} & \ldots\ldots h_{n+1,2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_{2n,1} \ldots h_{2n,n} & h_{2n,n+1} & \ldots\ldots h_{2n,2n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} h_{n+1,1} \ldots h_{n+1,n} & h_{n+1,n+1} \ldots h_{n+1,2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ -h_{11} \ldots -h_{1n} & -h_{1,n+1} \ldots -h_{1,2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

şi se vede că sistemul se poate scrie sub forma

$$\frac{dx}{dt} = IH(t)\, x.$$

PROPOZIȚIE. *Dacă $U(t)$ este matricea fundamentală de soluții* cu $U(0) = E$ *avem*

$$U^* I U = I.$$

*Demonstrație.* Avem

$$\frac{d}{dt}[U^* I U] = \frac{dU^*}{dt} I U + U^* I \frac{dU}{dt}.$$

Dar

$$\frac{dU}{dt} = IHU, \quad \frac{dU^*}{dt} = U^* H^* I^*,$$

deci

$$\frac{d}{dt}[U^* I U] = U^* H^* I^* I U + U^* I I H U.$$

Dar

$$I^* = -I, \quad H^* = H,$$

deci

$$\frac{d}{dt}[U^* I U] = -U^* H I I U + U^* I I H U.$$

Se verifică prin calcul direct că

$$I^2 = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_n & 0 \\ 0 & -E_n \end{pmatrix} = -E_{2n}.$$

Rezultă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[U^*I\,U] = U^*H\,U - U^*H\,U = 0,$$

deci $U^*I\,U$ este o matrice constantă. Pentru $t = 0$, aceasta coincide cu $I$, deci pentru toţi $t$ avem

$$U^*I\,U = I.$$

Matricile cu proprietatea $A^*I\,A = I$ se numesc *simplectice*.

Propoziţia demonstrată afirmă deci că pentru un sistem canonic matricea $U(t)$ este simplectică pentru orice $t$.

Dacă presupunem acum că $H(t)$ este periodică de perioadă $\omega$, din propoziţia demonstrată rezultă că *matricea de monodromie este simplectică.*

PROPOZIŢIE. *Ecuaţia caracteristică a unei matrici simplectice este reciprocă.*

*Demonstraţie.* Din $A^*I\,A = I$ rezultă $I^{-1}A^*I = A^{-1}$; dar $A$ şi $A^*$ au aceleaşi valori proprii, $A^*$ şi $I^{-1}A^*I$ au aceleaşi valori proprii, deci $A$ şi $I^{-1}A^*I$ au aceleaşi valori proprii, deci $A$ şi $A^{-1}$ au aceleaşi valori proprii. Dar dacă $\rho_k$ este o valoare proprie a matricii $A$, atunci $\frac{1}{\rho_k}$ este valoare proprie a matricii $A^{-1}$, deci o dată cu valoarea proprie $\rho_k$ matricea simplectică $A$ admite şi valoarea proprie $\frac{1}{\rho_k}$, deci ecuaţia ei caracteristică este reciprocă.

Din cele două propoziţii de mai sus rezultă următoarea propoziţie cunoscută sub numele de teorema lui Poincaré-Liapunov:

PROPOZIŢIE. *Ecuaţia caracteristică a matricii de monodromie a unui sistem canonic este reciprocă.*

Din această propoziţie rezultă în particular faptul că pentru sistemele canonice cu coeficienţi periodici nu poate avea loc stabilitatea asimptotică deoarece dacă sistemul admite un multiplicator în interiorul cercului unitate, el admite numaidecît şi un multiplicator în afara cercului unitate (simetric cu primul).

Pentru sistemele canonice, ca pentru toate sistemele pentru care ecuaţia caracteristică a matricii de monodromie este reciprocă, poate avea loc numai mărginirea soluţiilor pe toată axa, şi anume în cazul cînd multiplicatorii se află pe cercul unitate şi forma normală Jordan este diagonală.

Vom pune acum în evidenţă încă o clasă de sisteme pentru care ecuaţia caracteristică a matricii de monodromie este reciprocă.

PROPOZIŢIE. *Dacă*

$$GA(-t) + A(t)\,G = 0,$$

*unde*

$$G = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix},$$

*ecuaţia caracteristică a matricii de monodromie a sistemului*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A\,(t)\,x$$

*este reciprocă.*

*Demonstraţie.* Pentru sistemele considerate are loc relaţia

$$U\,(-t) = GU\,(t)\,G^{-1}.$$

Într-adevăr, avem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,[GU\,(t) - U\,(-t)\,G] = G\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,U(-t)\,G =$$

$$= GA\,(t)\,U\,(t) + A\,(-t)\,U\,(-t)\,G = [G\,A\,(t) + A\,(-t)\,G]\,U\,(t) +$$

$$+ A\,(-t)\,[U\,(-t)\,G - G\,U(t)]\,; \text{ dar } G = G^{-1},$$

deci

$$GA\,(t) + A\,(-t)\,G = G^{-1}\,A\,(t) + A\,(-t)\,G^{-1} =$$

$$= G^{-1}\,[A\,(t)\,G + GA\,(-t)]\,G^{-1} = 0.$$

Rezultă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,[GU\,(t) - U\,(-t)\,G] = -A\,(-t)\,[GU\,(t) - U\,(-t)\,G].$$

De aici se vede că matricea $GU\,(t) - U\,(-t)\,G$ verifică o ecuaţie diferenţială liniară şi deoarece pentru $t = 0$ această matrice este nulă, ea rezultă identic nulă. Dar dacă

$$GU\,(t) = U\,(-t)\,G$$

rezultă

$$U\,(-t) = GU\,(t)\,G^{-1}.$$

Pentru $t = \omega$ se capătă

$$U\,(-\omega) = GU\,(\omega)\,G^{-1}.$$

Dar

$$U\,(-\omega) = [U\,(\omega)]^{-1}.$$

Rezultă că $[U\,(\omega)]^{-1}$ coincide cu $GU\,(\omega)\,G^{-1}$, deci are aceleaşi valori proprii ca $U\,(\omega)$, ceea ce arată că ecuaţia caracteristică a matricii $U\,(\omega)$ este reciprocă.

Pe baza ultimelor două propoziţii vom obţine imediat exemple efective de sisteme pentru care ecuaţia caracteristică a matricii de monodromie este reciprocă şi pentru care teorema 1.12 capătă un caracter foarte efectiv.

PROPOZIŢIE. *Considerăm sistemul de ordinul al doilea*

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + [C + P\,(t)]\,y = 0,$$

*unde $C$ şi $P$ sînt matrici de ordinul $n$. Dacă matricile $C$ şi $P$ sînt reale şi simetrice sau dacă $C$ este reală oarecare şi $P(-t) = P(t)$, atunci ecuaţia caracteristică a matricii de monodromie este reciprocă.*

*Demonstraţie.* Dacă $C$ şi $P$ sînt reale şi simetrice, sistemul echivalent

$$\frac{dy}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = -[C + P(t)]\,y$$

este canonic.

Într-adevăr, matricea sistemului este de forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -C-P & 0 \end{pmatrix}$$

şi se vede că este egală cu $IH$, unde $H = \begin{pmatrix} C+P & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$, deci $H$ e simetrică o dată cu $C$ şi $P$.

Dacă $C$ e reală oarecare şi $P(-t) = P(t)$ avem

$$A(-t) = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -C-P(-t) & 0 \end{pmatrix} = A(t), \quad GA(t) = \begin{pmatrix} 0 & E \\ C+P & 0 \end{pmatrix},$$

$$A(t)G = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -C-P & 0 \end{pmatrix}$$

deci

$$A(t)G + GA(t) = 0,$$

adică

$$GA(-t) + A(t)G = 0$$

şi propoziţia e demonstrată.

Putem acum formula:

TEOREMA 1.12′. *Considerăm sistemul*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + [C + \lambda P(t)]\,y = 0,$$

unde

1) *$C$ este simetrică şi pozitiv definită, iar $P(t)$ e simetrică sau $C$ este reală oarecare, cu valori proprii distincte şi pozitive, iar $P(-t) = P(t)$; $P(t)$ este periodică în $t$ de perioadă $\omega$;*

2) *dacă $\omega_1^2, \ldots, \omega_n^2$ sînt valorile proprii ale lui $C$ şi $\varpi = \frac{2\pi}{\omega}$, atunci $\omega_j \pm \omega_h = m\varpi$.*

*Atunci, pentru $|\lambda|$ suficient de mic, soluţiile sistemului sînt mărginite pe toată axa.*

*Demonstraţie.* Ipoteza 1) asigură că ecuaţia caracteristică a sistemului este reciprocă; pentru $\lambda = 0$ se capătă sistemul

$$\frac{dy}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = -Cy.$$

Fie $B = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -C & 0 \end{pmatrix}$; matricea de monodromie corespunzătoare este $e^{B\omega}$. Valorile proprii ale matricii $e^{B\omega}$ sînt de forma $e^{\lambda_k \omega}$, unde $\lambda_k$ sînt valorile proprii ale matricii $B$. Aceste valori proprii sînt date de ecuaţia

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda E_n & E_n \\ -C & -\lambda E_n \end{pmatrix} = 0.$$

Dar

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda E_n & E_n \\ -C & -\lambda E_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -C - \lambda^2 E_n & -\lambda E_n \end{pmatrix} = \det(-C - \lambda^2 E_n).$$

Rezultă că $-\lambda^2$ sînt valorile proprii ale matricii $C$, deci $-\lambda^2 = \omega_j^2$. Deducem de aici că valorile proprii ale matricii $B$ sînt de forma $\pm i\omega_j$, deci valorile proprii ale matricii $e^{B\omega}$ sînt de forma $e^{\pm i\omega_j \omega}$. Dacă $\omega_j \pm \omega_h \neq$ $\neq m\varpi$, rezultă $\omega_j \pm \omega_h \neq \frac{2m\pi}{\omega}$, deci $i\omega_j\,\omega \pm i\,\omega_h\,\omega \neq 2\,m\,\pi i$, deci valorile proprii $e^{\pm i\omega_j \omega}$ sînt distincte. Sîntem astfel în condiţiile teoremei 1.12 şi deducem că soluţiile sistemului sînt mărginite pe toată axa pentru $|\lambda|$ suficient de mic.

## § 10. CONDIŢIA LUI PERRON

DEFINIŢIE. *Vom spune că sistemul*

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x$$

*satisface condiţia lui Perron dacă pentru orice funcţie continuă $f(t)$, mărginită pe semiaxa $t \geqslant 0$, soluţia sistemului*

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + f(t)$$

*cu $x(0) = 0$ este mărginită pe semiaxa $t \geqslant 0$.*

TEOREMA 1.13. *Dacă $|A(t)| \leqslant A_0$ şi sistemul satisface condiţiei lui Perron, atunci soluţia banală a sistemului este uniform asimptotic stabilă.*

Înainte de a trece la demonstraţia teoremei vom stabili o serie de fapte preliminare.

LEMA 1. *Există $\delta_0 > 0$ astfel încît oricare ar fi $t$, $t_0 \geqslant 0$ şi $|s - t_0| \leqslant \delta_0$ să avem*

$$|X(t, s) - X(t, t_0)| \leqslant \frac{1}{2} |X(t, t_0)|.$$

*Demonstraţie.* Din

$$X(t, x) = X(t, t_0)\,X(t_0, s)$$

rezultă

$$|X(t,s) - X(t,t_0)| \leqslant |X(t,t_0)|\,|X(t_0,s) - E|.$$

Dar

$$X(t_0,s) = Y(s,t_0)$$

şi

$$\frac{dY(s,t_0)}{ds} = -Y(s,t_0)A(s),$$

deci

$$Y(s,t_0) = E - \int_{t_0}^{s} Y(\sigma,t_0)A(\sigma)\,d\sigma = E -$$

$$-\int_{t_0}^{s}[Y(\sigma,t_0) - E]A(\sigma)\,d\sigma + \int_{t_0}^{s} A(\sigma)\,d\sigma,$$

de unde

$$|Y(s,t_0) - E| \leqslant \int_{t_0}^{s}|A(\sigma)|\,d\sigma + \int_{t_0}^{s}|Y(\sigma,t_0) - E|\,|A(\sigma)|\,d\sigma$$

deci

$$|Y(s,t_0) - E| \leqslant A_0\,\delta_0\,e^{A_0\delta_0},\ A_0 = \sup|A(t)|.$$

Dacă $\delta_0$ e suficient de mic, rezultă

$$A_0\,\delta_0\,e^{A_0\delta_0} \leqslant \frac{1}{2}$$

şi lema e demonstrată.

CONSECINŢĂ. *Există* $\delta_0 > 0$ *astfel ca*

$$\frac{1}{2}|X(t,t_0)| \leqslant |X(t,s)| \leqslant \frac{3}{2}|X(t,t_0)| \text{ dacă } |s - t_0| \leqslant \delta_0.$$

LEMA 2. *Dacă* $\int_0^t |X(t,\alpha)|\,d\alpha < C$ *pentru* $t \geqslant 0$, *există* $M$ *astfel ca* $|X(t,\alpha)| < M$ *pentru* $0 \leqslant \alpha \leqslant t$.

*Demonstraţie.* Dacă afirmaţia nu ar fi adevărată, există $\alpha_n$ şi $t_n$ astfel ca $0 \leqslant \alpha_n \leqslant t_n$ şi $|X(t_n,\alpha_n)| \geqslant n$. Şirul $\{t_n\}$ este nemărginit. Într-adevăr, dacă $t_n < T_0$ am avea $|X(t_n,\alpha_n)| \leqslant e^{A_0T_0}$, ceea ce contrazice felul cum au fost definite $\alpha_n$ şi $t_n$. Dacă $\{\alpha_n\}$ este nemărginit, avem

$$C > \int_0^{t_n}|X(t_n,\alpha)|\,d\alpha > \int_{\alpha_n}^{\alpha_n+\delta_0}|X(t_n,\alpha)|\,d\alpha > \frac{1}{2}\delta_0|X(t_n,\alpha_n)| > \frac{1}{2}\delta_0\,n$$

ceea ce este contradictoriu. Dacă $\alpha_n$ nu este mărginit, avem

$$C > \int_0^{t_n}|X(t_n,\alpha)|\,d\alpha > \int_{\alpha_n-\delta_0}^{\alpha_n}|X(t_n,\alpha)|\,d\alpha > \frac{1}{2}\delta_0|X(t_n,x_n)|$$

ceea ce este din nou contradictoriu. Lema e demonstrată.

LEMA 3. *Dacă sistemul satisface condiţia lui Perron, atunci există C astfel ca*

$$\int_0^t |X(t, \alpha)|\, dt < C \text{ pentru orice } t \geqslant 0.$$

*Demonstraţie.* Soluţia cu condiţia $x(0) = 0$ a sistemului neomogen este dată de formula

$$x(t) = \int_0^t X(t, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha.$$

Din condiţia lui Perron rezultă că pentru orice funcţie continuă şi mărginită $f$ definită pe $t \geqslant 0$, funcţia $\int_0^t X(t, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha$ este mărginită. Pentru $t$ fixat, considerăm operatorul $U(f)$ care aplică spaţiul Banach al funcţiilor vectoriale continue $f$, mărginite pe semiaxa $t \geqslant 0$, în spaţiul vectorilor numerici, definit de

$$U(f) = \int_0^t X(t, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha.$$

Fie $\{t_k\}$ şirul numerelor raţionale pozitive,

$$U_k(f) = \int_0^{t_k} X(t_k, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha.$$

Deoarece pentru $\|f\| < c_1$ funcţia $\int_0^t X(t, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha$ este mărginită, rezultă

$$\limsup_{k \to \infty} \|U_k(f)\| < \infty.$$

Deoarece sfera $\|f\| < c_1$ este în spaţiul Banach considerat o mulţime de-a doua categorie, putem aplica lema lui Banach-Steinhaus şi deducem că există $M$ cu $\|U_k(f)\| \leqslant M\|f\|$ pentru orice $f$ din spaţiu, deci

$$\left|\int_0^{t_k} X(t_k, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha\right| \leqslant M\|f\|.$$

Pentru $t$ real oarecare există un şir $\{t_{n_k}\}$ de numere raţionale a cărui limită este $t$. Din

$$\left|\int_0^{t_{n_k}} X(t_{n_k}, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha\right| \leqslant M\|f\|$$

rezultă

$$\left|\int_0^t X(t, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha\right| \leqslant M\|f\|$$

pentru orice $f$ din spațiu. Fie $x_{ik}$ elementele matricii $X(t, \alpha)$; pentru $t$ fixat considerăm vectorul $f^k$ ale cărui componente $f_i^k$ sînt egale cu sign $x_{ik}$. Vectorul $Xf^k$ va avea componentele

$$\sum_k x_{ik} \text{ sign } x_{ik} = \sum_k |x_{ik}|.$$

Fie $f^{k,n}$ un șir de vectori, cu elementele funcții continue tinzînd către $f^k$. Pe baza teoremei lui Lebesgue de trecere la limită sub semnul de integrare, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t X(t, \alpha) f^{k,n}(\alpha)\, d\alpha = \int_0^t X(t, \alpha) f^k(\alpha)\, d\alpha$$

și din

$$\left| \int_0^t X(t, \alpha) f^{k,n}(\alpha)\, d\alpha \right| \leqslant M \| f^{k,n} \|$$

rezultă pentru $n \to \infty$

$$\left| \int_0^t X(t, \alpha) f^k(\alpha)\, d\alpha \right| \leqslant M_1$$

deci

$$\int_0^t \sum_k | x_{ik}(t, \alpha) |\, d\alpha \leqslant M_1.$$

Deoarece această relație este adevărată pentru orice $i$ rezultă că există $C$ astfel ca

$$\int_0^t | X(t, \alpha) |\, d\alpha < C$$

și lema e demonstrată.

*Demonstrația teoremei* 1.13. Din lemele 2 și 3 rezultă stabilitatea uniformă. Mai departe din $|X(\alpha, t_0) < M$ rezultă pe baza condiției lui Perron

$$\left| \int_0^t X(t, \alpha)\, X(\alpha, t_0)\, d\alpha \right| < C_1$$

deci

$$t | X(t, t_0) | < C_1, \quad | X(t, t_0) | < \frac{C_1}{t}$$

ceea ce arată că are loc stabilitatea asimptotică.

Ținînd seama de lema 3 avem

$$\left| \int_0^t X(t, \alpha) X(\alpha, t_0)\, d\alpha \right| \leqslant \int_0^t | X(t, \alpha) | \; | X(\alpha, t_0) |\, d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant M \int_0^t | X(t, \alpha) |\, d\alpha < MC = C_1$$

deci $C_1$ este independent de $t_0$. De aici rezultă că stabilitatea asimptotică e uniformă şi teorema e demonstrată.

O generalizare a teoremei 1.13 datorită lui M. Reghiş se obţine în felul următor. Fie $L_a^p$ spaţiul funcţiilor vectoriale definite pe semiaxa $t \geqslant 0$ măsurabile şi astfel ca $\int_0^\infty |h(s)|^p e^{pas} ds < \infty$, $L_a^\infty$ spaţiul funcţiilor pentru care vrai $\sup\limits_{s \geqslant 0} |h(s)| e^{as} < \infty$. Luînd în aceste spaţii normele

$$\|h\|_{(p,a)} = \left(\int_0^\infty |h(s)|^p e^{pas} ds\right)^{\frac{1}{p}}, p \in [1, \infty)$$

respectiv

$$\|h\|_{(\infty,a)} = \text{vrai} \sup_{s \geqslant 0} |h(s)| e^{as},$$

$L_a^p$ şi $L_b^\infty$ devin spaţii Banach, căci operatorul liniar $\Omega_a^b : L_a^p \to L_b^p$ definit de $\Omega_a^b h = e^{(a-b)s} h(s)$ este un izomorfism izometric între $L_a^p$ şi $L_b^p$, iar $L$ este spaţiu Banach.

LEMA 4. *Dacă*

$$V u = \int_0^t X(t, s) u(s) ds$$

*este un operator din* $L_a^p$ *în* $L_b^\infty$, *atunci*

$$\|Vu\|_{(\infty,b)} \leqslant M \|u\|_{(p,a)}.$$

*Demonstraţie.* Dacă $\{t_k\}$ e şirul numerelor raţionale pozitive şi

$$V_k u = e^{bt_k} \int_0^{t_k} X(t_k, s) u(s) ds,$$

avem, prin ipoteză, pentru $u \in L_a^p$, $\sup\limits_{h \geqslant 1} \| V_k(u) \| < \infty$, deci conform lemei Banach-Steinhaus $\| V_k \| \leqslant M$, deci

$$\| V_k u \| \leqslant M \| u \|_{(p,a)},$$

sau

$$e^{btk} \int_0^{t_k} X(t_k, s) u(s) ds \| \leqslant M \|u\|_{(p,a)},$$

de unde

$$e^{bt} \left| \int_0^t X(t, s) u(s) ds \right| < M \|u\|_{(p,a)}$$

şi lema e demonstrată.

TEOREMA 1.13'. *Dacă există* $p \in [1, +\infty)$ *astfel ca pentru orice* $f \in L_a^p$ *soluţia cu* $x(0) = 0$ *a sistemului*

$$\frac{dx}{dt} = A(t) x + f$$

*să aparțină lui* $L_b^p$, *a*, $b > 0$, *atunci există* $h > 0$ *astfel ca*

$$|X(t, t_0)| \leqslant h e^{at_0} e^{-bt},$$

*pentru* $t \geqslant t_0 \geqslant 0$.

*Demonstrație*. Fie $\delta_0$ constanta din lema 1. Definim funcțiile

$$u_m(s) = \begin{cases} \delta_0^{-\frac{1}{p}} \dfrac{X(s, m\delta_0)\, x_0}{e^{as}|X(s, m\delta_0)|}, & s \in [m\delta_0, (m+1)\delta_0],\ |x_0| = 1, \\ 0 & s \notin [m\delta_0, (m+1)\delta_0],\ s \geqslant 0. \end{cases}$$

Avem $u_m \in L_a^p$ și $\| u_m \|_{(p,a)} \leqslant 1$. Conform lemei 4,

$$M e^{-bt} \geqslant \left| \int_0^t X(t,s)\, u_m(s)\, ds \right| = \delta_0^{-\frac{1}{p}} \left| \int_{m\delta_0}^{(m+1)\delta_0} X(t, s) \frac{X(s, m\delta_0)\, x_0}{e^{as}|X(s, m\delta_0)|} ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \delta_0^{-\frac{1}{p}} \,|X(t, m\delta_0)| \int_{m\delta_0}^{(m+1)\delta_0} \frac{ds}{e^{as}\,|X(s, m\delta_0)|} \geqslant$$

$$\geqslant \delta_0^{-\frac{1}{p}} \frac{2}{3} |X(t, m\delta_0)|\, \delta_0\, e^{-a\delta_0} e^{-am\delta_0}$$

căci $|X(s, m\delta_0)| \leqslant \dfrac{3}{2}$ pentru $m\delta_0 \leqslant s \leqslant (m+1)\,\delta_0$.

Rezultă

$$|X(t, m\delta_0)| \leqslant \delta_0^{\frac{1}{p}} \frac{3}{2} M\, \delta_0^{-1} \cdot e^{a\delta_0} e^{am\delta_0}\, e^{-bt}.$$

Fie $s \in [0,t]$ și $m$ astfel ca $m\,\delta_0 \leqslant s < (m+1)\,\delta_0$. Rezultă

$$|X(t,s)| \leqslant |X(t,m\delta_0)||X(m\delta_0,s)| \leqslant \frac{3}{2}\, |X(t,m\delta_0)| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^2 M\, e^{a\delta_0}\, \delta_0^{-\frac{1}{q}}\, e^{as}\, e^{-bt} = h\, e^{as}\, e^{-bt}$$

și teorema e demonstrată.

Vom demonstra acum o teoremă datorită tot lui M. Reghiș relativă la existența unei funcții Liapunov pentru sistemele liniare cu proprietatea din teorema 1.13′.

TEOREMA 1.6‴. *Dacă* $|X(t, t_0)| \leqslant h\, e^{at_0}\, e^{-bt}$, *atunci oricare ar fi* $\delta < b$ *există* $V(x,t)$ *continuă, cu proprietățile*

$$1^\circ\ V(0, t) \equiv 0,\ t \geqslant 0,\ 2^\circ\ |V(x_1, t) - V(x_2, t)| \leqslant L_D(t)\,|x_1 - x_2|,$$

*pentru* $x_i \in D$, $3^\circ$ $l\, e^{\delta t}\,|x| \leqslant V(x, t) \leqslant k(\delta)\, e^{(a-b+\delta)t}\,|x|$,

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{V[x(t+h; t, x), t+h] - V[x, t]}{h} = -e^{\delta t}\,|x|.$$

*Demonstraţie.* Se defineşte

$$V(x, t) = \int_t^{\infty} e^{\delta\tau} \| x(\tau; t, x) \| d\tau.$$

Convergenţa uniformă a integralei e asigurată pentru $0 \leqslant t \leqslant T$, $|x| \leqslant K$ datorită ipotezei $\delta < b$.

$$|V(x_1, t) - V(x_2, t)| \leqslant \int_t^{\infty} e^{\delta\tau} \Big| |x(\tau; t, x_1)| - |x(\tau; t, x_2)| \Big| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_t^{\infty} e^{\delta\tau} |x(\tau; t, x_1) - x(\tau; t, x_2)| d\tau \leqslant \int_t^{\infty} e^{\delta\tau} |X(\tau, t)| d\tau \, |x_1 - x_2| \leqslant$$

$$\leqslant L(t) |x_1 - x_2| \text{ unde } L(t) = \int_t^{\infty} e^{\delta\tau} |X(\tau, t)| d\tau \leqslant h \int_t^{\infty} e^{\delta\tau} e^{-b\tau} e^{at} d\tau =$$

$$= \frac{h}{b - \delta} e^{(a-b+\delta)t}$$

Mai departe

$$V(x, t) \leqslant \int_t^{\infty} e^{\delta\tau} |X(\tau, t)| d\tau \, |x| = L(t) \, |x| = k(\delta) e^{(a-b+\delta)t}$$

$$V(x,t) \geqslant e^{\delta t} \int_t^{\infty} |x(\tau; t, x)| d\tau \geqslant e^{\delta\tau} \int_t^{t+\alpha} |x(\tau; t, x)| d\tau \geqslant \frac{1}{2} \alpha e^{\delta t} |x|$$

(cu aceleaşi raţionamente ca în teorema 1.6″). Se vede imediat că

$$V[x(t; t_0, x_0), t] = \int_t^{\infty} e^{\delta\tau} |x(\tau; t, x(t; t_0, x_0))| d\tau = \int_t^{\infty} e^{\delta\tau} |x(\tau; t_0, x_0)| d\tau$$

deci

$$\frac{d}{dt} V[x(t; t_0, x_0), t] = e^{-\delta t} |x(t; t_0, x_0)|.$$

Pentru $t = t_0$ se capătă condiţia din enunţ.

Să încheiem aceste consideraţii cu o teoremă de stabilitate după prima aproximaţie.

TEOREMA 1.7‴. *Dacă* $|X(t, t_0)| \leqslant h \, e^{at_0} e^{-bt}$, *oricare ar fi funcţia* $\Phi(x, t)$ *cu* $|\Phi(x,t)| \leqslant f(t) |x|^m$, $\|x\| \leqslant D$, $f \in L_0^r$, $\|f\|_{(p,0)} \leqslant K$, *soluţia* $x(t; t_0, x_0)$ *a ecuaţiei*

$$\frac{dx}{dt} = A(t) x + \Phi(x, t),$$

*cu* $|x_0|$ *suficient de mic verifică inegalitatea*

$$|x(t; t_0, x_0)| \leqslant H(h,m) e^{at_0} e^{-bt} |x_0|, \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0.$$

Valoarea inițială $x_0$ trebuie să verifice relațiile:

(α) dacă $a > b,\ m > \frac{a}{b},\ p \in [1, +\infty]$

$$| x_0 | \leqslant [2(m-1) h^m e^{m(a-b)t_0} \| f \|_{(p,0)} \| e^{(a-mb)s} \|_{(q,0)}]^{-\frac{1}{m-1}},\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

(β) dacă $a > b,\ m = \frac{a}{b},\ p = 1$

$$| x_0 | \leqslant [2(m-1) h^m e^{m(a-b)t_0} \| f \|_{(1,0)}]^{-\frac{1}{m-1}};$$

(γ) dacă $a \leqslant b,\ m > 1,\ p \in [1, +\infty]$

$$| x_0 | \leqslant [2(m-1) h^m \| f \|_{(p,0)} \| e^{(a-mb)\sigma} \|_{(q,0)}]^{-\frac{1}{m-1}},\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

(δ) dacă $a \leqslant b,\ m = 1,\ p \in [1, +\infty],\ \| x_0 \| \leqslant D.$

*Demonstrație.* Avem

$$| x(t, t_0, x_0) | \leqslant | X(t, t_0) |\ | x_0 | + \int_{t_0}^{t} | X(t, \tau) |\ \Phi[x(\tau), \tau]\, d\tau,\ t \geqslant t_0 \geqslant 0.$$

Punînd $t = t_0 + s,\ \tau = t_0 + \sigma,\ | x(t_0 + s; t_0, x_0) | = \varphi(s),\ \varphi(0) = | x_0 |$ rezultă

$$\varphi(s) \leqslant h\, e^{at_0}\, e^{-bt_0}\, e^{-bs}\, \varphi(0) + \int_0^s h\, e^{a(t_0+\sigma)}\, e^{-b(t_0+s)} f(t_0 + \sigma)\, \varphi^m(\sigma)\, d\sigma,$$

sau

$$\varphi(s) \leqslant K e^{-bs} \varphi(0) + K e^{-bs} \int_0^s e^{a\sigma} f(t_0 + \sigma)\, \varphi^m(\sigma)\, d\sigma,$$

unde

$$K = \begin{cases} h\, e^{(a-b)t_0}, & a > b \\ h, & a \leqslant b \end{cases}$$

Dacă $\psi(s)$ este definită de ecuația

$$\psi(s) = K e^{-bs} \varphi(0) + K e^{-bs} \int_0^s e^{a\sigma} f(t_0 + \sigma)\, \psi^m(s)\, ds,\ s \geqslant 0,$$

atunci

$$\varphi(s) \leqslant \psi(s) \text{ și } \frac{d\psi}{ds} + b\psi = Q(s)\, \psi^m,\ Q(s) = K e^{(a-b)s} f(t_0 + s).$$

În cazurile (α), (β), (γ) aceasta este o ecuație de tip Bernouli și obținem

$$\psi(s) = [\psi(0)]^{1-m} e^{(m-1)bs} - (m-1) K e^{(m-1)bs} \int_0^s e^{(a-mb)\sigma} f(t_0 + \sigma)\, d\sigma]^{-\frac{1}{m-1}},\ s \geqslant 0.$$

Dar $\psi\ (0) = K\ \varphi(0)$ și $\varphi\ (s) \leqslant \psi\ (s)$, deci

$$\varphi(s) \leqslant K\ e^{-bs}\ \varphi(0) \left\{1 - (m-1)\ K^m\ [\varphi(0)]^{m-1} \int_0^s e^{(a-mb)\sigma} f(t_0 + \sigma)\ d\sigma \right\}^{-\frac{1}{m-1}}.$$

În cazul ($\alpha$),

$$K = h\ e^{(a-b)t_0}, \int_0^s f(t_0 + \sigma)\ e^{(a-mb)\sigma}\ d\sigma \leqslant \| f \|_{(p,0)} \| e^{(a-mb)\sigma} \|_{(q,0)}$$

și rezultă ținînd seama de evaluarea pentru $|x_0|$

$$\varphi\ (s) \leqslant 2^{\frac{1}{m-1}}\ h\ e^{(a-b)t_0}\ e^{-bs}\ \varphi\ (0),$$

deci

$$|x(t\,;\ t_0, x_0)| \leqslant He^{at_0}\ e^{-bt}\ |\ x_0\ |,\ H = 2^{\frac{1}{m-1}}\ h.$$

Celelalte cazuri se tratează la fel.

## COMENTARII BIBLIOGRAFICE

Expuneri generale asupra teoriei stabilității după Liapunov se află în [8], [9], [10]. Noțiunea de stabilitate uniformă a fost introdusă de K. P. Persidski în [11]. În legătură cu stabilitatea în raport cu o parte a variabilelor, ideile fundamentale pot fi găsite în [12]. Proprietatea 3) relativă la stabilitatea asimptotică a fost dată în [13]. Prima teoremă generală cu privire la existența funcției Liapunov în cazul stabilității asimptotice uniforme, precum și definiția stabilității asimptotice uniforme au fost date în [14]. Teorema 1.5′ aparține lui N.N. Krasovski. În prima ei formă, pentru sistemele autonome, teorema a fost stabilită într-o lucrare comună a lui E. A. Barbașin și N. N. Krasovski. Această teoremă, ca și celelalte contribuții importante ale lui N. N. Krasovski în teoria stabilității, se găsesc în [15]. Rezultatele lui C. Corduneanu sînt publicate în [16]. Teorema de existență a funcției Liapunov pentru sistemele liniare a fost dată în [17]. Elementele de algebră liniară și teorema de aducere a matricilor la forma normală Jordan sînt reproduse după [18]. Demonstrația algebrică a teoremei de existență a funcției Liapunov pentru sistemele liniare cu coeficienții constanți a fost dată în [19]. Demonstrația teoremei de stabilitate după prima aproximație fără folosirea funcției Liapunov, cu ajutorul formulei variației constanților, a fost dată de R. Bellman. Pentru ideile și metodele lui R. Bellman este caracteristică monografia [20]. Cealaltă schemă de demonstrare a teoremei de stabilitate după prima aproximație a fost dată în [21].

Teorema de stabilitate după prima aproximație, în cazul cînd prima aproximație este omogenă de grad $m$, se găsește cu demonstrația lui I. G. Malkin în [9], cu cea a lui J. L. Massera în [10], cu cea a lui N. N. Krasovski în [15]. Demonstrația din text e nouă și se bazează pe o idee

a lui D. Wexler. Propoziţiile 1), 3), 4) de la sfîrşitul § 7 sînt date în [22], [23].

Teorema 1.8 a fost dată de I. G. Malkin în [14]. Noţiunile de zonă periculoasă şi nepericuloasă ale frontierei domeniului de stabilitate au fost introduse în [24]. Lucrarea lui T. Hacker a apărut în [25]. Teoremele asupra stabilităţii în raport cu perturbaţii permanente mărginite în medie au fost date în [26], iar noţiunea de stabilitate integrală şi teoremele corespunzătoare în [27]. Noţiunea echivalentă de stabilitate tare definită de Okamura a fost reluată în [28].

Lema care precede teorema 1.8''' şi această ultimă teoremă, au fost stabilite în forma din text de către D. Wexler. Teorema 1.8''' a fost publicată anterior într-o notă a lui I. G. Malkin.

Teorema de reductibilitate a sistemelor liniare cu coeficienţi periodici a fost stabilită de A. M. Liapunov în [8]. Sub forma din text ea a fost demonstrată în [29] (vezi şi [3]). Proprietăţile fundamentale ale sistemelor liniare canonice cu coeficienţi periodici au fost stabilite în [30], [31]. Rezultatele din text sînt reproduse după [32]. Condiţia lui Perron a fost formulată în [33]. Demonstraţia bazată pe teorema lui Banach-Steinhaus a fost dată de R. Bellman în [34]. Rezultatele lui M. Reghiş se găsesc în [35].

CAPITOLUL II

# STUDIUL STABILITĂȚII ABSOLUTE LA SISTEMELE NELINIARE DE REGLARE AUTOMATĂ

Un sistem de reglare automată constă din obiectul reglării și regulator. Regulatorul are sarcina să mențină în obiectul reglării o anumită mișcare, deci procesul reglării constă în faptul că regulatorul se opune oricăror abateri de la această mișcare.

Mișcarea sistemului de reglare considerat ca un întreg este descrisă de un anumit sistem de ecuații diferențiale ordinare $\frac{dx}{dt} = X(t, x)$. De fapt se poate întîmpla să apară și ecuații cu derivate parțiale, ecuații integro-diferențiale, sau ecuații cu argument întîrziat; aceasta depinde de natura elementelor cu ajutorul cărora se realizează sistemul. În cele ce urmează se vor considera numai sisteme a căror mișcare este descrisă de ecuații diferențiale ordinare. Fie $x = x_0(t)$ mișcarea pe care dorim să o menținem. Abaterile sistemului de la această mișcare pot fi provocate fie de perturbații instantanee, care, așa cum am mai văzut, se traduc prin modificări ale condițiilor inițiale, fie de apariția unor perturbații permanente. Practic, menținerea mișcării dorite revine la faptul că mișcarea reală a sistemului se menține în apropierea mișcării dorite. Se vede deci că problema revine la asigurarea stabilității mișcării $x = x_0(t)$ în raport cu orice abateri ale condițiilor inițiale și cu perturbații permanente. Asemenea stabilitate este asigurată, după cum am văzut, dacă soluția $x = x_0(t)$ este uniform asimptotic stabilă în mare. Prin urmare găsirea condițiilor de stabilitate pentru sistemele de reglare automată revine la găsirea unor condiții de stabilitate asimptotică în mare. Ecuațiile sistemelor de reglare uzuale vor avea forme particulare speciale și condițiile de stabilitate vor trebui să fie pe de o parte efective, pe de altă parte suficient de largi pentru a lăsa o anumită libertate proiectantului în luarea în considerare și a altor calități care se cer sistemului.

Vom presupune că obiectul reglării este determinat de $m$ coordonate generalizate $\eta_1, \ldots, \eta_m$, iar regulatorul de o singură coordonată $\mu$. Mișcarea

obiectului reglării va fi descrisă de ecuațiile $\frac{d\eta_k}{dt} = f_k\,(\eta_1, \ldots \eta_m,\ \mu,\ t)$ iar a regulatorului de o ecuație $\frac{d^2\mu}{dt^2} = F\,(\eta_1, \ldots \eta_m,\ \mu,\ t)$. Ca întotdeauna în problemele de stabilitate, se formează ecuațiile mișcării perturbate, reducînd problema la studiul stabilității soluției banale.

Pentru sistemele de reglare uzuale de care ne vom ocupa, se consideră că ecuațiile mișcării perturbate nu depind explicit de $t$, și se mai fac în plus unele ipoteze simplificatoare care conduc la faptul că unele ecuații rezultă liniare. Toate aceste ipoteze corespund unor scheme tehnice efective și sînt justificate pentru clase largi de sisteme.

Ecuațiile mișcării perturbate pentru obiectul reglării se presupun liniare cu coeficienți constanți: $\dot{\eta}_k = \Sigma\, b_{kj}\, \eta_i + n_k\, \mu$. Pentru $\mu = 0$ se capătă mișcarea liberă a obiectului reglării, fără intervenția regulatorului. Ecuația organului regulator se presupune de forma

$$V^2 \ddot{\mu} + W \dot{\mu} + S\, \mu = f^*\,(\sigma),$$

unde $\sigma = \Sigma\, p_j\, \eta_j - r\, \mu$ iar $f^*(\sigma)$ este o funcție neliniară despre care se presupune în general numai că $f^*\,(0) = 0$, $\sigma f^*\,(\sigma) > 0$ pentru $\sigma \neq 0$; uneori se consideră funcții mai generale cu $f^*(\sigma) = 0$ pentru $|\sigma| \leqslant \sigma_0$, $\sigma f^*\,(\sigma) > 0$ pentru $|\sigma| > \sigma_0$.

Se presupune că $a$, $b$, $p_j$, $r$ sînt constante. După cum se vede, în aceste ecuații singura neliniaritate este introdusă de funcția $f^*\,(\sigma)$. Acest tip de sisteme a fost în mod deosebit studiat în ultimii 15—16 ani după apariția în 1944 a unei lucrări a lui A.I. Lurie și V. N. Postnikov. În ultima vreme, din ce în ce mai mult se pune problema lărgirii clasei de sisteme considerate, atît prin introducerea mai multor organe de reglare, ceea ce revine la introducerea mai multor funcții $f_j\,(\sigma_j)$, cît și prin luarea în considerare a neliniarităților reale în ecuațiile obiectului reglării, ale regulatorilor sau în expresia mărimilor $\sigma$, care caracterizează interacțiunile dintre regulator și obiectul reglării. În toate aceste direcții există pînă acum rezultate puține și cu caracter de început.

Ecuațiile de mișcare se aduc la anumite forme normale prin schimbări de variabile simple. Se pune $\xi = p\, \dot{\mu} + q\, \mu$ și ecuația regulatorului se scrie sub forma

$$\frac{V^2}{p}\, \dot{\xi} - \frac{q\, V^2}{p^2}\, \xi + \frac{V^2\, q^2}{p^2}\, \mu + \frac{W}{p}\, \xi - \frac{W\, q}{p}\, \mu + S\, \mu = f^*\,(\sigma);$$

se aleg coeficienții $p$ și $q$ astfel încît $V^2 \left(\frac{q}{p}\right)^2 + W \left(\frac{q}{p}\right) + S = 0$. Notînd cu $\rho_{m+1}$ și $\rho_{m+2}$ valorile lui $\frac{q}{p}$ care se obțin ca rădăcini ale acestei ecuații se obțin pentru regulator două ecuații de ordinul întîi de forma:

$$\dot{\mu} = -\, \rho_{m+1}\, \mu + \frac{1}{p}\, \xi, \quad \dot{\xi} = \rho_{m+1}\, \xi - a\, \xi + p\, f^*\,(\sigma).$$

Notînd $\mu = \eta_{m+1}$ se obţine, după schimbări corespunzătoare de notaţii, un sistem de forma

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}\,\eta_\alpha + h_k\,\xi, \quad \dot{\xi} = -\rho_{n+1}\,\xi + f(\sigma), \quad \sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha\,\eta_\alpha\,. \tag{1}$$

În cazul particular cînd $S = 0$, ecuaţiile (1) capătă forma

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}\,\eta_\alpha + h_k\,\xi, \quad \dot{\xi} = f(\sigma), \quad \sigma = \Sigma\, p_\alpha\,\eta_\alpha\,;$$

în cazul cînd $V^2 = 0$, după transformări simple se obţine

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{m} b_{k\alpha}\,\eta_\alpha + n_k\,\mu, \quad \dot{\mu} = -\rho_{m+1}\,\mu + f(\sigma), \quad \sigma = \sum p_\alpha\,\eta_\alpha + p_{m+1}\,\mu\,;$$

în cazul cînd $S = V^2 = 0$, ecuaţiile (1) capătă forma

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{m} b_{k\alpha}\,\eta_\alpha + n_k\,\mu, \quad \dot{\mu} = f(\sigma), \quad \sigma = \sum p_\alpha\,\eta_\alpha + p_{m+1}\,\mu.$$

Aceste ecuaţii au fost studiate pentru prima dată de A. I. Lurie. În cele ce urmează vom arăta cum se studiază stabilitatea pentru asemenea sisteme.

## § 1. FORMA CANONICĂ ŞI FUNCŢIA LIAPUNOV CORESPUNZĂTOARE

Pentru sistemele de reglare automată se formulează următoarea problemă de stabilitate. *Se cere să se formuleze condiţii relative la coeficienţii care intervin în sistem astfel încît soluţia banală a sistemului (1) să fie asimptotic stabilă în mare, oricare ar fi funcţia f din clasa considerată* ($\sigma f(\sigma) > 0$ *pentru* $\sigma \neq 0$, $f(0) = 0$).

***Dacă soluţia banală a sistemului este asimptotic stabilă în mare pentru orice funcţie f din clasa considerată, spunem că sistemul este absolut stabil.***

Metoda dată de A. I. Lurie în studiul stabilităţii absolute se bazează pe aducerea sistemului la anumite forme canonice şi pe construirea convenabilă a unei funcţii Liapunov.

Se face schimbarea de variabile $x_s = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha^{(s)}\,\eta_\alpha + \xi$; avem

$$\dot{x}_s = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha^{(s)}\,\dot{\eta}_\alpha + \dot{\xi} = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha^{(s)}\left[\sum_{\beta=1}^{n} b_{\alpha\beta}\,\eta_\beta + h_\alpha\,\xi\right] - \rho_{n+1}\,\xi + f(\sigma).$$

Dacă vrem ca ecuaţiile să capete forma $\dot{x}_s = -\rho_s x_s + f(\sigma)$ trebuie să avem $\dot{x}_s = -\rho_s \sum_{\beta=1}^{n} c_\beta^{(s)}\,\eta_\beta - \rho_s\,\xi + f(\sigma)$, deci coeficienţii $c_\alpha^{(s)}$ trebuie

aleşi astfel încît

$$-\rho_s c_\beta^{(s)} = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{\alpha\beta} c_\alpha^{(s)}, \qquad \rho_{n+1} - \rho_s = \sum_{\alpha=1}^{n} h_\alpha c_\alpha^{(s)}.$$

Primele ecuaţii arată că $-\rho_s$ sînt valori proprii ale matricii $(b_{\alpha\beta})$. Dacă presupunem că matricea $(b_{\alpha\beta})$ are formă normală diagonală, se poate alege matricea $(c_\alpha^{(s)})$ nesingulară avînd drept linii un sistem liniar independent de vectori proprii. Ultimele ecuaţii servesc la determinarea completă a matricii $c_\alpha^{(s)}$, deoarece vectorii proprii sînt determinaţi pînă la un factor constant. În acest fel sistemul poate fi adus la forma

$$\dot{x}_k = -\rho_k x_k + f(\sigma), \quad k = 1,2,\ldots, n+1, \quad \sigma = \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k x_k.$$

S-a notat $\xi = x_{n+1}$.

Pentru a vedea mai bine sensul transformării şi a înţelege ce se petrece în cazul cînd matricea $(b_{\alpha\beta})$ nu are formă normală diagonală, să reluăm calculele notînd:

$$(c_\alpha^{(s)}) = C, \quad (b_{\alpha\beta}) = B,$$

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \eta, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = u, \quad \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = h.$$

Sistemul (1) se scrie

$$\dot{\eta} = B\eta + h\xi, \quad \dot{\xi} = -\rho_{n+1}\xi + f(\sigma), \quad \sigma = (p, \eta),$$

unde

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}.$$

Schimbarea de variabile are forma $x = C\eta + \xi u$. Avem

$$\dot{x} = C\dot{\eta} + \dot{\xi} u = C(B\eta + h\xi) + \dot{\xi} u = CB\eta + (Ch - \rho_{n+1} u)\xi + f(\sigma) u.$$

Dar

$$\eta = C^{-1}(x - \xi u) = C^{-1}x - \xi C^{-1} u,$$

deci

$$\dot{x} = CBC^{-1}x - [(CBC^{-1} + \rho_{n+1}E)u - Ch]\xi + f(\sigma)u.$$

Forma canonică se obţine cerînd ca $CBC^{-1}$ să aibă forma normală Jordan şi în plus

$$(CBC^{-1} + \rho_{n+1}E)u - Ch = 0.$$

Fie $C_0$ astfel încît $C_0 B C_0^{-1}$ are formă normală Jordan, şi fie $T$ o matrice de forma

$$\begin{pmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_s \end{pmatrix},$$

unde $T_k$ au aceleaşi dimensiuni ca celulele din forma normală a matricii $B$ şi sînt de forma

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{l_k} \\ 0 & a_1 & \dots & a_{l_k-1} \\ 0 & 0 & \dots & a_{l_k-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_2 \\ 0 & 0 & \dots & a_1 \end{pmatrix};$$

rezultă, notînd $C = TC_0$, relaţia

$$CBC^{-1} = TC_0\ BC_0^{-1}\ T^{-1} = TJT^{-1} = J,$$

unde $J$ este forma normală Jordan a matricii $B$, (deoarece se verifică prin calcul direct că $T_k$ e permutabilă cu celula jordaniană $J_k$ corespunzătoare). Alegînd pe $C$ de forma $TC_0$, ultima ecuaţie se scrie

$$(J + \rho_{n+1}\ E) = TC_0\ h$$

şi reprezintă un sistem de $n$ ecuaţii pentru cele $n$ necunoscute pe care le introduce matricea $T$. În general acest sistem admite soluţii nenule şi astfel se ajunge la forma canonică dorită.

Alături de sistemele de forma

$$\dot{\eta}_k = \sum_\alpha b_{k\alpha}\ \eta_\alpha + h_k\ \xi,\ \dot{\xi} = -\ \rho_{n+1}\ \xi + f(\sigma),$$

într-o serie de probleme apare necesitatea considerării unor sisteme de forma generală

$$\dot{\eta}_k = \sum_\alpha b_{k\alpha}\ \eta_\alpha + h_k\ f(\sigma), \quad \sigma = \sum_\alpha p_\alpha\ \eta_\alpha\ .$$

Această formă generală conţine pe cea precedentă ca un caz particular, cum se observă imediat dacă notăm cu $\xi$ una oarecare dintre coordonatele $\eta_\alpha$. Cu notaţiile matriciale de mai sus sistemul se scrie $\dot{\eta} = B\eta + hf(\sigma)$. Facem schimbarea de variabile $x = C\eta$ şi obţinem $\dot{x} = C\ \dot{\eta} = CB\eta + Chf(\sigma)$ deci $\dot{x} = CBC^{-1}x + Chf(\sigma)$. Alegem pe $C$ astfel încît $CBC^{-1}$ să aibă forma normală Jordan şi în plus $Ch = u$.

Formele canonice astfel obţinute sînt convenabile în cazul cînd matricea $B$ are valori proprii cu părţi reale negative, aşa cum se va vedea cînd vom construi funcţia Liapunov corespunzătoare; acestea sînt sistemele aşa-numite propriu stabile. În celelalte cazuri se folosesc alte forme canonice, asupra cărora nu ne vom mai opri.

Vom considera deci un sistem de forma

$$\dot{x}_k = -\ \rho_k\ x_k + f(\sigma), \qquad k = 1, \dots, n + 1, \quad \sigma = \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k x_k\ . \tag{2}$$

Derivînd ultima relație din (2) se capătă

$$\dot{\sigma} = \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k \dot{x}_k = \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k (-\rho_k x_k + f(\sigma)) = \sum_{k=1}^{n+1} \beta_k x_k - r f(\sigma).$$

Vom presupune că $\rho_1, \ldots, \rho_s$ sînt reale și pozitive, iar $\rho_{s+1}, \ldots \rho_{n+1}$ vor fi presupuse două cîte două complex conjugate și cu părți reale pozitive.

Constantele $\gamma_1, \ldots, \gamma_s, \beta_1, \ldots, \beta_s$ vor fi reale, iar $\gamma_{s+1}, \ldots \gamma_{n+1}, \beta_{s+1}, \ldots \beta_{n+1}$ vor fi două cîte două complex conjugate. Vom considera soluții ale sistemului astfel încît $x_1, \ldots, x_s$ sînt reale, iar $x_{s+1}, \ldots, x_{n+1}$ două cîte două complex conjugate. Toate aceste considerente revin la ipoteza că necunoscutele și coeficienții în sistemul inițial erau reale, iar elementele complexe se introduc ca rezultat al schimbării de variabilă care a adus sistemul la forma canonică. Pentru a clarifica aceste chestiuni vom face cîteva considerații generale. *Vom spune că un vector are proprietatea P dacă primele lui s componente sînt reale, iar celelalte, în ordine, sînt două cîte două complex conjugate. Vom spune că o matrice pătratică nesingulară are proprietatea P dacă are primele s linii reale și următoarele, în ordine, două cîte două complex conjugate.*

PROPOZIȚIA 1. *Dacă o matrice are proprietatea P, matricea formată din liniile reale și din părțile reale și cele imaginare ale liniilor complexe este nesingulară.*

*Demonstrație.* Fie $D$ determinantul matricii date, iar $\Delta$ determinantul matricii formate cu liniile reale și cu părțile reale și cele imaginare ale liniilor complexe. Avem

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \\ b_{s+1,1} + i\, c_{s+1,1} & \cdots & b_{s+1,n} + i\, c_{s+1,n} \\ b_{s+1,1} - i\, c_{s+1,1} & \cdots & b_{s+1,n} - i\, c_{s+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \\ b_{s+1,1} + i\, c_{s+1,1} & \cdots & b_{s+1,n} + i c_{s+1,n} \\ 2\, b_{s+1,1} & \cdots & 2 b_{s+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} =$$

$$= 2^{\frac{1}{2}(n-s)} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \\ b_{s+1,1} + i\, c_{s+1,1} & \cdots & b_{s+1,n} + i\, c_{s+1,n} \\ b_{s+1,1} & \cdots & b_{s+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} =$$

$$= (2\, i)^{\frac{1}{2}(n-s)} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \\ c_{s+1,1} & \cdots & c_{s+1,n} \\ b_{s+1,1} & \cdots & b_{s+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = (2\, i)^{\frac{1}{2}(n-s)} \Delta$$

şi se vede că $\Delta \neq 0$ o dată cu $D$.

*Vom spune că o funcţie vectorială $Y(y)$ are proprietatea $P$ dacă atunci cînd vectorul $y$ are proprietatea $P$, vectorul $Y(y)$ are proprietatea $P$.*

PROPOZIŢIA 2. *Fie $A$ o matrice cu proprietatea $P$, iar $x$ un vector real. Atunci vectorul $y = Ax$ are proprietatea $P$. Reciproc, dacă $A$ este nesingulară şi $y$ are proprietatea $P$, atunci $x$ este real.*

*Demonstraţie.* Prima afirmaţie se vede imediat, deoarece primele $s$ elemente ale lui $y$ rezultă din compunerea liniilor reale ale lui $A$ cu elementele reale ale lui $x$, iar ultimele prin compunerea liniilor complex conjugate ale lui $A$ cu elementele reale ale lui $x$. Pentru a demonstra a doua afirmaţie fie

$$A = \begin{pmatrix} R \\ U + iV \\ U - iV \end{pmatrix}, \quad x = u + iv.$$

Avem

$$Ax = \begin{pmatrix} Ru + i\, Rv \\ Uu - Vv + i\,(Uv + Vu) \\ Uu + Vv + i\,(Uv - Vu) \end{pmatrix}.$$

Condiţia ca $Ax$ să aibă proprietatea $P$ conduce la $Rv = 0$, $Vv = 0$, $Uv = 0$. Dar dacă $\det A \neq 0$, rezultă, pe baza propoziţiei 1, $\det \begin{pmatrix} R \\ U \\ V \end{pmatrix} \neq 0$ deci $v = 0$, deci $x$ este real.

PROPOZIŢIA 3. *Fie $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X\,(x)$ un sistem real. Prin schimbarea de variabile $y = Ax$, unde $A$ este o matrice nesingulară cu proprietatea $P$, se obţine sistemul $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Y\,(y)$, unde $Y(y)$, are proprietatea $P$.*

*Demonstraţie.* Avem

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = A\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = AX\,(x) = AX\,(A^{-1}\,y) = Y(y).$$

Dacă $y$ are proprietatea $P$, pe baza propoziţiei 2 $A^{-1}\,y$ este real, deci $X(A^{-1}\,y)$ este real, deci $AX\,(A^{-1}\,y)$ are proprietatea $P$.

Întorcîndu-ne la sistemele de ecuații diferențiale studiate, să observăm că liniile matricii $C$ cu care s-a făcut schimbarea de variabile pentru aducerea la forma canonică erau vectori proprii ai matricii $B$; valorilor proprii reale le corespund vectori proprii reali, deci linii reale, valorilor proprii complex conjugate le corespund vectori proprii complex conjugați, deci linii două cîte două complex conjugate. Rezultă că matricea $C$ a transformării avea proprietatea $P$, deci sistemul obținut este ca în propoziția 3. Dacă la sistemul inițial interesau, cum este firesc, numai soluțiile reale, la sistemul transformat vor interesa numai soluțiile cu proprietatea $P$.

PROPOZIȚIA 4. *Considerăm sistemul* $\frac{dy}{dt} = Y(y)$, *unde* $Y(y)$ *are proprietatea* $P$. *Dacă* $y_0$ *are proprietatea* $P$, *atunci* $y(t;y_0)$ *are proprietatea* $P$ *pentru orice* $t$.

*Demonstrație.* Pornind de la $y_0$, construim șirul de aproximații succesive:

$$y_{k+1}(t) = y_0 + \int_0^t Y\ (y_k(t))\ dt.$$

Dacă $y_k(t)$ are proprietatea $P$, atunci $Y\ (y_k(t))$ are proprietatea $P$ și se vede că $y_{k+1}(t)$ are proprietatea $P$.

Soluția $y\ (t;y)$ este dată de $\lim\limits_{k\to\infty} y_k(t)$ și se vede că ea va avea proprietatea $P$.

Ținînd seama de aceasta, vom putea aplica metoda funcției lui Liapunov cerînd ca funcția $V$ să aibă proprietatea corespunzătoare numai pentru vectori cu proprietatea $P$; atunci ea va avea proprietățile cerute de-a lungul tuturor soluțiilor din familia $M$ a soluțiilor cu proprietatea $P$, deci vom obține concluzii de stabilitate în raport cu soluțiile din această mulțime, singurele care corespund soluțiilor reale ale sistemului inițial.

Considerăm forma pătratică $F = \sum\limits_{i,j} \frac{a_j\, a_i}{\rho_j + \rho_i}\, x_j\, x_i$, unde $a_1, \ldots, a_s$ sînt reale, iar celelalte, două cîte două complex conjugate.

Avem

$$\frac{1}{\rho_j + \rho_i} = \int_0^\infty e^{-(\rho_j + \rho_i)t}\, dt,$$

deci

$$F = \sum_{i,j} a_j\ a_i \int_0^\infty e^{-(\rho_i + \rho_j)t}\, dt\ \ x_j\, x_i = \int_0^\infty \left[\sum_k a_k\, x_k\, e^{-\rho_k t}\right]^2 dt.$$

Dacă $x$ este un vector cu proprietatea $P$, atunci pentru $k = 1, \ldots$ $\ldots, s$, $a_k x_k e^{-\rho_k t}$ este real, iar pentru celelalte valori ale lui $k$, $a_k x_k e^{-\rho_k t}$ sînt două cîte două complex conjugate, deci suma lor este reală; rezultă că $\Sigma\, a_k\, x_k\, e^{-\rho_k t}$ este reală pentru orice vector $x$ cu proprietatea $P$, deci $F$ este reală și pozitivă pentru orice vector $x$ cu proprietatea $P$.

Pe de altă parte, $\sum\limits_k a_k x_k e^{-\rho_k t} = 0$ pentru orice $t$, dacă și numai dacă $x_k = 0$ pentru orice $k$. Rezultă că $F$ este o formă pătratică pozitiv definită pentru orice vector cu proprietatea $P$.

Fie acum

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} A_i x_i^2 + C_1 x_{s+1} x_{s+2} + \ldots + C_{n-s} x_n x_{n+1}, \text{ unde } A_i, C_j \text{ sînt}$$

reale și pozitive. Pentru orice vector $x$ cu proprietatea $P$, forma $\Phi$ ia valori reale și pozitive; $\Phi = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$.

În cele ce urmează vom presupune îndeplinită condiția

$$\lim_{|\sigma| \to \infty} \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma = \infty$$

și vom alege funcția

$$V = \Phi + F + \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma.$$

Se vede imediat că această funcție ia valori reale și pozitive pentru orice $x$ cu proprietatea $P$ și că $V = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$, $\sigma = 0$. Să calculăm derivata lui $V$ în virtutea sistemului. Avem

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^{s} A_k x_k [-\rho_k x_k + f(\sigma)] + C_1 x_{s+2} [-\rho_{s+1} x_{s+1} + f(\sigma)] +$$

$$+ C_1 x_{s+1} [-\rho_{s+2} x_{s+2} + f(\sigma)] + \ldots + \sum_{i,k} \frac{a_i a_k}{\rho_i + \rho_k} \{x_k (-\rho_i x_i + f(\sigma)) +$$

$$+ x_i (-\rho_k x_k + f(\sigma))\} + f(\sigma) \left[ \sum_{k=1}^{n+1} \beta_k x_k - r f(\sigma) \right].$$

Dar

$$\sum_{i,k} a_i a_k x_i x_k = (\Sigma a_i x_i)^2, \qquad \sum_{i,k} \frac{a_k a_i}{\rho_k + \rho_i} (x_k + x_i) = 2 \sum_{i,k} \frac{a_k a_i}{\rho_k + \rho_i} x_k$$

deci

$$\frac{dV}{dt} = -\sum_{k=1}^{s} \rho_k A_k x_k^2 - C_1 (\rho_{s+1} + \rho_{s+2}) x_{s+1} x_{s+2} -$$

$$- \ldots - C_{n-s} (\rho_n + \rho_{n+1}) x_n x_{n+1} -$$

$$- \left( \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k \right)^2 - [\sqrt{r} f(\sigma)]^2 - 2 \sqrt{r} f(\sigma) \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k +$$

$$+ f(\sigma) \sum_{k=1}^{s} \left[ A_k + \beta_k + 2 \sqrt{r} a_k + 2 a_k \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{\rho_k + \rho_i} \right] x_k +$$

$$+ f(\sigma) \sum_{\alpha=1}^{n+1-s} \left[ C_\alpha + \beta_{s+\alpha} + 2 \sqrt{r} a_{s+\alpha} + 2 a_{s+\alpha} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{\rho_{s+\alpha} + \rho_i} \right] x_{s+\alpha}.$$

Pentru uniformitatea scrierii am introdus notaţia

$$C_1 = C_2,\; C_3 = C_4 \ldots\ldots C_{n-s} = C_{n-s+1}.$$

$\frac{dV}{dt}$ rezultă negativ definită dacă avem

$$A_k + \beta_k + 2\sqrt{r}\,a_k + 2\,a_k \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{\rho_k + \rho_i} = 0, \qquad (k = 1, \ldots, s)$$

$$C_\alpha + \beta_{s+\alpha} + 2\sqrt{r}\,a_{s+\alpha} + 2\,a_{s+\alpha} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{\rho_k + \rho_i} = 0, \qquad (\alpha = 1, \ldots, n - s + 1).$$

Dacă aceste condiţii sînt îndeplinite,

$$\frac{dV}{dt} = -\sum_{k=1}^{s} \rho_k A_k x_k^2 -$$

$$- C_1(\rho_{s+1} + \rho_{s+2})\,x_{s+1}\,x_{s+2} - \ldots - C_{n-s}(\rho_n + \rho_{n+1})\,x_n\,x_{n+1} -$$

$$- \left[\sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k + \sqrt{r}\,f(\sigma)\right]^2$$

şi se vede că dacă $x$ are proprietatea $P$, atunci $\frac{dV}{dt} \leqslant 0$.

Dacă luăm $A_k = 0$, $C_k = 0$ şi nu mai introducem termenul $-2\sqrt{r} f(\sigma) \Sigma a_k x_k$, obţinem drept condiţie de stabilitate existenţa unui vector cu proprietatea $P$ care să verifice ecuaţiile

$$\beta_k + 2\,a_k \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{\rho_k + \rho_i} = 0,\; (k = 1, 2, \ldots, n + 1).$$

Aceste condiţii sînt mai simple, dar mai restrictive.

Putem obţine uşor condiţii necesare ca ecuaţiile de mai sus să admită soluţii. Prin adunarea ecuaţiilor se capătă

$$\sum_{k=1}^{n+1} \beta_k + 2\sum_k \sum_i \frac{a_k a_i}{\rho_k + \rho_i} = 0,$$

deci

$$\Sigma\,\beta_k + 2\int_0^\infty (\Sigma\; a_k\, e^{-\rho_k t})^2\, dt = 0,$$

deci

$$\sum_{k=1}^{n+1} \beta_k < 0.$$

Înmulțind fiecare ecuație cu $\rho_k$ și adunînd se capătă,

$$\sum \beta_k \rho_k + 2 \sum_{i,k} \frac{\rho_k a_i a_k}{\rho_k + \rho_i} = \sum_{i,k} \beta_k \rho_k + \sum_{i,k} \frac{\rho_k a_i a_k}{\rho_k + \rho_i} + \sum_{i,h} \frac{\rho_i a_i a_k}{\rho_k + \rho_i} =$$

$$= \sum \beta_k \rho_k + \sum_{i,k} a_i a_k = \sum \beta_k \rho_k + (\sum a_k)^2 = 0,$$

deci

$$\sum_k \rho_k \beta_k < 0.$$

Împărțind fiecare ecuație cu $\rho_k$ și adunînd se capătă

$$\sum \frac{\beta_k}{\rho_k} + 2 \sum_k \frac{a_k}{\rho_k} \sum_i \frac{a_i}{\rho_k + \rho_i} = \sum \frac{\beta_k}{\rho_k} + 2 \sum_{i,k} \frac{a_k}{\rho_k} \frac{a_i}{\rho_i} \frac{\rho_i}{\rho_k + \rho_i} = \sum \frac{\beta_k}{\rho_k} +$$

$$+ \sum_{i,k} \frac{a_k a_i}{\rho_k \rho_i} = \sum \frac{\beta_k}{\rho_k} + \left(\sum_k \frac{a_k}{\rho_k}\right)^2 = 0$$

deci

$$\sum_k \frac{\beta_k}{\rho_k} < 0.$$

Să observăm că în calculele precedente noi am studiat de fapt stabilitatea soluției banale a sistemului

$$\dot{x}_k = -\rho_k x_k + f(\sigma), \qquad \dot{\sigma} = \Sigma \beta_k x_k - r f(\sigma).$$

Stabilitatea soluției banale a acestui sistem atrage evident după sine stabilitatea soluției banale a sistemului

$$\dot{x}_k = -\rho_k x_k + f(\sigma), \qquad \sigma = \Sigma \gamma_k x_k.$$

Într-adevăr, orice soluție a acestui sistem este soluție și pentru sistemul studiat. Dacă toate soluțiile sistemului studiat tind către zero, același lucru va fi valabil și pentru soluțiile celui de-al doilea sistem. Este însă clar că cererea de stabilitate pentru primul sistem este mai mult decît trebuie pentru stabilitatea celui de-al doilea. Pornind de la această observație se vede că are sens să căutăm asemenea alegere a funcției Liapunov care să permită să decidem direct asupra stabilității soluției banale pentru sistemul al doilea. Să alegem

$$V = \sum_{i,k} \frac{a_k a_i}{\rho_k + \rho_i} x_k x_i.$$

Obținem

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i,k} \frac{a_i a_k}{\rho_k + \rho_i} \{x_k [-\rho_i x_i + f(\sigma)] + x_i [-\rho_k x_k + f(\sigma)]\} =$$

$$= -\sum_{i,k} a_i a_k x_i x_k + \left(\sum_{i,k} \frac{a_i a_k x_k}{\rho_k + \rho_i} + \sum_{i,k} \frac{a_i a_k x_i}{\rho_k + \rho_i}\right) f(\sigma) =$$

$$= -(\sum_k a_k x_k)^2 + 2 f(\sigma) \sum_{i,k} \frac{a_i a_k}{\rho_i + \rho_k} x_k.$$

Ţinînd seama că $-f(\sigma)\,[\sigma - \Sigma\, \gamma_k\, x_k] \equiv 0$ putem scrie

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\,(\sum_k a_k\, x_k)^2 - \sigma f(\sigma) + f(\sigma) \sum_k \left[\gamma_k + 2\, a_k \sum_i \frac{a_i}{\rho_i + \rho_k}\right] x_k.$$

Presupunem că putem alege pe $a_k$ astfel încît să fie verificate ecuaţiile

$$\gamma_k + 2\, a_k \sum_i \frac{a_i}{\rho_i + \rho_k} = 0\,.$$

Atunci

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\,(\sum_k a_k\; x_k\,)^2 - \sigma f(\sigma)$$

şi soluţia banală rezultă stabilă.

Să observăm că dacă alegem $A_k = 0$, $C_k = 0$ în studiul făcut mai sus, $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ se poate anula pe mulţimea $\Sigma\, a_k\, x_k + \sqrt{r} f\,(\sigma) = 0$ iar în ultimul caz pe mulţimea $\Sigma a_k\, x_k = 0,\ \sigma = 0\,.$

Pentru ca să obţinem totuşi stabilitatea asimptotică, este necesar să cerem în plus ca aceste mulţimi să nu conţină semitraiectorii întregi (vezi teorema 1.5′).

În unele cazuri, ţinînd seama de diferite particularităţi ale sistemului, se pot obţine criterii simplificate.

Astfel, dacă $\beta_1 < 0$ şi $\rho_1 > 0$ se alege funcţia

$$V = \frac{1}{2}\,\beta_1\; x_1^2 + \sum_{k,j=2}^{n+1} \frac{a_i\, a_j}{\rho_i + \rho_j}\; x_i\; x_j\; + \int_0^\sigma f(\sigma)\,\mathrm{d}\,\sigma\,.$$

Se obţine

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\;\beta_1\, x_1\,[\,-\,\rho_1\, x_1 + f\,(\sigma)] + \sum_{i,j=2}^{n+1} \frac{a_i\, a_j}{\rho_i + \rho_j}\,\{x_i\,[-\rho_j\; x_j + f(\sigma)] +$$

$$+\; x_j\;[-\rho_i\, x_i\; + f\,(\sigma)]\} + f(\sigma)\;[\beta_1\, x_1 + \sum_{j=2}^{n+1} \beta_j\; x_j\; - r\, f\,(\sigma)] = \beta_1\;\rho_1\, x_1^2\; -$$

$$-\left(\sum_{j=2}^{n+1} a_j\;\; x_j\right)^2 -\;\; [\sqrt{r}\;\, f(\sigma)]^2 - 2\sqrt{r}\; f\,(\sigma) \sum_{j=2}^{n+1} a_k\;\; x_k\; +$$

$$+\, f\,(\sigma) \sum_{j=2}^{n+1} \left(\beta_j\; + 2\; a_j \sum_{i=2}^{n+1} \frac{a_i}{\rho_j\; + \rho_i} + 2\sqrt{r}\; a_j\right) x_j$$

şi deducem drept condiţii de stabilitate cererea ca ecuaţiile

$$\beta_j\; + 2\; a_j \sum_{i=2}^{n+1} \frac{a_i}{\rho_j + \rho_i} + 2\,\sqrt{r}\, a_j = 0$$

să aibă soluții. În acest fel numărul ecuațiilor s-a redus cu o unitate.

Să presupunem acum că $\rho_k$ sînt reale și distincte. Alegem

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 + R \int_0^\sigma f(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma, \quad R > 0.$$

Rezultă

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\sum_{k=1}^{n+1} \rho_k x_k^2 - r R f^2(\sigma) + \sum_{k=1}^{n+1} (1 + R\beta_k)\, x_k f(\sigma).$$

Considerăm pe $-\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ ca pe o formă pătratică în variabilele $x_k$ și $f(\sigma)$. Discriminantul ei este

$$\Delta = \begin{vmatrix} \rho_1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1 + R\beta_1}{2} \\ 0 & \rho_2 & \dots & 0 & -\frac{1 + R\beta_2}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \rho_{n+1} & -\frac{1 + R\beta_{n+1}}{2} \\ -\frac{1 + R\beta_1}{2} & -\frac{1 + R\beta_2}{2} & \dots & -\frac{1 + R\beta_{n+1}}{2} & rR \end{vmatrix}.$$

Forma pătratică rezultă pozitiv definită dacă toți $\rho_k$ sînt pozitivi și în plus $\Delta > 0$. Avem

$$\Delta = rR \prod_{k=1}^{n+1} \rho_k - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n+1} \rho_1 \dots \rho_{k-1} (1 + R\beta_k)^2 \rho_{k+1} \dots \rho_{n+1}.$$

Condiția $\Delta > 0$ se scrie

$$4 r R > \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(1 + R\beta_k)^2}{\rho_k}.$$

Dacă există o constantă pozitivă $R$ care verifică această inegalitate, soluția banală a sistemului rezultă absolut stabilă.

Dacă $\rho_1, \dots, \rho_s$ sînt reale și $\rho_{s+1}, \dots, \rho_{n+1}$ complexe alegem

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{s} x_k^2 + \sum_{\alpha=1,\ \text{impar}}^{n-s} x_{s+\alpha}\, x_{s+\alpha+1} + R \int_0^\sigma f(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma$$

și obținem

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\sum_{k=1}^{s} \rho_k x_k^2 - \sum_{\alpha=1,\ \text{impar}}^{n-s} (\rho_{s+\alpha} + \rho_{s+\alpha+1})\, x_{s+\alpha}\, x_{s+\alpha+1} + $$
$$+ \sum_{k=1}^{n+1} (1 + R\beta_k)\, x_k f(\sigma) - r R f^2(\sigma).$$

Dacă

$$x_{s+\alpha} = u_{s+\alpha} + i\, v_{s+\alpha}, \quad \beta_{s+\alpha} = p_{s+\alpha} + i\, q_{s+\alpha}, \quad \rho_{s+\alpha} = \sigma_{s+\alpha} + i\, \tau_{s+\alpha}$$

rezultă

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\sum_{k=1}^{s} \rho_k\, x_k^2 - \sum \sigma_{s+\alpha}\,(u_{s+\alpha}^2 + v_{s+\alpha}^2) - r\,R\,f^2(\sigma) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{s} (1 + R\,\beta_k)\, x_k\, f(\sigma) + 2\sum [u_{s+\alpha} + R\,(p_{s+\alpha}\, u_{s+\alpha} - q_{s+\alpha}\, v_{s+\alpha})]\, f(\sigma).$$

Am obținut din nou o formă pătratică și condiția de stabilitate se obține cerînd ca $\mathcal{Re}\ \rho_j > 0$ și în plus un anumit determinant să fie pozitiv.

Un procedeu general de obținere a unor criterii simplificate a fost propus de I. G Malkin în 1951. Se presupune că $\rho_k$ sînt reale și distincte. Fie

$$W = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, x_\beta$$

o formă pătratică negativ definită și

$$F = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} B_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, x_\beta$$

unde $B_{\alpha\beta} = \dfrac{A_{\alpha\beta}}{\rho_\alpha + \rho_\beta}\cdot$

Avem

$$F = \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta} \int_0^\infty e^{-(\rho_\alpha + \rho_\beta)t}\, \mathrm{d}t\, x_\alpha\, x_\beta = \int_0^\infty [\sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, e^{-\rho_\alpha t}\, x_\beta\, e^{-\rho_\beta t}]\, \mathrm{d}t$$

și cum

$$\sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, e^{-\rho_\alpha t}\, x_\beta\, e^{-\rho_\beta t} \geqslant 0$$

rezultă că $F$ este pozitiv definită. Se alege

$$V = F + \int_0^\sigma f(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma.$$

Rezultă

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\sum B_{\alpha\beta}\,\{x_\alpha\,(-\rho_\beta\, x_\beta + f(\sigma)) + x_\beta\,(-\rho_\alpha\, x_\alpha + f(\sigma))\} +$$

$$+ f(\sigma)\,[\sum \beta_k\, x_k - r\, f(\sigma)] = -\frac{1}{2}\sum B_{\alpha\beta}\,(\rho_\alpha + \rho_\beta)\, x_\alpha\, x_\beta +$$

$$+ f(\sigma)\left[\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} (x_\alpha + x_\beta)\, B_{\alpha\beta} + \sum \beta_k\, x_k\right] - r\, f^2(\sigma) =$$

$$= W - r f^2(\sigma) + f(\sigma) \sum_\alpha \left[\beta_\alpha + \frac{1}{2}\sum_\beta (B_{\alpha\beta} + B_{\beta\alpha})\right] x_\alpha.$$

Considerînd pe $\frac{dV}{dt}$ ca o formă pătratică în $x_1, \ldots, x_{n+1}$ şi $f(\sigma)$, se obţine discriminantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} \ldots & A_{1,n+1} & P_1 \\ A_{21} \ldots & A_{2,n+1} & P_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n+1,1} \ldots & A_{n+1,n+1} & P_{n+1} \\ P_1 \ldots & P_{n+1} & 1 \end{vmatrix}, \quad P_\alpha = \frac{1}{2}\left\{ \beta_\alpha + \frac{1}{2}\sum_\beta (B_{\alpha\beta} + B_{\beta\alpha}) \right\}.$$

Deoarece $W$ este prin construcţie negativ definită, condiţia de stabilitate se reduce la $\Delta > 0$.

## § 2. STUDIUL INTRINSEC AL SISTEMELOR DE REGLARE

În cele de mai sus s-a studiat problema stabilităţii absolute pentru sistemele de forma

$$\frac{dy}{dt} Ay + bf(\sigma), \quad \sigma = c^* y,$$

unde se presupunea că matricea $A$ are valorile proprii cu părţi reale negative. Derivînd relaţia care defineşte pe $\sigma$ se obţine sistemul

$$\frac{dy}{dt} = Ay + bf(\sigma),$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = c^* Ay + c^* bf(\sigma).$$

Tot la sisteme de această formă se ajunge prin schimbări convenabile de variabile plecînd de la alte forme care intervin în teoria reglajului automat. Astfel, se consideră sisteme de forma

$$\frac{dy}{dt} = Ay + b\,\xi, \tag{3}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = f(\sigma),$$

$$\sigma = c^* y - r\xi.$$

Dacă punem $\dot{y} = x$, obţinem

$$\frac{dx}{dt} = A\,x + bf(\sigma),$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = c^* x - rf(\sigma), \tag{4}$$

Dacă matricea $\begin{pmatrix} A & b \\ c^* & -r \end{pmatrix}$ este nesingulară, cele două sisteme sînt echivalente din punctul de vedere al stabilităţii absolute.

În ultimii ani, S. Lefschetz ocupîndu-se de sisteme de această formă a pus problema în modul următor. Dacă $A$ are valori proprii cu părţi reale negative, conform teoremei lui Liapunov se poate alege o matrice $B$, pozitiv definită, astfel încît

$$BA + A^* B = -C,$$

oricare ar fi matricea $C$ pozitiv definită dată.

Se construieşte apoi funcţia Liapunov

$$V = (Bx, x) + \int_0^\sigma f(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma.$$

Derivata în virtutea sistemului are forma

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = (BAx, x) + (Bx, Ax) + (Bbf(\sigma), x) + (Bx, bf(\sigma)) +$$
$$+ f(\sigma)(c^* x - rf(\sigma)) = -(Cx, x) + 2(Bb, x) f(\sigma) + (c, x) f(\sigma) - rf^2(\sigma).$$

Considerînd pe $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ ca formă pătratică în $x$, $f(\sigma)$, condiţia ca $-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ să fie pozitiv definită este ca minorii diagonali principali ai matricii

$$\begin{pmatrix} C & -\left(Bb + \frac{1}{2}c\right) \\ -\left(Bb + \frac{1}{2}c\right)^* & r \end{pmatrix}$$

să fie pozitivi.

Deoarece prin ipoteză matricea $C$ a fost aleasă pozitiv definită, condiţia se reduce la:

$$\begin{vmatrix} C & -\left(Bb + \frac{1}{2}c\right) \\ -\left(Bb + \frac{1}{2}c\right)^* & r \end{vmatrix} > 0.$$

Prin ipoteză, $\det C > 0$, deci $\det C^{-1} > 0$, deci $\det \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > 0$.

Condiţia ca $-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ să fie pozitivă se poate deci scrie şi

$$\begin{vmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C & -\left(Bb + \frac{1}{2}c\right) \\ -\left(Bb + \frac{1}{2}c\right)^* & r \end{vmatrix} > 0.$$

Calculînd produsul celor doi determinanți ajungem la:

$$\begin{vmatrix} E & -C^{-1}\left(Bb+\frac{1}{2}c\right) \\ -\left(Bb+\frac{1}{2}c\right)^* & r \end{vmatrix} > 0$$

deci

$$r-\left(Bb+\frac{1}{2}c\right)^* C^{-1}\left(Bb+\frac{1}{2}c\right)>0.$$

Ajungem astfel la condiția $r > \left(Bb+\frac{1}{2}c\right)^* C^{-1}\left(Bb+\frac{1}{2}c\right)$.

Această condiție depinde de alegerea matricii $C$; vom obține cea mai bună condiție considerînd minimul după toate matricile $C$ pozitiv definite. Calculul acestui minim în cazul general nu a fost încă făcut. S. Lefschetz a considerat cazul cînd matricea $A$ este diagonală și matricea $C$ se ia tot în clasa matricilor diagonale.

Fie

$$A=\operatorname{diag}(-\mu_1,\ldots,-\mu_n),\ C=\operatorname{diag}(d_1,\ldots,d_n).$$

Avem

$$C^{-1}=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{d_1},\ldots,\frac{1}{d_n}\right);$$

rezultă

$$B=\operatorname{diag}\left(\frac{d_1}{2\mu_1},\ldots,\frac{d_n}{2\mu_n}\right).$$

$Bb$ are elementele $\frac{d_k b_k}{2\mu_k}$, $Bb+\frac{1}{2}c$ are elementele $\frac{1}{2}\left(\frac{d_k b_k}{\mu_k}+c_k\right)$,

$C^{-1}\left(Bb+\frac{1}{2}c\right)$ are elementele $\frac{1}{2}\left(\frac{b_k}{\mu_k}+\frac{c_k}{d_k}\right)$ și condiția de stabilitate devine

$$r>\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{4}\left(\frac{b_k}{\mu_k}+\frac{c_k}{d_k}\right)^2=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k\sqrt{d_k}}{\mu_k}+\frac{c_k}{\sqrt{d_k}}\right)^2.$$

Pentru indicii $k$ pentru care $b_k c_k<0$ se poate alege $d_k$ astfel încît $\frac{b_k\sqrt{d_k}}{\mu_k}+\frac{c_k}{\sqrt{d_k}}$ să fie nulă și aceasta este alegerea care dă minimul. Pentru indicii $k$ pentru care $b_k c_k>0$ termenul $\left(\frac{b_k\sqrt{d_k}}{\mu_k}+\frac{c_k}{\sqrt{d_k}}\right)^2$ e minim dacă $\frac{b_k\sqrt{d_k}}{\mu_k}=\frac{c_k}{\sqrt{d_k}}$ deci dacă $b_k d_k=c_k\mu_k$, $d_k=\frac{c_k\mu_k}{b_k}$ și atunci valoarea minimă este

$$\left(\frac{b_k}{\mu_k}\sqrt{\frac{c_k\mu_k}{b_k}}+c_k\sqrt{\frac{b_k}{c_k\mu_k}}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{b_kc_k}{\mu_k}}+\sqrt{\frac{b_kc_k}{\mu_k}}\right)^2=\frac{4b_kc_k}{\mu_k}.$$

Rezultă astfel condiția de stabilitate

$$r > \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k b_k c_k}{\mu_k},$$

unde

$$\varepsilon_k = 0 \quad \text{dacă} \quad b_k c_k \leqslant 0 \text{ și } \varepsilon_k = 1 \quad \text{dacă} \quad b_k c_k > 0.$$

Folosind o funcție Liapunov de formă modificată introdusă de V. M. Popov, T. Morozan a îmbunătățit aceste rezultate.

Să observăm mai întîi că o condiție necesară pentru stabilitatea absolută este $r + c^* A^{-1} b > 0$. Într-adevăr, dacă are loc stabilitatea absolută, atunci valorile proprii ale matricii $\begin{pmatrix} A & b \\ c^* & -r \end{pmatrix}$ au părți reale negative, căci trebuie să fie asigurată stabilitatea asimptotică și pentru $f(\sigma) = \sigma$. Dar produsul valorilor proprii este det $\begin{pmatrix} A & b \\ c^* & -r \end{pmatrix}$. Avem însă

$$\det \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} A & b \\ c^* & -r \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} E & A^{-1}b \\ c^* & -r \end{pmatrix} = -(r + c^* A^{-1} b),$$

deci

$$r + c^* A^{-1} b = -\det A^{-1} \det \begin{pmatrix} A & b \\ c^* & -r \end{pmatrix} = -\frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} A & b \\ c^* & -r \end{pmatrix}.$$

Prin ipoteză matricile $A$ și $\begin{pmatrix} A & b \\ c^* & -r \end{pmatrix}$ au valori proprii cu părți reale negative. Dacă o matrice are ordinul $k$ și valorile ei proprii au părți reale negative, produsul acestor valori proprii este pozitiv cînd $k$ e par și negativ cînd $k$ e impar (matricile sînt presupuse reale, deci rădăcinile complexe sînt în număr par și au produsul pozitiv); cum produsul valorilor proprii este egal cu determinantul matricii, rezultă că acest determinant e pozitiv cînd $k$ e par și negativ cînd $k$ e impar. Cum ordinele matricilor $A$ și $\begin{pmatrix} A & b \\ c^* & -r \end{pmatrix}$ diferă printr-o unitate, rezultă că det $A$ și det $\begin{pmatrix} A & b \\ c^* & -r \end{pmatrix}$ au semne diferite, deci $r + c^* A^{-1} b > 0$.

Fie acum $B$ ca mai înainte. Alegem funcția Liapunov de forma

$$V = (Bx, x) + \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma + \frac{p}{2(r + c^* A^{-1} b)} (c^* A^{-1} x - \sigma)^2.$$

Să observăm că fără a presupune că $\int^\infty f(\sigma)\, d\sigma$ diverge, funcția $V$ îndeplinește condițiile cerute pentru a fi asigurată stabilitatea asimptotică *în mare*; într-adevăr, dacă $|x| + |\sigma| \to \infty$ avem $V \to \infty$ căci pentru

$x = 0$, $|\sigma| \to \infty$ ultimul termen tinde la infinit. Derivata acestei funcții în virtutea sistemului este

$$\frac{dV}{dt} = (BAx,\ x) + (Bbf(\sigma),\ x) + (Bx,\ Ax) + (Bx, bf(\sigma)) +$$

$$+ f(\sigma)(c^*x - rf(\sigma)) + \frac{p}{r + c^*A^{-1}b}(c^*A^{-1}Ax + c^*A^{-1}bf(\sigma) -$$

$$- c^*x + rf(\sigma))(c^*A^{-1}x - \sigma) = -(Cx, x) + 2(Bb,\ x)f(\sigma) +$$

$$+ (c, x)f(\sigma) - rf^2(\sigma) - p\sigma f(\sigma) + pc^*A^{-1}xf(\sigma) = -(Cx, x) +$$

$$+ f(\sigma)(2Bb + c + pA^{-1}c, x) - rf^2(\sigma) - p\sigma f(\sigma).$$

Lăsînd la o parte ultimul termen care este negativ și considerînd restul ca pe o formă pătratică în $x, f(\sigma)$, condiția ca $-\frac{dV}{dt}$ să fie pozitiv definită este ca minorii diagonali principali ai matricii

$$\begin{pmatrix} C & Bb + \frac{1}{2}(E + pA^{-1})c \\ \left(Bb + \frac{1}{2}(E + pA^{-1})c\right)^* & -r \end{pmatrix}$$

să fie pozitivi. Aceleași calcule ca în cazul precedent conduc la condiția

$$r > M(C, p),$$

unde

$$M(C, p) = \left(Bb + \frac{1}{2}(E + pA^{-1})c\right)^* C^{-1}\left(Bb + \frac{1}{2}(E + pA^{-1})c\right).$$

Dacă

$$\min_{C > 0,\ p \geqslant 0} M(C, p) \leqslant -c^*A^{-1}b,$$

condiția necesară și suficientă de stabilitate absolută este $r > -c^*A^{-1}b$, căci dacă $r + c^*A^{-1}b > 0$, atunci avem și $r > M(C, p)$, pentru o matrice $C$ convenabil aleasă.

Să observăm că

$$\min_{C>0,\ p \geqslant 0} M(C, p) \leqslant \min_{C>0}\left(Bb + \frac{1}{2}c\right)^* C^{-1}\left(Bb + \frac{1}{2}c\right),$$

deci noua alegere a funcției Liapunov este mai convenabilă.

Să observăm de asemenea că dacă

$$r \geqslant \min_{C>0,\ p \geqslant 0} M(C, p) > -c^*A^{-1}b$$

stabilitatea absolută este asigurată. Într-adevăr, forma pătratică este numai semidefinită, dar ea poate fi nulă numai pentru $x = 0$, $\sigma \neq 0$ și atunci termenul $-p\sigma f(\sigma)$ este strict negativ.

Ţinînd seamă de cele de mai sus, apare problema calculării valorii $\min\limits_{C>0,\, p\geqslant 0} M(C,p)$. Nici acest calcul nu a fost efectuat în cazul general. Se pot obţine însă rezultate complete presupunînd că $A$ este diagonală şi căutînd ca mai sus pe $C$ în clasa matricilor diagonale. Să luăm ca mai sus $A = \operatorname{diag}(-\mu_i)$, $\mu_i > 0$, $C = (\gamma_{ij})$; se obţine $B = \left(\dfrac{\gamma_{ij}}{\mu_i + \mu_j}\right)$. Putem scrie

$$M(C, p) = (C^{-1}u, u), \quad u = Bb + \frac{1}{2}(E + pA^{-1})c,$$

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_{ij} b_j}{\mu_i + \mu_j} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p}{\mu_i}\right)c_i.$$

Deoarece $C > 0$, forma pătratică $(C^{-1}u,u)$ este pozitiv definită, deci

$$\min_{C>0,\, p\geqslant 0} M(C, p) \geqslant 0,$$

valoarea nulă putînd fi obţinută numai dacă $u = 0$. Să observăm că

$$c^* A^{-1} b = -\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i c_i}{\mu_i}.$$

Cînd $C$ este o matrice diagonală, $C = (\operatorname{diag} d_i)$:

$$u_i = \frac{d_i b_i}{2\mu_i} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p}{\mu_i}\right)c_i, \quad C^{-1}u = \left(\frac{b_i}{2\mu_i} + \frac{1}{2d_i}\left(1 - \frac{p}{\mu_i}\right)c_i\right),$$

$$M(C,p) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} d_i\left(\frac{b_i}{\mu_i} + \frac{1-\left(\dfrac{p}{\mu_i}\right)c_i}{d_i}\right)^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b_i\sqrt{d_i}}{\mu_i} + \frac{\left(1 - \dfrac{p}{\mu_i}\right)c_i}{\sqrt{d_i}}\right)^2.$$

Raţionînd ca mai sus deducem

$$\min_{C>0} M(C, p) = N(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i b_i c_i(\mu_i - p)}{\mu_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i b_i c_i}{\mu_i} - p\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i b_i c_i}{\mu_i^2},$$

$$\text{unde } \varepsilon_i = \begin{cases} 0 \text{ dacă } b_i c_i(\mu_i - p) < 0, \\ 1 \text{ dacă } b_i c_i(\mu_i - p) > 0. \end{cases}$$

Dacă

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} b_i c_i < 0$$

sau

$$\max_{i\in I} \mu_i < \min_{i\in J} \mu_j,$$

unde $I = \{i,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ b_i c_i > 0\}$, $J = \{j,\ 1 \leqslant j \leqslant n,\ b_j c_j > 0\}$ rezultă

$$\min_{C>0,\, p\geqslant 0} M(C,p) = 0;$$

într-adevăr, în primul caz putem lua

$$p < \min \mu_i,$$

iar în al doilea

$$\max_{i \in I} \mu_i < p < \min_{j \in J} \mu_j .$$

Se vede că în aceste cazuri minimul este efectiv atins pe matrici diagonale.

De asemenea, dacă $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} b_i c_i > 0$, luînd $p = 0$ rezultă

$$N(0) = \sum \frac{b_i c_i}{\mu_i} > 0$$

şi condiţia necesară şi suficientă de stabilitate absolută este $r > N(0)$.

Putem studia problema stabilităţii absolute căutînd funcţii Liapunov de forma

$$V = (Hx, x) + \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma,$$

unde $H$ este o matrice simetrică oarecare.

Asemenea studiu a fost făcut de V. A. Iakubovici. Derivata funcţiei $V$ în virtutea sistemului este

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (H\dot{x}, x) + (Hx, \dot{x}) + f(\sigma)\dot{\sigma} = (H(Ax + bf(\sigma)), x) + \\ &+ (Hx, Ax + bf(\sigma)) + f(\sigma)(c^* x - rf(\sigma)) = ((HA + A^* H)x, x) + \\ &+ 2(Hb, x) f(\sigma) + (c^* x) f(\sigma) - rf^2(\sigma) = -(Gx, x) - 2(g^* x) f(\sigma) - \\ &- rf^2(\sigma), \end{aligned}$$

unde am notat

$$-G = HA + A^* H, \quad -g = Hb + \frac{1}{2} C.$$

Mai departe,

$$\dot{V} = -\left\{\left(\left(G - \frac{1}{r} gg^*\right)x, x\right) + r\left(f(\sigma) + \frac{1}{r} g^* x\right)^2\right\}$$

căci

$$\frac{1}{r}(gg^* x, x) - \frac{1}{r}(g^* x)^2 = 0.$$

Într-adevăr, $gg^*$ este matricea cu elementele $g_i g_j$, deci

$$(gg^* x, x) \text{ este } \sum_{i,j} g_i g_j x_i x_j = (\sum g_i x_i)^2 = (g^* x)^2.$$

Rezultă că o condiţie suficientă ca $\dot{V}$ să fie negativă este ca forma

$$\left(\left(G - \frac{1}{r} gg^*\right)x, x\right)$$

să fie pozitiv definită.

Această condiție este și necesară. Să presupunem că există $x_0 \neq 0$ astfel ca

$$\left(\left(G - \frac{1}{r}\, g g^*\right) x_0, x_0\right) \leqslant 0\,;$$

fie $g^* x_0 \neq 0$. Alegem pe $\lambda$ din ecuația

$$\sqrt{r} f(\sigma_0) + \frac{\lambda}{\sqrt{r}}\, g^* x_0 = 0,$$

cu $\sigma_0$ fixat.

Atunci, pentru $x = \lambda\, x_0$, $\sigma = \sigma_0$ vom avea $r\left(f(\sigma) + \frac{1}{r}\, g^* x\right) = 0$ deci $\dot{V} \geqslant 0$. Dacă $g^* x_0 = 0$ se ia $x = x_0 \neq 0$, $\sigma = 0$ și rezultă din nou $\dot{V} \geqslant 0$. Prin urmare, dacă forma nu este pozitiv definită, nu putem avea $\dot{V}$ negativ definită.

TEOREMA 2.1. *Dacă există o matrice simetrică $H > 0$ astfel ca*

$$r G - g g^* > 0\ ^{*)},$$

$\left(\textit{unde}\ \ -G = HA + A^* H,\ \ -g = Hb + \frac{1}{2}\, c\right)$, *și dacă $A$ este hurwitziană*[**]) *iar $r + (A^{-1} b, c) > 0$, atunci soluția banală a sistemului (4) este absolut stabilă.*

*Demonstrație.* Din calculele făcute pînă acum rezultă că există funcția

$$V = (Hx, x) + \int_0^\sigma f(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma$$

a cărei derivată în virtutea sistemului este negativă. Prin urmare stabilitatea asimptotică a soluției banale este imediată. Dacă $\int_0^\infty f(\sigma)\, \mathrm{d}\,\sigma$ diverge, funcția $V$ îndeplinește condițiile cerute pentru stabilitatea asimptotică în mare. Folosind condiția $r + (A^{-1} b, c) > 0$ putem însă demonstra că are loc stabilitatea asimptotică în mare fără ipoteza că integrala diverge. Pentru aceasta vom lua

$$V_1 = V + \frac{p}{2\,(r + c^* A^{-1} b)}\, (c^* A^{-1}\, x - \sigma)^2.$$

Funcția $V_1$ îndeplinește condiția cerută pentru stabilitatea în mare

$$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + \frac{p}{r + c^* A^{-1} b} (c^* A^{-1}\, x - \sigma)\, (c^* A^{-1} A\, x + c^* A^{-1}\, b\, f(\sigma) -$$

$$- c^*\, x + r f(\sigma) = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + p\, f(\sigma)\, (c^*\, A^{-1}\, x - \sigma) = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} +$$

$$+ p\, f(\sigma)\, c^*\, A^{-1}\, x - p\, \sigma f(\sigma).$$

*) Dacă $G_1$ și $G_2$ sînt matrici simetrice, $G_1 > G_2$ înseamnă că forma pătratică $((G_1 - G_2)\, x, x)$ este pozitiv definită.

**) Numim hurwitziană o matrice ale cărei valori proprii au părți reale negative.

Din ipotezele teoremei rezultă că $\frac{dV}{dt}$ este o formă pătratică negativ definită în $x$ şi $f(\sigma)$; pentru $p$ suficient de mic şi forma pătratică $\frac{dV}{dt} + p f(\sigma) c^* A^{-1} x$ este negativ definită, deci $\frac{dV_1}{dt}$ este negativ definită. Teorema este demonstrată. Această teoremă a fost demonstrată pe o cale ocolită de V. A. Iakubovici[1]). Ideia de a considera funcţia $V_1$ în locul funcţiei $V$ aparţine lui V. M. Popov.

Problema practică ce se pune acum este aceea de a da condiţiei din enunţ o formă cît mai simplă şi mai uşor de verificat. Pentru aceasta observăm că această condiţie se poate scrie

$$-\rho(A^*H + HA) - \left(Ha + \frac{1}{2}b\right)\left(a^* H_1 + \frac{1}{2}b^*\right) = \frac{\rho}{2}C > 0$$

sau

$$Haa^* H + B^*H + HB + \frac{1}{4}bb^* + \frac{\rho}{2}C = 0,$$

unde am pus $B = \rho A + \frac{1}{2}ab^*$. Această condiţie poate fi privită ca o ecuaţie în raport cu $H$ pentru fiecare $C > 0$ fixat. Condiţia de stabilitate se poate obţine deci fie alegînd pe $H > 0$ arbitrar şi punînd condiţia ca $C > 0$, fie invers, alegînd pe $C > 0$ arbitrar şi cerînd ca ecuaţia să admită o soluţie $H > 0$. Vom merge pe cel de-al doilea drum şi vom încerca să ajungem la condiţii cît mai simple.

LEMA 1. *Dacă valorile proprii ale matricii $K$ au părţi reale negative, soluţia $X$ a ecuaţiei $K^*X + XK = -C$ e unică şi dată de formula*

$$X = \int_0^\infty e^{K^*t} C e^{Kt}\, dt.$$

*Dacă $C > 0$, atunci $X > 0$. Dacă $C \geqslant 0$, atunci $X \geqslant 0$. Dacă $C > 0$ şi $X > 0$, atunci $K$ e hurwitziană.*

*Demonstraţie.* Ecuaţia $K^*X + XK = -C$ exprimă faptul că derivata funcţiei $(Xx, x)$ în virtutea sistemului $\frac{dx}{dt} = Kx$ este egală cu $-(Cx,x)$. Din teorema lui Liapunov rezultă că dacă matricea $K$ e hurwitziană, atunci pentru orice $C$ ecuaţia precedentă are soluţie unică. Faptul că matricea $X$ e dată de formula din enunţ rezultă din teorema 1.6″.

Într-adevăr, dacă

$$V = \int_t^\infty (Ce^{K(s-t)}x, e^{K(s-t)}x)\, ds$$

[1]) Recent, problema a fost reluată pe aceeaşi cale de către J. P. La Salle, care a demonstrat că dacă $r > g^* G^{-1} g$, atunci condiţia $r + c^* A^{-1} b > 0$ este îndeplinită.

avem

$$V = \int_0^\infty (Ce^{Ks}x,\ e^{Ks}x)\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty (e^{K^*s}Ce^{Ks}x,\ x)\,\mathrm{d}s = (Xx,\ x)$$

cu $X = \int_0^\infty e^{K^*s}\,Ce^{Ks}\,\mathrm{d}s$ și $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\,(Cx,x)$. Soluția ecuației fiind unică ea rezultă dată de formula din enunț.

Faptul că $C \geqslant 0$ implică $X \geqslant 0$ și $C > 0$ implică $X > 0$ se vede direct din formulă. Dacă $C > 0$ și $X > 0$ soluția banală a sistemului $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Kx$ este asimptotic stabilă și matricea $K$ e hurwitziană.

LEMA 2. *Fie*

$$Haa^*H + B^*H + HB + \frac{1}{4}bb^* + \frac{\rho}{2}C = 0,\quad B = \rho A + \frac{1}{2}ab^*,\ \textit{unde}\ C > 0,$$

*iar* $H$ *e simetrică. Presupunem că există* $0 \leqslant \nu \leqslant 1$ *astfel încît* $K_\nu = \rho A + \nu ab^*$ *să fie hurwitziană. Atunci* $H > 0$ *și* $K_\nu$ *e hurwitziană pentru orice* $\nu \in (0,1)$.

*Demonstrație*. Fie

$$C_\mu = \frac{\rho}{2}C + (\mu Ha + \frac{1}{2}b)(\mu Ha + \frac{1}{2}b)^*;$$

evident $C_\mu > 0$.

Din enunț,

$$\frac{\rho}{2}C = -\ Haa^*H - \left(\rho A^* + \frac{1}{2}ba^*\right)H - H\left(\rho A + \frac{1}{2}ab^*\right) - \frac{1}{4}bb^* =$$

$$= -Haa^*H - \rho(A^*H + HA) - \frac{1}{2}(ba^*H + Hab^*) - \frac{1}{4}bb^*.$$

Rezultă

$$C_\mu = -\ Haa^*H - \left(\rho A^* + \frac{1}{2}ba^*\right)H - H\left(\rho A + \frac{1}{2}ab^*\right) - \frac{1}{4}bb^* +$$

$$+ \mu^2 Haa^*H + \frac{1}{2}\mu\, b(Ha)^* + \frac{1}{2}\mu Hab^* + \frac{1}{4}bb^* = (\mu^2 - 1)Haa^*H -$$

$$- [\rho A^* + \frac{1}{2}(1-\mu)\,ba^*]\,H - H\left[\rho A + \frac{1}{2}(1-\mu)\,ab^*\right] =$$

$$= -\,(1-\mu^2)\,Haa^*H - K_\nu^*H - HK_\nu$$

unde am pus

$$\nu = \frac{1}{2}(1-\mu).$$

Relația obținută se mai poate scrie

$$K_\nu^*H + HK_\nu = -\ C_\mu - (1-\mu^2)\,Haa^*H.$$

Fie acum $\nu$ ca în enunţ. Alegem pe $\mu = 1 - 2\nu$; dacă $0 \leqslant \nu \leqslant 1$ rezultă $|\mu| \leqslant 1$ deci $C_\mu + (1 - \mu^2) Haa^*H > 0$. Pe baza lemei 1 această ecuaţie are o soluţie $H$ unică şi $H > 0$. Pentru orice $\nu \in [0,1]$ avem $C_\mu + (1 - \mu^2) Haa^* H > 0$ şi $H > 0$ deci $K_\nu$ rezultă hurwitziană.

*Din această lemă rezultă în particular că dacă ecuaţia în $H$ care exprimă condiţia de stabilitate admite o soluţie simetrică, atunci această soluţie este şi pozitiv definită.*

Într-adevăr, $A$ fiind hurwitziană, $K_0$ este hurwitziană, deci $H > 0$.

Sistemul de ecuaţii care determină elementele matricii $H$ este un sistem de $\frac{n(n+1)}{2}$ ecuaţii de gradul doi. Vom reduce problema la condiţia ca un sistem de $n$ ecuaţii de gradul doi să aibă soluţii reale.

Definim operatorul $Y = L(X)$ prin formula

$$A^*Y + YA = -X$$

ceea ce este posibil deoarece pe baza lemei 1, pentru orice $X$ formula defineşte un $Y$ şi numai unul, care e pozitiv o dată cu $X$. Conform lemei 1 avem explicit

$$L(X) = \int_0^\infty e^{A^*t} X e^{At} \, dt.$$

Notăm

$$-u = Ha + \frac{1}{2} b.$$

Ecuaţia care exprimă condiţia de stabilitate se scrie

$$\rho (A^* H + HA) = -\frac{\rho}{2} C - uu^*$$

şi ţinînd seama de definiţia lui $L(X)$ rezultă

$$\rho H = L(uu^*) + \frac{1}{2} \rho L(C).$$

De aici, înmulţind cu $a$ şi adăugînd $\frac{1}{2} \rho b$, deducem

$$-\rho u = L(uu^*) a + \frac{1}{2} \rho (b + L(C) a).$$

Notînd $c = L(C) a$, ajungem la ecuaţia

$$L(uu^*) a + \rho u + \frac{1}{2} \rho (b + c) = 0.$$

Să presupunem că pentru $C > 0$ dat, această ecuaţie are o soluţie reală $u$. Atunci matricea $H$ determinată de relaţia

$$\rho H = L(uu^*) + \frac{1}{2} \rho L(C)$$

este simetrică, pozitiv definită, şi verifică relaţia

$$\rho (A^*H + HA) = -\frac{\rho}{2} C - uu^*,$$

deci condiţia de stabilitate este îndeplinită.

Rezultă astfel:

TEOREMA 2.1′. *Dacă $A$ e hurwitziană, $\Gamma^2 = \rho + (A^{-1}a, b) > 0$ şi dacă există $C > 0$ astfel încît punînd $c = L(C)\,a$ ecuaţia*

$$L(uu^*)\,a + \rho\, u + \frac{1}{2}\rho (b + c) = 0$$

*să admită o soluţie $u$ reală, atunci soluţia banală a sistemului este absolut stabilă.*

Notînd $U = L(uu^*)$, $T = L(C)$, obţinem ecuaţiile

$$A^*T + TA = -C,\ c = Ta,\quad A^*U + UA = -uu^*,$$

$$Ua + \rho u + \frac{1}{2}\rho (b + c) = 0.$$

Să vedem ce devin ecuaţiile în cazul cînd $A$ admite o formă normală diagonală şi valorile proprii ale lui $A$ sînt reale. Vom nota $u = (u_i)$, $U = (\eta_{ij})$. Există o bază în care $A$ este diagonală şi componentele lui $a$ egale cu 1 (forma canonică a lui Lurie). Ecuaţiile precedente devin în această bază

$$-(\rho_j + \rho_i)\,\eta_{ij} = -u_i u_j,\quad \sum_j \eta_{ij} + \rho u_i + \frac{1}{2}\rho (b_i + c_i) = 0,$$

deci

$$u_i \sum_j \frac{u_j}{\rho_i + \rho_j} + \rho u_i + \frac{1}{2}\rho (b_i + c_i) = 0$$

şi se vede că ele sînt de aceeaşi formă cu cele obţinute în paragraful precedent.

CONSECINŢĂ. *În cazul cînd $a$ e vector propriu al matricii $A$ sau $b$ e vector propriu al matricii $A^*$, condiţia $\Gamma^2 > 0$ este necesară şi suficientă pentru stabilitatea absolută.*

*Demonstraţie.* Fie $Aa = -\alpha\, a$, $\alpha > 0$. Din $A^*U + UA = -uu^*$ se capătă, înmulţind cu $a$, $(A^* - \alpha I)\,Ua = -(u, a)\,u$, deci $Ua = -(u, a)(A^* - \alpha I)^{-1} u$ (det $(A^* - \alpha I) \neq 0$ căci $\alpha > 0$ şi $A$ e hurwitziană). Din aceeaşi relaţie, înmulţind la stînga cu $a^*A^{*-1}$ şi la dreapta cu $A^{-1}a$, căpătăm

$$a^*UA^{-1}a + a^*A^{*-1}Ua = -a^*A^{*-1}uu^*A^{-1}a,$$

sau

$$(A^{-1}a, Ua) + (Ua, A^{-1}a) = -(A^{-1}a, u)^2,$$

deci

$$2\,(Ua,\; A^{-1}\,a) = -\,(A^{-1}\,a,\, u)^2.$$

Notăm $\zeta = \frac{1}{\sqrt{\rho}}(u, A^{-1}\,a)$. Din ecuația

$$Ua + \rho\, u + \frac{1}{2}\,\rho\,(b + c) = 0$$

deducem

$$Ua = -\,\rho\, u - \frac{1}{2}\,\rho\,(b + c).$$

Rezultă

$$-\,2\left(\rho\, u + \frac{1}{2}\,\rho\,(b + c),\; A^{-1}\,a\right) = -\,\rho\,\zeta^2,$$

deci

$$\rho\,\zeta^2 - 2\,\rho\sqrt{\rho}\,\zeta - \rho\,(b + c,\; A^{-1}\,a) = 0$$

deci

$$\zeta^2 - 2\sqrt{\rho}\,\zeta - (b + c,\, A^{-1}\,a) = 0,\quad \zeta = \sqrt{\rho} \pm \sqrt{\rho + (b+c,\, A^{-1}\,a)}\,.$$

Notînd $\tilde{\Gamma}^2 = \rho + (b + c, A^{-1}\,a)$ rezultă $\zeta = \sqrt{\rho} \pm \tilde{\Gamma}$.

Din $Aa = -\,\alpha\, a$ rezultă

$$a = -\,\alpha\; A^{-1}\; a,\quad A^{-1}a = -\frac{1}{\alpha}\,a,$$

deci

$$\zeta = -\,\frac{1}{\alpha\sqrt{\rho}}(u, a),$$

deci

$$(u, a) = -\,\alpha\sqrt{\rho}\;[\sqrt{\rho} \pm \tilde{\Gamma}].$$

Din $Ua = -\,(u, a)\;(A^* - \alpha\, I)^{-1}\, u$ rezultă acum

$$-\,\rho\, u - \frac{1}{2}\;\rho\,(b + c) = \alpha\sqrt{\rho}\;[\sqrt{\rho} \pm \tilde{\Gamma}]\;(A^* - \alpha\, I)^{-1}\, u,$$

deci

$$-\,\frac{1}{2}\,\rho\,(A^* - \alpha\, I)\;(b + c) = \rho\left(A^* \pm \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}}\,\tilde{\Gamma} I\right) u.$$

Rezultă în definitiv

$$u = -\,\frac{1}{2}\left(A \pm \frac{\alpha\,\tilde{\Gamma}}{\sqrt{\rho}}\, I\right)^{-1}(A^* - \alpha\, I)\,(b + c).$$

Se vede că ecuaţia în $u$ are soluţie reală dacă şi numai dacă $\widetilde{\Gamma}$ e real, deci $\widetilde{\Gamma}^2 > 0$. Dar $\widetilde{\Gamma}^2 = \Gamma^2 + (c, A^{-1} a)$.

Avem

$$A^* T + TA = - C, \quad c = Ta, \quad (c, A^{-1}a) = (A^{*-1} Ta, a);$$

$$T + A^{*-1}TA = - A^{*-1}C, \quad A^{*-1} T + TA^{-1} = - A^{*-1} CA^{-1},$$

deci

$$(A^{*-1} Ta, a) = - \frac{1}{2}(A^{*-1} CA^{-1} a, a) = - \frac{1}{2}(CA^{-1} a, A^{-1} a) < 0.$$

Dacă $\Gamma^2 > 0$ pentru $c$ suficient de mic rezultă $\widetilde{\Gamma}^2 > 0$, deci există soluţie $u$ reală, deci conform teoremei 2.1′ are loc stabilitatea absolută.

Să considerăm acum cazul cînd $b$ e vector propriu al matricii $A^*$. Fie $(x, \sigma)$ o soluţie, $\xi=(b, x)$. Avem

$$\frac{d\xi}{dt} = \left(b, \frac{dx}{dt}\right) = (b, Ax) + (b,a) f(\sigma) = (A^* b, x) + (b, a)f(\sigma) =$$

$$= - \beta (b, x) + (b, a) f(\sigma),$$

deci

$$\frac{d\xi}{dt} = - \beta \xi + (b, a) f(\sigma), \qquad \frac{d\sigma}{dt} = \xi - \rho f(\sigma).$$

Am obţinut un sistem cu $n = 1$, $A = - \beta$, $b = 1$, iar $a$ se înlocuieşte cu $(b,a)$. Relaţia $A^* T + T A = - C$ devine în acest caz $- 2 \beta T = - C$ deci $T > 0$ şi din $c = T (b, a)$ rezultă că $c$ are acelaşi semn cu $(b,a)$. Relaţia $A^* U + UA = - uu^*$ devine

$$- 2 \beta U = - u^2, \; u^2 = 2 \beta U, \; U = \frac{1}{2\beta} u^2,$$

iar ecuaţia fundamentală devine

$$\frac{(b, a)}{2\beta} u^2 + \rho u + \frac{1}{2} \rho (1 + c) = 0$$

sau

$$(b, a) u^2 + 2 \rho \beta u + \rho \beta (1 + c) = 0$$

Ecuaţia are rădăcină reală dacă şi numai dacă $\rho^2 \beta^2 - \rho \beta (b, a) (1 + c) > 0$ sau $\rho \beta - (b, a) (1 + c) > 0$. Această condiţie este îndeplinită dacă şi numai dacă $\rho - \frac{1}{\beta}(b,a) > 0$ ceea ce coincide cu $\Gamma^2 > 0$, căci $(b, A^{-1} a) =$

$$= (A^{*-1} b, a) = - \frac{1}{\beta}(a, b).$$

Rezultă că dacă $\Gamma^2 > 0$, $\sigma(t) \to 0$ pentru orice soluție, deci $f(\sigma(t)) \to 0$ pentru orice soluție și din formula

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} af [\sigma(s)] \, ds$$

rezultă imediat că $x(t) \to 0$ cînd $t \to \infty$ deci are loc stabilitatea absolută.

## § 3. METODA LUI V. M. POPOV

O metodă principial nouă, bazată pe folosirea transformatei, Fourier, a fost dată în studiul stabilității absolute a sistemelor de reglare automată de V. M. Popov.

Metoda lui Popov conduce la rezultate în același timp mai puternice și mai efective decît cele prezentate în paragrafele precedente.

Vom considera sistemul

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bf(\sigma), \quad \frac{d\xi}{dt} = f(\sigma), \quad \sigma = c^* x - \gamma \xi, \quad \gamma > 0. \tag{5}$$

Vom presupune, ca mai înainte, că matricea $A$ este hurwitziană. Notăm

$$\nu(t) = -c^* e^{At} b, \quad N(i\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t} \nu(t) \, dt, \quad G(i\omega) = N(i\omega) + \frac{\gamma}{i\omega}.$$

TEOREMA 2.2. *Dacă există $q > 0$ astfel încît pentru toți $\omega \geqslant 0$ să avem $\mathcal{Re}\,(1 + i\omega q)\, G(i\omega) \geqslant 0$, atunci soluția banală a sistemului (5) este absolut stabilă.*

*Demonstrație.* Fie $x(t)$, $\xi(t)$ o soluție a sistemului (5).

$$\text{Notăm } f_T(t) = \begin{cases} f[\sigma(t)] & \text{pentru } 0 \leqslant t \leqslant T, \\ 0 & \text{pentru } t > T. \end{cases}$$

Definim funcția

$$\lambda_T(t) = -\int_0^t \nu(t-\tau) f_T(\tau) \, d\tau - q \int_0^t \frac{d\nu(t-\tau)}{dt} f_T(\tau) \, d\tau - q[\nu(0) + \gamma] f_T(t).$$

Pentru a vedea semnificația acestei funcții vom face unele calcule. Avem

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + b\, f[\sigma(t)].$$

Pe baza formulei variației constantelor rezultă

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} b\, f[\sigma(\tau)] \, d\tau$$

deci

$$\sigma(t) = c^* e^{At} x(0) + \int_0^t c^* e^{A(t-\tau)} b f[\sigma(\tau)] \, d\tau - \gamma \xi(t).$$

Dar $c^* e^{A(t-\tau)} b = -\nu(t-\tau)$; notăm $c^* e^{At} = \mu^*(t)$.
Rezultă

$$\sigma(t) = \mu^*(t) x(0) - \int_0^t \nu(t-\tau) f[\sigma(\tau)] \, d\tau - \gamma \xi(t).$$

De aici

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{d\mu^*(t)}{dt} x(0) - \nu(0) f[\sigma(t)] - \int_0^t \frac{d\nu(t-\tau)}{dt} f[\sigma(\tau)] \, d\tau - \gamma \frac{d\xi(t)}{dt}.$$

Dar

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = f[\sigma(t)],$$

deci

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{d\mu^*(t)}{dt} x(0) - \int_0^t \frac{d\nu(t-\tau)}{dt} f[\sigma(\tau)] \, d\tau - (\nu(0) + \gamma) f[\sigma(t)].$$

Pentru $0 \leqslant t \leqslant T$ putem deci scrie

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{d\mu^*(t)}{dt} x(0) - \int_0^t \frac{d\nu(t-\tau)}{dt} f_T(\tau) \, d\tau - [\nu(0) + \gamma] f_T(t).$$

Rezultă

$$\lambda_T(t) = -\int_0^t \nu(t-\tau) f_T(\tau) \, d\tau + q \frac{d\sigma(t)}{dt} - q \frac{d\mu^*(t)}{dt} x(0) \text{ pentru } 0 \leqslant t \leqslant T$$

sau

$$\lambda_T(t) = \sigma(t) + q \frac{d\sigma(t)}{dt} + \gamma \xi(t) - \left[\mu^*(t) + q \frac{d\mu^*(t)}{dt}\right] x(0) \text{ pentru } 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Pentru $t > T$, rezultă, ţinînd seama de definiţia funcţiei $f_T(t)$, relaţia

$$\lambda_T(t) = -\int_0^T \nu(t-\tau) f_T(\tau) \, d\tau - q \int_0^T \frac{d\nu(t-\tau)}{dt} f_T(\tau) \, d\tau.$$

Deoarece matricea $A$ este hurwitziană, avem

$$|e^{At}| \leqslant K_1 e^{-K_0 t} \text{ pentru } t \geqslant 0, \text{ deci } |\nu(t)| \leqslant K_2 e^{-K_0 t}.$$

Rezultă $|\lambda_T(t)| \leqslant K_3 e^{-K_0 t}$ pentru $t \geqslant T$, deci $\lambda_T(t)$ admite transformata Fourier. Fie

$$L_T(i\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t} \lambda_T(t) \, dt, \quad F_T(i\omega) = \int_0^\omega e^{-i\omega t} f_T(t) \, dt.$$

Avem

$$\int_0^\infty e^{-i\omega t}\frac{d\nu(t)}{dt}dt = e^{-i\omega t}\nu(t)\Big|_0^\infty + i\omega\int_0^\infty e^{-i\omega t}\nu(t)dt = i\,\omega N(i\,\omega) - \nu(0).$$

Se ştie din teoria transformatei Fourier că dacă

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau,$$

atunci transformata Fourier a lui $h$ este produsul transformatelor Fourier ale funcţiilor $f$ şi $g$. Ţinînd seama de aceasta rezultă

$$L_T(i\,\omega) = -N(i\,\omega)\,F_T(i\,\omega) - q\,[i\,\omega N\,(i\,\omega) - \nu\,(0)]\,F_T(i\,\omega) -$$
$$- q\,[\nu(0) + \gamma]\,F_T(i\,\omega) = -F_T(i\omega)\,[(1 + i\,\omega\,q)\,N(i\,\omega) + q\,\gamma].$$

Considerăm funcţia

$$\rho(T) = \int_0^\infty \lambda_T(t) f_T(t)\,dt.$$

Ţinînd seama de felul cum au fost definite $\lambda_T$ şi $f_T$ rezultă

$$\rho(T) = \int_0^T \lambda_T(t) f[\sigma(t)]\,dt = \int_0^T \sigma(t) f[\sigma(t)]\,dt + q\int_0^T f[\sigma(t)]\frac{d\,\sigma(t)}{dt}\,dt +$$
$$+\gamma\int_0^T \xi(t) f[\sigma(t)]\,dt - \int_0^T f_T(t)\left[\mu^*(t) + q\,\frac{d\mu^*}{dt}\right]x(0)\,dt =$$
$$= \int_0^T \sigma(t) f[\sigma(t)]\,dt + q\int_{\sigma(0)}^{\sigma(T)} f(\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{2}\gamma\,[\xi^2(T) - \xi^2(0)] -$$
$$-\int_0^T f_T(t)\left[\mu^*(t) + q\,\frac{d\mu^*(t)}{dt}\right]x(0)\,dt.$$

Am folosit faptul că $f[\sigma(t)] = \dfrac{d\xi(t)}{dt}$, deci $\xi(t) f[\sigma(t)] = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\,\xi^2(t)$.

În teoria transformatei Fourier se demonstrează următoarea formulă fundamentală

$$\int_0^\infty f_1 f_2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \mathcal{R}e\,F_1\,(i\,\omega)\,F_2\,(-i\,\omega)\,d\,\omega,$$

valabilă pentru $f_1$ şi $f_2$ din $L_1 \cap L_2$.

Funcţiile $\lambda_T(t)$ şi $f_T(t)$ îndeplinesc aceste condiţii deci putem scrie

$$\rho(T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \mathcal{R}e\,L_T(i\,\omega)F_T(-i\,\omega)\,d\omega =$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \mathcal{R}e[(1 + i\,\omega q)N(i\,\omega) + q\,\gamma]F_T(i\,\omega)F_T(-i\omega)\,d\omega =$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \mathcal{R}e[(1 + i\,\omega\,q)\,N(i\,\omega) + q\,\gamma]\,|F_T(i\,\omega)|^2\,d\omega.$$

Avem

$$q\gamma = (1 + i\,\omega\, q)\frac{\gamma}{i\,\omega} - \frac{\gamma}{i\,\omega},$$

deci

$$(1 + i\,\omega\, q)\,N(i\,\omega) + q\,\gamma = (1 + i\,\omega\, q)\,N(i\,\omega) + (1 + i\,\omega\, q)\frac{\gamma}{i\,\omega} - \frac{\gamma}{i\,\omega} =$$

$$= (1 + i\,\omega\, q)\left(N(i\,\omega) + \frac{\gamma}{i\,\omega}\right) - \frac{\gamma}{i\,\omega} = (1 + i\omega q)\;G\,(i\,\omega) - \frac{\gamma}{i\,\omega}.$$

Dar $|F_T(i\,\omega)|^2$ este real, deci

$$\mathcal{Re}\,[(1 + i\,\omega\, q)\,N(i\,\omega) + q\,\gamma]\,|F_T(i\,\omega)|^2 =$$

$$= |F_T(i\,\omega)|^2\,\mathcal{Re}\,[(1 + i\,\omega q)\,N(i\,\omega) + q\gamma =$$

$$= |F_T(i\,\omega)|^2\;\mathcal{Re}\left[(1 + \quad + i\,\omega\, q)\,G\,(i\,\omega) - \frac{\gamma}{i\,\omega}\right] =$$

$$= |F_T(i\,\omega)|^2\,\mathcal{Re}\,(1 + i\,\omega\, q)\,G\,(i\,\omega) \geqslant 0$$

conform ipotezei din enunț. Rezultă

$$\rho\,(T) \leqslant 0.$$

Stabilim următoarea inegalitate

$$\left|\int_0^T f_T(t)\left[\mu^*(t) + q\frac{d\mu^*(t)}{dt}\right]dt\right| \leqslant K_4 \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\xi(t)|.$$

Avem

$$\int_0^T\left[\mu^*(t) + q\frac{d\mu^*(t)}{dt}\right]f_T(t)\,d\,t = \int_0^T\left[\mu^*(t) + q\frac{d\,\mu^*(t)}{d\,t}\right]\frac{d\,\xi(t)}{d\,t}\,d\,t =$$

$$= \left[\mu^*(t) + q\frac{d\,\mu^*(t)}{d\,t}\right]\xi\,(t)\Big|_0^T - \int_0^T \xi\,(t)\left[\frac{d^*\,\mu\,(t)}{d\,t} + q\,\frac{d^2\,\mu^*(t)}{d\,t^2}\right]d\,t.$$

Dar

$$\mu^*(t) = c^*e^{At},\quad \frac{d\mu^*(t)}{d\,t} = c^*Ae^{At},\quad \frac{d^2\,\mu^*}{d\,t^2} = c^*A^2e^{At},$$

deci

$$|\,\mu^*(t)\,| \leqslant |\,c\,|\,K_1\,e^{-K_0 t},\quad \left|\frac{d\,\mu^*}{d\,t}\right| \leqslant |c\,|\,|\,A\,|K_1 e^{-K_0 t},$$

$$\left|\frac{d^2\,\mu^*(t)}{d\,t^2}\right| \leqslant |c\,|\,|\,A\,|^2\,K_1\,e^{-K_0 t}.$$

Rezultă

$$\left|\int_0^T\left[\mu^*(t)+q\frac{d\mu^*(t)}{dt}\right]f_T(t)\,dt\right|\leqslant|c|\,K_1 e^{-K_0T}|\xi(T)|+$$

$$+q|c||A|K_1 e^{-K_0T}|\xi(T)|+q|c|A|K_1|\xi(0)|+qK_1|\xi(0)|+$$

$$+\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi(t)|\int_0^T|c||A|K_1(1+q|A|)e^{-K_0t}\,dt\leqslant|c|K_1(1+q|A|)(|\xi(T)|+$$

$$+|\xi(0)|)+\frac{|c||A|K_1(1+q|A|)}{K_0}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi(t)|\leqslant K_4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi(t)|$$

şi inegalitatea este demonstrată.

Notînd

$$\Phi(\sigma)=\int_0^\sigma f(\sigma)\,d\sigma,$$

din $\rho(T)\leqslant 0$ deducem

$$\int_0^T\sigma(t)f[\sigma(t)]\,dt+q\,\Phi[\sigma(T)]+\frac{1}{2}\gamma\,\xi^2(T)\leqslant q\,\Phi[\sigma(0)]+$$

$$+\frac{1}{2}\gamma\,\xi^2(0)+K_4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi(t)||x(0)|.$$

Deoarece $\sigma f(\sigma)>0$ şi $\Phi(\sigma)>0$, rezultă în particular

$$\frac{1}{2}\gamma\,\xi^2(T)\leqslant K_4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi(t)||x(0)+q\,\Phi[\sigma(0)]+\frac{1}{2}\gamma\,\xi^2(0).$$

Cum inegalitatea a fost stabilită pentru orice $T$, putem scrie pentru $T_1\leqslant T$:

$$\frac{1}{2}\gamma\,\xi^2(T_1)\leqslant K_4|x(0)|\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}|\xi(t)|+q\,\Phi[\sigma(0)]+\frac{1}{2}\gamma\,\xi^2(0)\leqslant$$

$$\leqslant K_4|x(0)|\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi(t)|+|q\Phi[\sigma(0)]+\frac{1}{2}\gamma\,\xi^2(0)$$

deci

$$\frac{1}{2}\gamma\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\xi^2(t)\leqslant K_4|x(0)|\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi(t)|+q\Phi[\sigma(0)]+\frac{1}{2}\gamma\,\xi^2(0).$$

Dar

$$(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi(t)|)^2\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\xi^2(t),$$

deci

$$\frac{1}{2}\gamma\,(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi(t)|)^2-K_4|x(0)|\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi(t)|-q\Phi[\sigma(0)]-\frac{1}{2}\gamma\,\xi^2(0)\leqslant 0.$$

De aici rezultă că

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\xi(t)| \leqslant \frac{K_4|x(0)| + \sqrt{K_4^2|x(0)|^2 + 2\gamma\left[q\Phi[\sigma(0)] + \frac{1}{2}\gamma\,\xi^2(0)\right]}}{\gamma}$$

deci

$$|\xi(t)| \leqslant \Phi_1(|x(0)|,\ |\xi(0)|)$$

ceea ce implică stabilitatea în raport cu componenta $\xi$.

Stabilim acum inegalitatea

$$|x(t)| \leqslant K_1|x(0)| + K_5 \sup_{0\leqslant\tau\leqslant t} |\xi(\tau)|.$$

Avem

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\, bf[\sigma(\tau)]\,d\tau = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\, b\,\frac{d\,\xi(\tau)}{d\tau}\,d\tau =$$

$$= e^{At}x(0) + e^{A(t-\tau)}\, b\,\xi(\tau)\Big|_0^t + \int_\sigma^t A\,e^{A(t-\tau)}\, b\,\xi(\tau)\,d\tau = e^{At}x(0) +$$

$$+ b\,\xi(t) - e^{At}b\ \xi(0) + \int_0^t A\,e^{A(t-\tau)}\, b\,\xi(\tau)\,d\tau.$$

Rezultă

$$|x(t)| \leqslant K_1|x(0)| + |b| \sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}|\xi(\tau)| + K_1|b| \sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}|\xi(\tau)| +$$

$$+ \frac{K_1}{K_0}|A||b| \sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}|\xi(\tau)|$$

deci în definitiv

$$|x(t)| \leqslant K_1|x(0)| + K_5 \sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}|\xi(\tau)|.$$

Ţinînd seama de evaluarea obţinută pentru $|\xi(t)|$ rezultă

$$|x(t)| \leqslant \Phi_2(|x(0)|,\ |\xi(0)|),$$

deci soluţia banală a sistemului este stabilă.

Rămîne de demonstrat că

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \xi(t) = 0.$$

Tot din inegalitatea fundamentală obţinută plecînd de la $\rho\ (T) \leqslant 0$ deducem

$$\int_0^T \sigma(t) f[\sigma(t)]\,dt \leqslant K_4|x(0)| \sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi(t)| + q\,\Phi[\sigma(0)] + \frac{1}{2}\gamma\,\xi^2(0),$$

deci

$$\int_0^T \sigma(t)\,f[\sigma(t)]\,dt \leqslant \Phi_3\ (|x(0)|,\ |\xi(0)|].$$

Pe de altă parte,

$$\frac{\mathrm{d}\,\sigma(t)}{\mathrm{d}\,t} = c^* \frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t} - \gamma \frac{\mathrm{d}\,\xi(t)}{\mathrm{d}\,t} = c^*(Ax(t) + bf[\sigma(t)]) - \gamma f[\sigma(t)],$$

$$\sigma(t) = c^* x(t) - \gamma \xi(t)$$

deci

$$|\sigma(t)| \leqslant \Phi_4(|x(0)|, |\xi(0)|),$$

deci

$$|f[\sigma(t)]| \leqslant \Phi_5(|x(0)|, |\xi(0)|)$$

deci

$$\left|\frac{\mathrm{d}\,\sigma(t)}{\mathrm{d}\,t}\right| \leqslant \Phi_6(|x(0)|, |\xi(0)|).$$

Rezultă $\lim\limits_{t\to\infty} \sigma(t) = 0$. Într-adevăr, dacă n-ar fi așa, ar exista $\delta > 0$ și un șir $t_k \to \infty$ astfel ca $|\sigma(t_k)| > \delta$. Se poate alege un subșir astfel ca $t_n - t_{n-1} > \dfrac{\delta}{\Phi_6}$.

Fie $T > 0$ dat, $N(T)$ astfel ca $n \leqslant N(T)$ să implice $t_n \leqslant T - \dfrac{\delta}{2\Phi_6}$. Avem

$$\int_0^T \sigma(t) f(\sigma(t))\,\mathrm{d}\,t \geqslant \sum_{n=1}^{N(T)} \int_{t_n - \frac{\delta}{2\Phi_6}}^{t_n + \frac{\delta}{2\Phi_6}} \sigma(t) f[\sigma(t)]\,\mathrm{d}\,t.$$

Dar

$$|\sigma(t) - \sigma(t_n)| = |\dot{\sigma}(\theta_n)||t - t_n| \leqslant \Phi_6 |t - t_n| \leqslant \Phi_6 \frac{\delta}{2\Phi_6} = \frac{\delta}{2},$$

deci $|\sigma(t)| \geqslant \sigma|(t_n)| - \dfrac{\delta}{2} > \dfrac{\delta}{2}$. Fie $m = \inf\limits_{\frac{\delta}{2} \leqslant \sigma \leqslant \Phi_4} f(\sigma)$. Rezultă

$$\int_{t_n - \frac{\delta}{2\Phi_6}}^{t_n + \frac{\delta}{2\Phi_6}} \sigma(t) f[\sigma(t)]\,\mathrm{d}\,t \geqslant \frac{\delta}{2}\, m\, \frac{\delta}{\Phi_6}$$

deci

$$\Phi_3 \geqslant \int_0^T \sigma(t) f[\sigma(t)]\,\mathrm{d}\,t \geqslant N(T) \frac{\delta}{2} \frac{\delta}{\Phi_6} m. \text{ Dar } \lim_{T\to\infty} N(T) = \infty$$

ceea ce este contradictoriu. Prin urmare $\lim\limits_{t\to\infty} \sigma(t) = 0$.
De aici rezultă $\lim\limits_{t\to\infty} f[\sigma(t)] = 0$.

Avem însă

$$|x(t)| \leqslant K_1 e^{-K_0 t} |x(0)| + \int_0^t K_1 e^{-K_0(t-\tau)} |b| |f(\sigma(\tau))| d\tau.$$

Dar $\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-K_0(t-\tau)} |b| |f[\sigma(\tau)]| d\tau =$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t e^{K_0 t} |b| |f[\sigma(\tau)]| d\tau}{e^{K_0 t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{K_0 t} |b| |f[\sigma(t)]|}{K_0 e^{K_0 t}} = \frac{|b|}{K_0} \lim_{t\to 0} |f[\sigma(t)]| = 0$$

deci

$$\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0.$$

Din

$$\xi(t) = \frac{1}{\gamma} c^* x(t) - \frac{1}{\gamma} \sigma(t)$$

rezultă acum

$$\lim_{t\to\infty} \xi(t) = 0$$

şi teorema este demonstrată.

Pentru a vedea cît de puternic este acest rezultat al lui V. M. Popov vom arăta că dacă există o funcţie Liapunov de forma considerată în paragraful precedent, condiţia din teorema lui V. M. Popov e verificată.

TEOREMA 2. 3. *Dacă există o funcţie $V$ de forma*

$$V = (Hx, x) - 2\beta \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma \quad H < 0, \ \beta > 0$$

*astfel încît pentru orice funcţie $f$ din clasa considerată derivata $\frac{dV}{dt}$ în virtutea sistemului (5) este pozitiv definită, atunci există $q > 0$ astfel încît*

$$\mathcal{R}e(1 + i\omega q) G(i\omega) \geqslant 0.$$

*Demonstraţie.* Alegem $f(\sigma) = h\sigma$, $\sigma > 0$. Conform ipotezei, derivata în virtutea sistemului (5) a funcţiei $V = (Hx, x) - h\beta\sigma^2$ trebuie să fie pozitiv definită. Această derivată este egală cu

$$(H(Ax + bh\sigma), x) + (Hx, Ax + bh\sigma) - 2\beta h\sigma(c^* Ax + c^* bh\sigma - \gamma h\sigma).$$

Fiind dată o formă pătratică cu matrice reală pozitiv definită $(Wx, x)$, dacă punem $x = u + iv$ rezultă

$(W\bar{x}, x) = (W(u - iv), u + iv) = (Wu - iWv, u + iv) = (Wu, u) + i(Wu, v) - i(Wv, u) + (Wv, v) = (Wu, u) + (Wv, v) \geqslant 0,$

egalitatea putînd avea loc numai pentru $u = 0$, $v = 0$, deci numai pentru $x = 0$. (Subliniem că produsul scalar $(u, v)$ înseamnă aici $\Sigma u_i v_i$).

Deoarece $\frac{dV}{dt}$ este o formă pătratică pozitiv definită, rezultă, pentru $x$ şi $\sigma$ complecşi,

$$(HA\bar{x} + Hbh\bar{\sigma}, x) + (H\bar{x}, Ax + bh\sigma) - \beta h\bar{\sigma}(c^* Ax + c^* bh\sigma - \gamma h\sigma) - \beta h\sigma(c^* A\bar{x} + c^* bh\bar{\sigma} - \gamma h\bar{\sigma}) > 0.$$

Fie

$$M(i\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t} e^{At} b \, dt.$$

Avem

$$i\omega M(i\omega) = \int_0^\infty i\omega e^{-i\omega t} e^{At} b \, dt = -\int_0^\infty e^{At} b \frac{d}{dt} e^{-i\omega t} dt =$$

$$= -e^{At} b e^{-i\omega t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty A e^{At} b e^{-i\omega t} dt = b + AM(i\omega).$$

Punem $x = M(i\omega)$, $\sigma = \frac{1}{h}$; obţinem

$$(HA\overline{M}(i\omega) + Hb, M(i\omega)) + (H\overline{M}(i\omega), AM(i\omega) + b) - \\ -\beta(c^* AM(i\omega) + c^* b - \gamma) - \beta(c^* A\overline{M}(i\omega) + c^* b - \gamma) > 0.$$

Dar

$$A\overline{M}(i\omega) + b = -i\omega\overline{M}(i\omega);$$

rezultă

$$-i\omega(H\overline{M}(i\omega), M(i\omega)) + i\omega(H\overline{M}(i\omega), M(i\omega)) - \beta(c^* i\omega M(i\omega) - \gamma) - \\ -\beta(c^* i\omega\overline{M}(i\omega) - \gamma) > 0$$

deci

$$\mathcal{Re}\{-\beta(c^* i\omega M(i\omega) - \gamma)\} > 0.$$

Să ne amintim că

$$N(i\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t} \nu(t) dt = -\int_0^\infty e^{-i\omega t} c^* e^{At} b \, dt = -c^* \int_0^\infty e^{-i\omega t} e^{At} b \, dt = \\ = -c^* M(i\omega).$$

Rezultă

$$\mathcal{Re}\, \beta(i\omega N(i\omega) + \gamma) > 0;$$

dar am notat

$$G(i\omega) = N(i\omega) + \frac{\gamma}{i\omega}$$

deci am ajuns la concluzia

$$\mathcal{Re}\, i\omega G(i\omega) > 0.$$

Avem

$$\mathcal{Re}(1 + i\omega q)G(i\omega) = \mathcal{Re}\,G(i\omega) + q\,\mathcal{Re}\,i\omega G(i\omega).$$

Pentru a demonstra că există $q > 0$ astfel încît

$$\mathcal{Re}(1 + i\omega q)G(i\omega) > 0$$

rămîne deci de demonstrat că $\mathcal{Re}\,G(i\omega)$ este mărginit.

Deoarece $\frac{dV}{dt}$ e pozitivă pentru $x = 0$, $\sigma = \frac{1}{h}$, deducem

$$-\beta(c^* b - \gamma) > 0.$$

Pe de altă parte avem relaţia

$$i\omega G(i\omega) = i\omega N(i\omega) + \gamma = \int_0^\infty e^{-i\omega t}\frac{d\nu(t)}{dt}\,dt + \gamma + \nu(0).$$

Dar

$$\nu(t) = -c^* e^{At} b, \quad \frac{d\nu}{dt} = -Ac^* e^{At} b,$$

deci $\frac{d\nu}{dt}$ tinde către zero exponenţial.

Rezultă

$$\lim_{|\omega|\to\infty}\int_0^\infty e^{-i\omega t}\frac{d\nu(t)}{dt}\,dt = 0;$$

într-adevăr, integrînd prin părţi avem

$$\int_0^\infty e^{-i\omega t}\frac{d\nu(t)}{dt}\,dt = -\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t}\frac{d\nu(t)}{dt}\Big|_0^\infty + \frac{1}{i\omega}\int_0^\infty e^{-i\omega t}\frac{d^2\nu}{dt^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{i\omega} + \frac{1}{i\omega}\int_0^\infty e^{-i\omega t}\frac{d^2\nu}{dt^2};$$

integrala e mărginită şi se vede că

$$\lim_{|\omega|\to\infty}\int_0^\infty e^{-i\omega t}\frac{d\nu}{dt}\,dt = 0;$$

Rezultă

$$\lim_{|\omega|\to\infty} i\omega G(i\omega) = \gamma + \nu(0) = \gamma - c^* b > 0,$$

deci

$$\mathcal{Re}\,i\omega G(i\omega) \geqslant N_1 > 0.$$

Tot de aici rezultă că $\lim\limits_{|\omega|\to\infty} G(i\omega) = 0$, deci $G(i\omega)$ este mărginită.

Teorema este astfel demonstrată.

Teorema 2.3 arată că rezultatul lui V. M. Popov este mai puternic decît tot ce se poate obţine cu ajutorul funcţiilor Liapunov (cu condiţia ca numărul $q$ să fie ales convenabil).

Să arătăm acum că şi aplicarea lui în cazuri concrete revine la operaţii algebrice simple.

Elementele matricii $e^{At}$ sînt de forma $t^k e^{-\lambda t}$, deci $\nu(t)$ va fi o combinație liniară de asemenea elemente. Avem însă

$$\int_0^\infty e^{-i\omega t} t^k e^{-\lambda t} \, d t = \int_0^\infty t^k e^{-(\lambda+i\omega)t} \, d t = -\frac{1}{\lambda+i\omega} e^{-(\lambda+i\omega)t} t^k \Big|_0^\infty +$$

$$+ \frac{k}{\lambda+i\omega} \int_0^\infty t^{k-1} e^{-(\lambda+i\omega)t} \, d t.$$

Prin ipoteză $\mathcal{R}e\ \lambda > 0$ deci

$$\int_0^\infty e^{-i\omega t} t^k e^{-\lambda t} \, d t = \frac{k}{\lambda+i\omega} \int_0^t t^{k-1} e^{-(\lambda+i\omega)t} \, d t.$$

Continuînd

$$\int_0^\infty e^{-i\omega t} t^k e^{-\lambda t} \, d t = \frac{k!}{(\lambda+i\omega)^k}.$$

Rezultă de aici că $N(i\omega)$ este o funcție rațională de $i\omega$ deci $G(i\omega)$ este o funcție rațională de $i\omega$, deci

$$(1+i\omega q) G(i\omega) = \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)} = \frac{P(i\omega)\bar{Q}(i\omega)}{|Q(i\omega)|^2}.$$

Condiția

$$\mathcal{R}e\,(1+i\omega q) G(i\omega) \geqslant 0$$

revine la

$$\mathcal{R}e\, P(i\omega)\overline{Q}(i\omega) \geqslant 0$$

sau

$$\mathcal{R}e\, P(i\omega) Q(-i\omega) \geqslant 0.$$

Partea reală a produsului dintre $P(i\omega)\,Q(-i\omega)$ este un polinom în $\omega^2$, deci totul revine la a căuta condițiile ca un polinom $R(x)$ să fie pozitiv pentru $x \geqslant 0$; am notat $x = \omega^2$.

Să observăm că sistemele studiate se obțin din sistemele de forma

$$\frac{dy}{dt} = Ay + b\xi,$$

$$\frac{d\xi}{dt} = f(\sigma),$$

$$\sigma = c^* y - r\xi,$$

punînd $\dot{y} = x$. Într-adevăr, obținem

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bf(\sigma),$$

$$\frac{d\xi}{dt} = f(\sigma),$$

$$\sigma = c^* A^{-1} x - [c^* A^{-1} b + r]\xi,$$

căci $x = Ay + b\xi$, deci $y = A^{-1}x - A^{-1}b\xi$.

Rezultă în definitiv sistemul (5) cu $\gamma = r + cA^{-1}\, b$.

Consideraţiile făcute mai înainte arată că $\gamma > 0$ este o condiţie necesară pentru stabilitatea absolută. Să luăm $A = \operatorname{diag}(-\mu_i)$ şi să vedem ce devine condiţia din teorema 2.2. Avem

$$G = -[c^* A^{-1}(i\,\omega - A)^{-1} b] + \frac{r + c^* A^{-1} b}{i\,\omega}$$

$$c^* A^{-1}(i\,\omega E - A)^{-1} b = -\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i c_i}{\mu_i(\mu_i + \omega)}, \quad c^* A^{-1} b = -\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i c_i}{\mu_i}$$

$$\mathcal{Re}\,\{(1 + qi\,\omega) G\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i c_i}{\mu_i}\left(q + \frac{\mu_i(1 - q\mu_i)}{\mu_i^2 + \omega^2}\right) + qr - q\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i c_i}{\mu_i} =$$

$$= q\left[r - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i c_i\left(\mu_i - \dfrac{1}{q}\right)}{\mu_i^2 + \omega^2}\right].$$

Notînd

$$L(A,\ b,\ c) = \max \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i c_i}{\mu_i} \\ \displaystyle\min_{q>0} \max_{\omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i c_i\left(\mu_i - \dfrac{1}{q}\right)}{\mu_i^2 + \omega^2} \end{cases}$$

condiţia de stabilitate absolută se scrie $r > L(A,\ b,\ c)$.

Dacă

$$\min_{q>0} \max_{\omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i c_i\left(\mu_i - \dfrac{1}{q}\right)}{\mu_i^2 + \omega^2} > \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i c_i}{\mu_i}$$

condiţia de stabilitate absolută se scrie $r \geqslant L(A,\ b,\ c)$.

Din

$$\lim_{|\omega| \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i c_i\left(\mu_i - \dfrac{1}{q}\right)}{\mu_i^2 + \omega^2} = 0$$

rezultă $L(A,\ b,\ c) \geqslant 0$.

Ţinînd seama de faptul că

$$\max_{\omega} \frac{b_i c_i\left(\mu_i - \dfrac{1}{q}\right)}{\mu_i^2 + \omega^2} = \frac{\varepsilon_i b_i c_i\left(\mu_i - \dfrac{1}{q}\right)}{\mu_i^2},$$

unde

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 0 \text{ dacă } b_i c_i\left(\mu_i - \frac{1}{q}\right) \leqslant 0, \\ 1 \text{ dacă } b_i c_i\left(\mu_i - \frac{1}{q}\right) > 0, \end{cases}$$

se regăsesc rezultatele din paragraful precedent.

Pentru matrici $A$ de ordinul al doilea, T. Morozan a pus în evidență cazuri cînd

$$L(A, b, c) < \min_{q>0} \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i b_i c_i\left(\mu_i - \frac{1}{q}\right)}{\mu_i^2}.$$

Pentru a pune în evidență direcția în care trebuie continuat studiul, să observăm că sistemele studiate, de forma (5), sînt cazuri particulare ale sistemelor de forma

$$\frac{dz}{dt} = Az + af(\sigma), \qquad \sigma = p^*z$$

corespunzînd situației în care $A$ admite o valoare proprie nulă. Într-adevăr, atunci $A$ poate fi adusă la forma canonică reală $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și sistemul se scrie

$$\frac{dx}{dt} = A_1 x + a_1 f(\sigma) \quad , \frac{d\xi}{dt} = a_2 f(\sigma).$$

Dacă $a_2 \neq 0$, o nouă schimbare liniară de variabile conduce la forma (5).

Putem obține condiții de stabilitate și în *cazul în care matricea $A$ este hurwitziană*; evident, acest caz este mai simplu decît cel tratat anterior. *Vom considera stabilitatea absolută în clasa funcțiilor $f$ cu proprietatea că $h_1\sigma^2 \leqslant \sigma f(\sigma) \leqslant h_2\sigma^2$, $h_2 < k$, unde $h_1$ și $h_2$ depind de funcția $f$, dar $k$ este același pentru întreaga clasă.*

Fie $z(t)$ o soluție oarecare a sistemului și $u(t)$ soluția sistemului omogen

$$\frac{du}{dt} = Au, \; u(0) = z(0).$$

Fie

$$\sigma(t) = p^*z(t)$$

și

$$f_T(t) = \begin{cases} f[\sigma(t)] & \text{pentru } 0 \leqslant t \leqslant T, \\ 0 & \text{pentru } T < t. \end{cases}$$

Notăm cu $w(t)$ soluţia sistemului liniar neomogen

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = Aw + af_T(t), \qquad w(0) = 0. \tag{*}$$

Funcţia $w(t)$ este continuă şi are derivata cu discontinuitate de prima speţă pentru $t = T$.

Avem $w(t) = z(t) - u(t)$ pentru $0 \leqslant t \leqslant T$ căci diferenţa $z(t) - u(t)$ satisface acelaşi sistem ca şi $w(t)$ şi aceleaşi condiţii iniţiale.

Fie

$$\chi(T) = \int_0^T \left[p^* w(t) - \frac{1}{k} f_T(t) + qc^* \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right] f_T(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\infty \left[p^* w(t) - \frac{1}{k} f_T(t) + qc^* \frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t}\right] f_T(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{Re}\left\{p^* \widetilde{w} - \frac{1}{k}\widetilde{f} + i\,\omega\, q c^* \widetilde{w}\right\} \widetilde{f}_T^*\,\mathrm{d}\,\omega.$$

Am notat aici cu $\widetilde{w}$ respectiv $\widetilde{f}_T$ transformatele Fourier ale funcţiilor $w$ respectiv $f_T$.

Deoarece pentru $t > T$ funcţia $w(t)$ verifică sistemul omogen, rezultă că $w$ şi $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ descresc exponenţial, deci formula considerată din teoria transformatei Fourier se poate aplica. Din sistemul de ecuaţii $(*)$ pentru $w$ rezultă, aplicînd transformata Fourier,

$$i\,\omega\,\widetilde{w} = A\widetilde{w} + a\widetilde{f}_T \quad , \quad \widetilde{w} = -(A - iwE)^{-1} a\widetilde{f}_T.$$

Notăm

$$M = (A - i\,\omega E)^{-1} a \quad , \quad \mathcal{G} = p^* M$$

Avem

$$\widetilde{w} = -\, M\widetilde{f}_T$$

şi deci

$$\chi(T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{Re}\left\{-p^* M\widetilde{f}_T - \frac{1}{k}\widetilde{f}_T - i\,\omega\, qp^* M\widetilde{f}_T\right\}\widetilde{f}_T^*\,\mathrm{d}\,\omega =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{Re}\left\{\frac{1}{k} + (1 + i\,\omega\, q)\mathcal{G}\right\}|f_T|^2\,\mathrm{d}\omega.$$

Presupunînd $\frac{1}{k} + \mathcal{Re}\,(1 + i\,\omega\, q)\,\mathcal{G} \geqslant 0$ deducem $\chi(T) \leqslant 0$.

Pe de altă parte,

$$\chi(T) = \int_0^T \left[p^* z(t) - \frac{1}{k} f[\sigma(t)] + qp^* \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} - p^* u(t) - qp^* \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\right] f[\sigma(t)]\,\mathrm{d}t.$$

Rezultă

$$\int_0^T \left[\sigma(t) - \frac{1}{k} f[\sigma(t)] + q \frac{d\sigma(t)}{dt}\right] f[\sigma(t)]\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \left[p^* u(t) + q p^* \frac{du(t)}{dt}\right] f[\sigma(t)]\, dt.$$

Din

$$h_1 \sigma^2 \leqslant \sigma f(\sigma) \leqslant h_2 \sigma^2, \quad h_2 < k$$

rezultă

$$\sigma\left(\sigma - \frac{1}{k} f(\sigma)\right) \geqslant \sigma^2 - \frac{h_2}{k}\sigma^2 = \frac{k - h_2}{k}\sigma^2$$

de unde

$$\sigma^2 f^2(\sigma)\left(\sigma - \frac{1}{k} f(\sigma)\right)^2 \geqslant \left(\frac{k - h_2}{k}\right)^2 \sigma^4 f^2(\sigma) = \left(\frac{k - h_2}{k}\right)^2 \sigma^2 (\sigma f(\sigma))^2 \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{k - h_2}{k}\right) \sigma^2 h_1 \sigma^4$$

deci

$$f(\sigma)(\sigma - \frac{1}{k} f(\sigma)) \geqslant \frac{k - h_2}{k} h_1 \sigma^2 = h_3 \sigma^2.$$

Rezultă

$$h_3 \int_0^T \sigma^2(t)\, dt + q \int_{\sigma(0)}^{\sigma(T)} f(\sigma)\, d\sigma \leqslant \int_0^T \left\{p^* u(t) + q p^* \frac{du(t)}{dt}\right\} f[\sigma(t)]\, dt.$$

Notînd

$$F(\sigma) = \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma,$$

obținem

$$h_3 \int_0^T \sigma^2(t)\, dt + qF[\sigma(t)] \leqslant qF[\sigma(0)] + \int_0^T \left[p^* u(t) + q p^* \frac{du(t)}{dt}\right] f[\sigma(t)]\, dt.$$

Fie $\sigma(T) > 0$; pentru $0 < \sigma < \sigma(T)$ avem

$$\sigma f(\sigma) > \sigma^2 h_1,$$

deci

$$f(\sigma) > h_1 \sigma, \quad \int_0^{\sigma(T)} f(\sigma)\, d\sigma > \frac{h_1}{2} \sigma^2(T).$$

Dacă $\sigma(T) < 0$, pentru $\sigma(T) < \sigma < 0$ avem

$$\sigma f(\sigma) > \sigma^2 h_1,$$

deci

$$f(\sigma) < h_1 \sigma, \quad \int_{\sigma(T)}^{0} f(\sigma)\, d\sigma < h_1 \int_{\sigma(T)}^{0} \sigma\, d\sigma = -\frac{h_1}{2} \sigma^2(T),$$

deci

$$\int_0^{\sigma(T)} f(\sigma)\, d\sigma > \frac{h_1}{2} \sigma^2(T).$$

Rezultă în toate cazurile $F[\sigma(T)] > \dfrac{h_1}{2} \sigma^2(T)$.

Putem scrie prin urmare inegalitatea

$$q \frac{h_1}{2} \sigma^2(T) + h_3 \int_0^T \sigma^2(t)\, dt \leqslant qF[\sigma(0)] +$$

$$+ \int_0^T \left\{ p^* u(t) + q p^* \frac{du(t)}{dt} \right\} f[\sigma(t)]\, dt.$$

Avem

$$|u(t)| \leqslant \beta e^{-\alpha t} |x(0)|, \quad \left| \frac{du}{dt} \right| \leqslant \gamma e^{-\alpha t} |x(0)|.$$

Din $\sigma f(\sigma) \leqslant h_2 \sigma^2$ rezultă $|f(\sigma)| \leqslant h_2 |\sigma|$ deci

$$\left| \int_0^T \left[ p^* u(t) + q p^* \frac{du(t)}{dt} \right] f[\sigma(t)]\, dt \right| \leqslant L_1 \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |\sigma(t)|\, |x(0)| \int_0^T e^{-\alpha t} dt.$$

Ţinînd seama de aceasta rezultă în definitiv

$$q \frac{h_1}{2} \sigma^2(T) + h_3 \int_0^T \sigma^2(t)\, dt \leqslant qF[\sigma(0)] + L_2 |x(0)| \sup_{\sigma \leqslant t \leqslant T} |\sigma(t)|.$$

Din inegalitatea

$$q \frac{h_1}{2} \sigma^2(T) \leqslant qF[\sigma(0)] + L_2 |x(0)| \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |\sigma(t)|$$

deducem, ca în cazul tratat mai înainte,

$$|\sigma(t)| \leqslant \alpha_1(|x(0)|)$$

şi ţinînd seama de formula variaţiei constantelor deducem şi

$$|(x(t)| \leqslant \alpha_2(|x(0)|).$$

De aici rezultă $\left| \dfrac{d\sigma}{dt} \right| \leqslant \alpha_3(|x(0)|)$ şi cu aceleaşi raţionamente ca în cazul anterior, din $\int_0^T \sigma^2(t)\, dt \leqslant C$ rezultă $\lim\limits_{t \to \infty} \sigma(t) = 0$ şi $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$.

Am demonstrat astfel:

TEOREMA 2.4. *Dacă matricea $A$ e hurwitziană și dacă există $q>0$ astfel încît* $\frac{1}{k} + \mathcal{R}e\,(1+i\omega q)p^*(A-i\omega E)^{-1}a \geqslant 0$, *atunci oricare ar fi funcția $f$ cu proprietatea că există $h_1$ și $h_2 < k$ astfel ca $h_1\sigma^2 \leqslant \sigma f(\sigma) \leqslant h_2\sigma^2$, soluția banală a sistemului este asimptotic stabilă în mare.*

Prin urmare am considerat pînă acum cazul cînd matricea $A$ este hurwitziană, precum și cazul cînd ea admite o valoare proprie nulă. De aceea este firesc să ne ocupăm acum de cazul cînd $A$ are două valori proprii nule. Dacă acestor valori le corespund divizori elementari simpli, o transformare liniară de variabile aduce matricea $A$ la forma $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și sistemul devine

$$\frac{dx}{dt} = A_1 x + a_1 f(\sigma), \quad \frac{d\xi}{dt} = a_2 f(\sigma), \quad \frac{d\eta}{dt} = a_3 f(\sigma).$$

Dacă unul din numerele $a_2$ și $a_3$ este nul, de exemplu dacă $a_3 = 0$, ultima ecuație devine

$$\frac{d\eta}{dt} = 0$$

și se vede că nu putem avea stabilitate asimptotică decît în raport cu mulțimea $\eta = 0$.

Dar în acest caz sistemul devine de forma studiată anterior, corespunzătoare unei rădăcini nule. Dacă $a_2 = a_3 = 0$ nu putem avea stabilitate asimptotică decît în raport cu mulțimea $\xi = 0$, $\eta = 0$ și ajungem la cazul de mai sus. Dacă $a_2 a_3 \neq 0$, luînd $\zeta = \frac{1}{a_2}\xi - \frac{1}{a_3}\eta$ deducem $\frac{d\zeta}{dt} = 0$ și din nou nu putem avea stabilitate asimptotică decît în raport cu mulțimea $\zeta = 0$; ajungem astfel tot la cazul unei rădăcini nule.

În concluzie, cazul a două rădăcini nule cu divizori elementari simpli nu aduce nimic nou.

Dimpotrivă, cazul a două rădăcini nule, cu divizori elementari de ordinul al doilea prezintă un interes deosebit și a fost studiat pînă la capăt de V. M. Popov.

Trecem la prezentarea acestui caz. *Se presupune evident că rădăcinile nenule au părți reale negative.*

Fie

$$G(s) = -p^*(sE - A)^{-1}a.$$

Să observăm că funcția $G$ este invariantă față de transformările liniare ale sistemului. Fie într-adevăr $y = Dz$.

Avem

$$\frac{dy}{dt} = D\frac{dz}{dt} = DAD^{-1}y + Daf(\sigma), \quad \sigma = p^* D^{-1} y$$

deci

$$\frac{dy}{dt} = DAD^{-1}y + Daf(\sigma).$$

Noua funcție

$$G_1(s) = -p^* D^{-1}(sE - DAD^{-1})Da = -p^*(sE - A)a$$

este deci egală cu $G(s)$.

Pentru calculul efectiv al funcției $G$ este util să observăm că ea este soluția sistemului

$$s\tilde{z} = A\tilde{z} - a, \quad G(s) = p^*\tilde{z}.$$

TEOREMA 2.5. *Dacă*

$$\mathcal{Re}\, i\omega G(i\omega) \geqslant 0$$

*pentru toți* $\omega \geqslant 0$ și

$$\lim_{\omega \to 0} \mathcal{Re}\, \omega^2 G(i\omega) < 0,$$

*soluția banală a sistemului este stabilă în mare oricare ar fi funcția f cu* $\sigma f(\sigma) > 0$ *pentru* $\sigma \neq 0$,

$$\lim_{\sigma \to \pm\infty} \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma = \infty.$$

*Dacă în plus avem*

$$\lim_{\omega \to \infty} \mathcal{Re}\, i\omega G(i\omega) > 0,$$

*atunci soluția banală este stabilă în mare oricare ar fi funcția f' cu* $\sigma f(\sigma) > 0$ *pentru* $\sigma \neq 0$ *și*

$$\lim_{\sigma \to \pm\infty} \sup\left(|f(\sigma)| + \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma\right) = \infty.$$

*Dacă*

$$\mathcal{Re}\, i\omega G(i\omega) > 0$$

*și*

$$\lim_{\omega \to \infty} \mathcal{Re}\, \omega^2 G(i\omega) < 0$$

*și dacă soluția banală este stabilă în mare, atunci ea este asimptotic stabilă în mare.*

*Prin urmare, dacă*

$$\mathcal{Re}\, i\omega G(i\omega) > 0, \ \lim_{\omega \to \infty} \mathcal{Re}\, i\omega G(i\omega) > 0, \ \lim_{\omega \to 0} \mathcal{Re}\, \omega^2 G(i\omega) < 0,$$

*soluția banală este absolut stabilă pentru toate funcțiile f cu* $\sigma f(\sigma) > 0$ *pentru* $\sigma \neq 0$,

$$\lim_{\sigma \to \pm\infty} \sup\left(|f(\sigma)| + \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma\right) = \infty.$$

*Dacă*

$$\mathcal{Re}\, i\omega G(i\omega) > 0 \text{ și } \lim_{\omega \to 0} \mathcal{Re}\, \omega^2 G(i\omega) < 0$$

*atunci stabilitatea absolută are loc numai în clasa funcțiilor cu*

$$\lim_{\sigma \to \pm\infty} \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma = \infty.$$

Pentru demonstrație observăm că deoarece condițiile sînt impuse numai funcției $G$ și aceasta e invariantă, putem presupune sistemul adus la o formă canonică convenabilă.

Alegînd pe $D$ astfel ca

$$DAD^{-1} = \begin{pmatrix} B & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 0 & 1 \\ O & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sistemul devine

$$\frac{dx}{dt} = Bx + bf(\sigma), \frac{dy_{n-1}}{dt} = y_n + b_{n-1}f(\sigma), \frac{dy_n}{dt} = b_n f(\sigma)$$

$$\sigma = q^* x + \widetilde{p}_{n-1} y_{n-1} + \widetilde{p}_n y_n .$$

Calculînd pe $G(s)$ după procedeul indicat mai sus, găsim

$$G(s) = -q^* (sE - B)^{-1} b - \frac{\widetilde{p}_n b_n + \widetilde{p}_{n-1} b_{n-1}}{s} - \frac{\widetilde{p}_{n-1} b_n}{s^2} .$$

Rezultă că

$$\lim_{\omega \to 0} \mathcal{Re}\, \omega^2 G(i\omega) = \widetilde{p}_{n-1} b_n ,$$

deci apare condiția $p_{n-1} \ b_n < 0$.

În particular, $b_n \neq 0$. Putem deci efectua o nouă transformare

$$x = x, \quad \eta = \frac{1}{b_n^2} (b_n y_{n-1} - b_{n-1} y_n), \quad \xi = \frac{1}{b_n} y_n$$

și sistemul devine

$$\frac{dx}{dt} = Bx + bf(\sigma),$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \xi,$$

$$\frac{d\xi}{dt} = f(\sigma),$$

$$\sigma = q^* x - \alpha^* \xi - \beta \eta .$$

Deoarece $G(s)$ este invariantă, este suficient să demonstrăm teorema pentru sistemele de această formă. Pentru asemenea sisteme avem

$$G(s) = -q^* (sE - B)^{-1} b + \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2} .$$

Condiția

$$\lim_{\omega \to 0} \mathcal{Re}\, \omega^2 G(i\omega) < 0$$

se scrie acum

$$\beta > 0 .$$

Mai departe,

$$\mathcal{Re}\,(i\omega G(i\omega)) = -\mathcal{Re}\, i\omega q^* (i\omega E - B)^{-1} b + \alpha =$$

$$= -\mathcal{Re}\, q^* (i\omega E - B + B)(i\omega E - B)^{-1} b + \alpha =$$

$$= -\mathcal{Re}\, q^* B (i\omega E - B)^{-1} b + \alpha - q^* b \cdot$$

Ținînd seama de faptul că

$$q^* B (i\omega E - B)^{-1} b = q^* B(-i\omega E - B)(-i\omega E - B)^{-1} (i\omega E - B)^{-1} b =$$

$$= q^* B(-i\omega E - B)(\omega^2 E + B^2)^{-1} b ,$$

putem scrie

$$\mathcal{Re}\,(i\omega G(i\omega)) = q^* B^2 (\omega^2 E + B^2)^{-1} b + \alpha - q^* b .$$

Condiția

$$\lim_{\omega \to \infty} \mathcal{Re}\,(i\omega G(i\omega)) > 0$$

se scrie deci

$$\alpha - q^* b > 0 .$$

Vom stabili acum o serie de leme care reduc succesiv problema la unele fapte mai simple.

LEMA 1. *Fie*

$$\rho = |x| + |\xi| + |\eta| , \rho_0 = |x_0| + |\xi_0| + |\eta_0| .$$

*Dacă pentru orice soluție a sistemului avem* $|\xi(t)| \leqslant \psi_1(\rho_0)$, *atunci avem pentru orice soluție și inegalitatea*

$$|x(t)| \leqslant \psi_2(\rho_0) .$$

*Demonstrație.* Pe baza formulei variației constantelor

$$x(t) = e^{Bt} x_0 + \int_0^t e^{B(t-\tau)} b f[\sigma(\tau)]\, d\tau = e^{Bt} x_0 + \int_0^t e^{B(t-\tau)} b \frac{d\xi(\tau)}{d\tau}\, d\tau =$$

$$= e^{Bt} x_0 + b\,\xi(t) - e^{Bt} b\,\xi(0) + \int_0^t B e^{B(t-\tau)} b\,\xi(\tau)\, d\tau .$$

Deoarece $B$ este hurwitziană, avem

$$|e^{Bt}| \leqslant K_1 e^{-K_0 t},\ t \geqslant 0 ,$$

deci

$$|x(t)| \leqslant K_1 e^{-K_0 t} \rho_0 + |b| \psi_1(\rho_0) + K_1 |B| b\, \psi_1(\rho_0) \int_0^t e^{-K_0(t-\tau)}\, d\tau < \psi_2(\rho_0) .$$

LEMA 2. *Dacă* $\beta > 0$ *şi* $\lim_{\sigma \to \pm\infty} \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma = \infty$ *şi dacă pentru orice soluţie avem*

$$|\xi(t)| \leqslant \psi_1(\rho_0), \quad \int_0^{\sigma(t)} f(\sigma)\, d\sigma \leqslant \psi_3(\rho_0),$$

*atunci pentru orice soluţie avem*

$$\rho(t) \leqslant \psi_9(\rho_0).$$

*Demonstraţie.* Funcţiile

$$\psi_4(r) = \int_0^r f(\sigma)\, d\sigma, \quad \psi_5(r) = \int_0^{-r} f(\sigma)\, d\sigma$$

sînt monoton crescătoare şi continue; fie

$$\psi_6(r) = \min\{\psi_4(r), \psi_5(r)\}.$$

Din ipoteza lemei rezultă

$$\psi_6(|\sigma(t)|) \leqslant \psi_3(\rho_0)$$

deci

$$|\sigma(t)| \leqslant \psi_6^{-1}(\psi_3(\rho_0)) = \psi_7(\rho_0).$$

Din $\sigma = q^* x - \alpha\xi - \beta\eta$ şi $\beta > 0$ rezultă

$$|\eta(t)| = \frac{1}{\beta} |q^* x(t) - \alpha\xi(t) - \sigma(t)| \leqslant \frac{1}{\beta} |q| \psi_2(\rho_0) +$$

$$+ \frac{|\alpha|}{\beta} \psi_1(\rho_0) + \frac{1}{\beta} \psi_7(\rho_0) = \psi_8(\rho_0).$$

Din $|\xi(t)| \leqslant \psi_1(\rho_0)$, $|x(t)| \leqslant \psi_2(\rho_0)$, $|\eta(t)| \leqslant \psi_8(\rho_0)$ rezultă $\rho(t) \leqslant \psi_9(\rho_0)$ şi lema e demonstrată.

LEMA 3. *Dacă* $\beta > 0$, $\alpha - q^* b > 0$, $\lim_{\sigma \to \pm\infty} \sup \left(|f(\sigma)| + \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma\right) = \infty$ *şi dacă pentru orice soluţie avem* $|\xi(t)| \leqslant \psi_1(\rho_0)$, $\int_0^{\sigma(t)} f(\sigma) d\sigma \leqslant \psi_3(\rho_0)$, *atunci pentru orice soluţie avem* $\rho(t) \leqslant \psi_9(\rho_0)$.

*Demonstraţie.* Pentru toţi $t$ pentru care

$$|\sigma(t)| \leqslant (|q| + |\alpha| + |\beta|)\rho_0$$

are loc şi inegalitatea

$$|f(\sigma(t))| \leqslant \sup_{|\mu| \leqslant (|q| + |\alpha| + |\beta|)\rho_0} |f(\mu)|.$$

Arătăm că pentru toți $t$ pentru care

$$|\sigma(t)| > (|q| + |\alpha| + |\beta|)\rho_0$$

are loc inegalitatea

$$|f(\sigma(t))| \leqslant \psi_{10}(\rho_0),$$

unde

$$\psi_{10}(\rho_0) = \frac{|q||B|\psi_2(\rho_0) + |\beta|\psi_1(\rho_0)}{\alpha - q^* b}.$$

Avem

$$|\sigma(0)| = |q^* x_0 - \alpha\xi_0 - \beta\eta_0| \leqslant (|q| + |\alpha| + |\beta|)\rho_0;$$

dacă există $t_1 > 0$ astfel ca

$$|\sigma(t_1)| > (|q| + |\alpha| + |\beta|)\rho_0,$$

atunci există $t_2$ cu $0 < t_2 \leqslant t_1$ astfel ca

$$\sigma(t_2) = \sigma(t_1), \quad \frac{d\sigma^2(t_2)}{dt} \geqslant 0.$$

Punctul $t_2$ este marginea inferioară a mulțimii punctelor din $[0, t_1]$ în care $\sigma(t_2) = \sigma(t_1)$; dacă în punctul $t_2$ avem $\frac{d\sigma^2(t_2)}{dt} < 0$, atunci există $0<t_3<t_2$ cu $\sigma^2(t_3)<\sigma^2(t_2)$ și cum $\sigma^2(0) <\sigma^2(t_2)$ există $0<t_4<t_3$ cu $\sigma(t_4) = \sigma(t_2)$, ceea ce contrazice faptul că $t_2$ este margine inferioară. Existența lui $t_4$ rezultă din faptul că $\sigma(t)$ este continuă, deci admite proprietatea lui Darboux. Avem

$$\frac{1}{2}\frac{d\sigma^2(t_2)}{dt} = \sigma(t_2)\frac{d\sigma(t_2)}{dt} = \sigma(t_2)\left[q^*\frac{dx(t_2)}{dt} - \alpha\frac{d\xi(t_2)}{dt} - \beta\frac{d\eta(t_2)}{dt}\right] =$$

$$= \sigma(t_2)[q^* Bx(t_2) + q^* bf[\sigma(t_2)] - \alpha f[\sigma(t_2)] - \beta\xi(t_2)],$$

deci

$$\frac{1}{2}\frac{d\sigma^2(t_2)}{dt} \leqslant -(\alpha - q^* b)\sigma(t_2)f[\sigma(t_2)] + (|q||B|\psi_2(\rho_0) + |\beta|\psi_1(\rho_0))|\sigma(t_2)|.$$

Dar

$$\sigma(t_2)f[\sigma(t_2)] > 0,$$

deci

$$\sigma(t_2)f[\sigma(t_2)] = |\sigma(t_2)||f[\sigma(t_2)]|,$$

deci

$$\frac{1}{2}\frac{d\sigma^2(t_2)}{dt} \leqslant |\sigma(t_2)|\{-(\alpha - q^* b)|f[\sigma(t_2)]| + |q||B|\psi_2(\rho_0) + |\beta|\psi_1(\rho_0)\} =$$

$$= |\sigma(t_2)|[-(\alpha - q^* b)|f[\sigma(t_2)]| + |q||B|\psi_2(\rho_0) + |\beta|\psi_1(\rho_0)] =$$

$$= |\sigma(t_1)|[-(\alpha - q^* b)|f[\sigma(t_1)]| + |q||B|\psi_2(\rho_0) + |\beta|\psi_1(\rho_0)].$$

Din

$$\frac{d\sigma^2(t_2)}{dt} \geqslant 0$$

rezultă

$$-(\alpha - q^* b)\,|f[\sigma(t_1)]| + |q||B|\,\psi_2(\rho_0) + |\beta|\,\psi_1(\rho_0) > 0$$

deci

$$|f[\sigma(t_1)]| < \frac{|q||B|\,\psi_2(\rho_0) + |\beta|\,\psi_1(\rho_0)}{\alpha - q^* b} = \psi_{10}(\rho_0)\,.$$

Am demonstrat astfel afirmaţia făcută mai sus. De aici rezultă

$$\sup_{\mu \in [0,\sigma(t)]} |f(\mu)| \leqslant \max\,(\sup_{|\mu| \leqslant (|q|+|\alpha|+|\beta|)\rho_0} |f(\mu)|\,,\, \psi_{10}(\rho_0))\,,$$

unde am notat $[0,\sigma(t)]$ segmentul cu extremităţile 0 şi $\sigma(t)$ chiar dacă $\sigma(t) < 0$. Într-adevăr, dacă $|\sigma(t)| \leqslant (|q|+|\alpha|+|\beta|)\,\rho_0$ avem $|\mu| \leqslant (|q|+|\alpha|+|\beta|)\rho_0$ şi $\sup\limits_{\mu \in [0,\sigma(t)]} |f(\mu)| \leqslant \sup\limits_{|\mu| \leqslant (|q|+|\alpha|+|\beta|)\rho_0} |f(\mu)|$. Dacă $|\sigma(t)| > (|q|+|\alpha|+|\beta|)\,\rho_0$, cum $|\sigma(0)| \leqslant (|q|+|\alpha|+|\beta|)\rho_0$ pentru orice $\mu$ cu $|\mu| > (|q|+|\alpha|+|\beta|)\rho_0$ şi $\mu \in [0,\sigma(t)]$ există $t_1 \in [0,t]$ cu $\mu = \sigma(t_1)$, deci $|f(\mu)| \leqslant \psi_{10}(\rho_0)$.

Din inegalitatea stabilită rezultă că

$$\int_0^{\sigma(t)} f(\sigma)\,d\sigma + \sup_{\mu \in [0,\sigma(t)]} |\varphi(\mu)| \leqslant \psi_{11}(\rho_0).$$

Fie

$$\psi_{12}(r) = \int_0^r f(\sigma)\,d\sigma + \sup_{0 \leqslant \mu \leqslant r} |f(\mu)|\,,\ \psi_{13}(r) = \int_0^{-r} f(\sigma)\,d\sigma + \sup_{-r \leqslant \mu \leqslant 0} |f(\mu)|$$

Avem

$$\int_0^{\sigma} f(\sigma)\,d\sigma + \sup_{\mu \in [0,\sigma]} |f(\mu)| \geqslant \min\{\psi_{12}(|\sigma|),\,\psi_{13}(|\sigma|)\} = \psi_{14}(|\sigma|)\,,$$

deci

$$\psi_{14}(|\sigma(t)|) \leqslant \psi_{11}(\rho_0)\,,$$

de unde

$$|\sigma(t)| \leqslant \psi_{15}(\rho_0)\,.$$

Mai departe, demonstraţia continuă ca în lema 2.

Ţinînd seama de lemele demonstrate, prima parte a teoremei se reduce la obţinerea evaluărilor $|\xi(t)| \leqslant \psi_1(\rho_0)$ şi $\int_0^{\sigma(t)} f(\sigma)\,d\sigma \leqslant \psi_3(\rho_0)$. Pentru obţinerea acestor evaluări se foloseşte transformata Fourier. Fie

$$f_T(t) = \begin{cases} f[\sigma(t)] & 0 \leqslant t \leqslant T \\ 0 & t > T \end{cases}\,,$$

$$\lambda_T(t) = \int_0^t q^* B e^{B(t-\tau)}\, b f_T(\tau)\,d\tau + (q^* b - \alpha) f_T(t)\,.$$

Ca de obicei

$$\widetilde{f}_T = \int_0^\infty e^{-i\omega t} f_T(t)\,dt = \int_0^T e^{-i\omega t} f[\sigma(t)]\,dt\cdot$$

Deoarece $B$ este hurwitziană, există transformata Fourier a funcției $q^* Be^{Bt} b$ și această transformată este egală cu $q^*B\,(i\omega E - B)^{-1} b$.

Pe baza teoremei asupra produsului de compoziție avem

$$\widetilde{\lambda}_T = q^* B\,(i\,\omega E - B)^{-1} b \widetilde{f}_T + (q^* b - \alpha)\,\widetilde{f}_T\,.$$

Fie

$$\mu(T) = \int_0^T \lambda_T(t) f_T(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \widetilde{\lambda}_T \widetilde{f}^*_T\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \mathcal{Re}\,\{q^* B\,(i\,\omega E - B)^{-1} b + q^* b - \alpha\}\;|\widetilde{f}_T|^2 d\omega =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \mathcal{Re}\,(i\,\omega\,G\,(i\omega))\,|\widetilde{f}_T|^2 d\omega\,.$$

Condiția $\mathcal{Re}\;(i\,\omega\,G\,(i\,\omega)) \geqslant 0$ conduce la $\mu\;(T) \leqslant 0$.
Avem

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = q^* Be^{Bt} x_0 + (q^* b - \alpha) f[\sigma(t)] - \beta\,\xi(t) +$$

$$\int_0^t q^* Be^{B(t-\tau)} b f[\sigma(t)]\,d\tau = q^* Be^{Bt} x_0 - \beta\,\xi(t) + \lambda_T(t)$$

pentru $0 \leqslant t \leqslant T$.

Rezultă

$$\mu(T) = \int_0^T \left(\frac{d\sigma(t)}{dt} - q^* Be^{Bt} x_0 + \beta\,\xi(t)\right) f[\sigma(t)]\,dt \leqslant 0\,.$$

Avem

$$\int_0^T \frac{d\sigma(t)}{dt} f[\sigma(t)]\,dt = \int_0^{\sigma(T)} f(\sigma)\,d\sigma - \int_0^{\sigma(0)} f(\sigma)\,d\sigma\,,$$

$$\int_0^T \beta\,\xi(t) f[\sigma(t)]\,dt = \beta\int_0^T \xi(t)\frac{d\xi(t)}{dt}\,dt = \frac{1}{2}\,\beta\,[\xi^2(T) - \xi^2(0)]\,,$$

$$-\int_0^T q^* Be^{Bt} x_0 f[\sigma(t)]\,dt = -\int_0^T q^* Be^{Bt} x_0 \frac{d\xi(t)}{dt} = -q^* Be^{BT} x_0\,\xi(T) +$$

$$+ q B x_0\,\xi(0) + \int_0^T q^* B^2 e^{Bt} x_0\,\xi(t)\,dt \geqslant -2\,|q|\,|B|\,K_1|\,x_0 \sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi(t)| -$$

$$- K_1|q|\,|B|^2|\,x_0|\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi(t)|\int_0^T e^{-K_0 t}\,dt \geqslant -K_2\,\rho_0 \sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi(t)|\cdot$$

Rezultă astfel

$$\int_0^{\sigma(T)} f(\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{2}\beta\xi^2(T) - K_2\rho_0 \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\xi(t)| - \int_0^{\sigma(0)} f(\sigma)\,d\sigma - \frac{1}{2}\beta\rho_0^2 \leqslant \mu(T) \leqslant 0.$$

Fie

$$\psi_{16}(r) = \max(\psi_4(r), \psi_5(r)).$$

Avem

$$\int_0^{\sigma(0)} f(\sigma)\,d\sigma \leqslant \psi_{16}(|\sigma(0)|) \leqslant \psi_{16}(|q| + |\alpha| + |\beta|)\rho_0 = \psi_{17}(\rho_0).$$

Rezultă

$$\int_0^{\sigma(T)} f(\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{2}\beta\xi^2(T) - K_2\rho_0 \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\xi(t)| - \psi_{18}(\rho_0) \leqslant \mu(T) \leqslant 0.$$

Cum $\int_0^{\sigma(T)} f(\sigma)\,d\sigma \geqslant 0$ și $\frac{1}{2}\beta > 0$, rezultă inegalitatea

$$\xi^2(T) - 2K_3\rho_0 \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\xi(t)| \leqslant \frac{2}{\beta}\psi_{18}(\rho_0) = \psi_{19}(\rho_0).$$

De aici, prin procedeul care a mai fost folosit, rezultă $|\xi(t)| \leqslant \psi_1(\rho_0)$ pentru toți $t \geqslant 0$.

Ținînd seama de evaluarea obținută pentru $\xi(t)$ se deduce imediat din inegalitatea fundamentală

$$\int_0^{\sigma(t)} f(\sigma)\,d\sigma \leqslant K_2\rho_0\psi_{20}(\rho_0) + \psi_{18}(\rho_0) = \psi_3(\rho_0).$$

Cu aceasta prima parte a teoremei este demonstrată.

Demonstrația ultimei afirmații relativă la stabilitatea asimptotică necesită unele pregătiri.

LEMA 4. *Fie $\gamma(t)$ definită pentru $t > 0$ cu derivate pînă la ordinul $l_1$ și astfel ca* $\left|\frac{d^l\gamma(t)}{dt^l}\right| < K$ *pentru* $t>0$, $l=1,2,\ldots, l_1$. *Presupunem că* $\frac{d^{l_1}\gamma(t)}{dt^{l_1}}$ *este uniform continuă pe semiaxa $t > 0$. Dacă există $1 \leqslant l_0 \leqslant l_1$ astfel ca* $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{d^{l_0}\gamma(t)}{dt^{l_0}} = 0$, *atunci* $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{d^l\gamma(t)}{dt^l} = 0$ *pentru* $l = 2, 3, \ldots, l_1$.

*Demonstrație.* Presupunem prin absurd că afirmația lemei nu e adevărată pentru derivata de ordinul $j$, $2 \leqslant j \leqslant l_1$. Atunci există $\Delta > 0$ și un șir $t_k$ astfel ca $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$. Din ipotezele teoremei rezultă că toate derivatele

sînt uniform continue pe semiaxa $t > 0$. De aceea se poate găsi un șir $t^k$ astfel încît $\left|\frac{d^j\gamma(t)}{dt^j}\right| \geqslant \frac{\Delta}{2}$ pentru $t \in [t_k, t^k]$. Deducem

$$2K \geqslant \left|\frac{d^{j-1}\gamma(t^k)}{dt^{j-1}} - \frac{d^{j-1}\gamma(t_k)}{dt^{j-1}}\right| = \left|\int_{t_k}^{t^k} \frac{d^j\gamma(t)}{dt^j}\, dt\right| \geqslant \frac{\Delta}{2} \mid t^k - t_k \mid$$

căci dacă $\left|\frac{d^j\gamma(t)}{dt^j}\right| \geqslant \frac{\Delta}{2}$ pe $[t_k, t^k]$, atunci $\frac{d^j\gamma}{dt^j}$ păstrează semnul pe acest segment (orice derivată are proprietatea lui Darboux).

Rezultă $\mid t^k - t_k \mid \leqslant \frac{4K}{\Delta}$. Deducem de aici că putem alege pe $t^k$ astfel ca $\left|\frac{d^j\gamma(t^k)}{dt^j}\right| = \frac{\Delta}{2}$; într-adevăr, nu putem avea pe $\left[t_k - \frac{4K}{\Delta}, t_k + \frac{4K}{\Delta}\right]$ inegalitatea strictă $\left|\frac{d^j\gamma(t)}{dt^j}\right| > \frac{\Delta}{2}$ căci ar rezulta $2K > \frac{\Delta}{2}\,\frac{4K}{\Delta}$ ceea ce este contradictoriu. Prin urmare pe acest interval există puncte în care $\left|\frac{d^j\gamma(t)}{dt^j}\right| \leqslant \frac{\Delta}{2}$, deci putem alege pe $t^k$ cu proprietățile $\mid t^k - t_k \mid \leqslant \frac{4K}{\Delta}$, $\left|\frac{d^j\gamma(t^k)}{dt^j}\right| = \frac{\Delta}{2}$, $\left|\frac{d^j\gamma(t)}{dt^j}\right| \geqslant \frac{\Delta}{2}$ pentru $t \in [t_k, t^k]$. Din continuitatea uniformă rezultă că există $\delta > 0$ astfel ca $\mid t - t_k \mid < \delta$ să implice $\left|\frac{d^j\gamma(t)}{dt^j} - \frac{d^j\gamma(t_k)}{dt^j}\right| < \frac{\Delta}{2}$; de aici rezultă $t^k - t_k \geqslant \delta$, deci $\left|\frac{d^{j-1}\gamma(t^k)}{dt^{j-1}} - \frac{d^{j-1}\gamma(t_k)}{dt^{j-1}}\right| \geqslant \frac{\Delta}{2}\delta$, ceea ce arată că $\frac{d^{j-1}\gamma}{dt^{j-1}}$ nu poate avea limita zero pentru $t \to \infty$.

Pe de altă parte,

$$\frac{\Delta}{2} \leqslant \left|\frac{d^j\gamma(t^k)}{dt^j} - \frac{d^j\gamma(t_k)}{dt^j}\right| = \left|\int_{t_k}^{t^k} \frac{d^{j+1}\gamma(t)}{dt^{j+1}}\, dt\right| \leqslant \mid t^k - t_k \mid \sup_{t \in [t_k, t^k]} \left|\frac{d^{j+1}\gamma(t)}{dt^{j+1}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4K}{\Delta} \sup \left|\frac{d^{j+1}\gamma}{dt^{j+1}}\right|$$

deci

$$\sup_{t \in [t_k, t^k]} \left|\frac{d^{j+1}\gamma}{dt^{j+1}}\right| \geqslant \frac{\Delta^2}{8K}.$$

Rezultă că dacă afirmația lemei nu e adevărată pentru derivata de ordinul $j$, ea nu este adevărată nici pentru cea de ordinul $j+1$, nici pentru cea de ordinul $j-1$, ceea ce conduce la o contradicție față de ipoteza din enunț.

LEMA 5. *Dacă pentru toate soluțiile* $\rho(t) \leqslant \psi_9(\rho_0)$ *și* $\lim\limits_{t \to \infty} \xi(t) = 0$, *atunci soluția banală e asimptotic stabilă în mare.*

*Demonstrație.* Avem

$$x(t) = e^{Bt} x_0 + \int_0^t e^{B(t-\tau)} bf[\sigma(\tau)] d\tau = e^{Bt} x_0 + \int_0^t e^{B(t-\tau)} b \frac{d\xi(\tau)}{d\tau} =$$

$$= e^{Bt}(x_0 - b\xi_0) + b\xi(t) + \int_0^t Be^{B(t-\tau)} b\xi(\tau) d\tau.$$

Cum

$$\lim_{t \to \infty} e^{Bt} = 0,$$

de aici rezultă imediat că $\lim\limits_{t \to \infty} \xi(t) = 0$ implică $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$.

Pe de altă parte,

$$\frac{d\sigma}{dt} = q^* Bx(t) + (q^* b - \alpha) f[\sigma(t)] - \beta\xi(t).$$

Din ipoteza

$$\rho(t) \leqslant \psi_9(\rho_0),$$

rezultă

$$|x(t)| \leqslant \psi_9(\rho_0), \quad |\xi(t)| \leqslant \psi_9(\rho_0), \quad |\eta(t)| \leqslant \psi_9(\rho_0),$$

deci

$$|\sigma(t)| \leqslant (|q| + |\sigma| + |\beta|)\psi_9(\rho_0), \quad |f[\sigma(t)]| \leqslant \psi_{20}(\rho_0)$$

și

$$\left|\frac{d\sigma}{dt}\right| \leqslant \psi_{21}(\rho_0).$$

Rezultă că $\sigma(t)$ e uniform continuă pe semiaxa $t > 0$, deci $f[\sigma(t)]$ e uniform continuă. Aplicăm lema 4 cu

$$\frac{d\gamma}{dt} = \xi(t), \quad \frac{d^2\gamma}{dt^2} = f[\sigma(t)].$$

Avem $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{d\gamma}{dt} = 0$ și din lema 4 deducem $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0$, deci $\lim\limits_{t \to \infty} f[\sigma(t)] = 0$. Deoarece $|\sigma(t)| \leqslant (|q| + |\alpha| + |\beta|)\psi_9(\rho_0)$, de aici se deduce că $\lim\limits_{t \to \infty} \sigma(t) = 0$. Din $\sigma(t) = q^* x(t) - \alpha\xi(t) - \beta\eta(t)$ și $\beta > 0$ rezultă acum $\lim\limits_{t \to \infty} \eta(t) = 0$ și în definitiv e demonstrat că $\lim\limits_{t \to \infty} \rho(t) = 0$.

În acest mod demonstrarea completă a teoremei s-a redus la demonstrarea faptului că în condiţiile din enunţ avem $\lim\limits_{t\to\infty} \xi(t) = 0$. Pentru aceasta este nevoie de încă o lemă.

LEMA 6. Dacă $\mathcal{Re}\, i\omega G(i\omega) > 0$ *pentru toţi* $\omega > 0$, *există*

$$H(s) = \gamma_0 \frac{s^{m_0}}{s^k + a_1 s^{k-1} + \ldots + a_{k-1} s + a_k}, \; 0 \leqslant m_0 \leqslant k, \quad a_k \neq 0, \; \gamma_0 \neq 0$$

*cu proprietăţile :*

1° *Rădăcinile ecuaţiei* $s^k + a_1 s^{k-1} + \ldots + a_{k-1} s + a_k = 0$ *au părţi reale negative.*

2° $\mathcal{Re}\,(i\omega G(i\omega) - |H(i\omega)|^2 \geqslant 0$ *pentru toţi* $\omega$ *reali.*

*Demonstraţie.* Avem, după calculul făcut mai sus,

$$\mathcal{Re}\,(i\omega G(i\omega)) = q^* B^2 (\omega^2 E + B^2)^{-1} b + \alpha - q^* b = \frac{\sum\limits_{j=m_0}^{m_1} b_j \, \omega^{2j}}{\sum\limits_{j=0}^{m_2} c_j \, \omega^{2j}},$$

$$0 \leqslant m_0 \leqslant m_1 \leqslant m_2, \; b_{m_0} \neq 0, \; b_{m_1} \neq 0, \; c_0 \neq 0, \; c_{m_2} \neq 0.$$

Fie $k = m_2 + m_0 - m_1$. Considerăm un polinom arbitrar de forma $s^k + a_1 s^{k-1} + \ldots + a_{k-1} s + a_k$ ale cărei rădăcini au părţi reale negative. Funcţia

$$J(\omega^2) = \frac{1}{\mathcal{Re}\,(i\omega G(i\omega))} \left| \frac{(i\omega)^{m_0}}{(i\omega)^k + a_1 (i\omega)^{k-1} + \ldots + a_{k-1}(i\omega) + a_k} \right|^2$$

este continuă şi

$$\lim_{\omega\to 0} J(\omega^2) = \frac{c_0}{b_{m_0} a_k^2}, \; \lim_{\omega^2\to\infty} T(\omega^2) = \frac{c_{m_2}}{b_{m_1}}.$$

Există deci $\gamma_0 \neq 0$ astfel încît $J(\omega^2) < \frac{1}{\gamma_0^2}$ pentru toţi $\omega^2 > 0$ reali deci $1 - \gamma_0^2 J(\omega^2) > 0$. Înmulţind cu $\mathcal{Re}\,(i\omega G(i\omega))$ rezultă

$$\mathcal{Re}\,(i\omega G(i\omega)) - \gamma_0^2 \left| \frac{(i\omega)^{m_0}}{(i\omega)^k + a_1 (i\omega)^{k-1} + \ldots + a_{k-1}(i\omega) + a_k} \right|^2 > 0.$$

Observăm că deoarece polinomul $s^k + a_1 s^{k-1} + \ldots + a_{k-1} s + a_k$ este hurwitzian numerele $a_j$ sînt toate pozitive.

Să facem de asemenea observaţia că dacă $m_0 = 0$, $m_1 = m_2$, rezultă $k=0$ şi polinomul se reduce la o constantă ; enunţul lemei revine la faptul că în acest caz $\mathcal{Re}\,(i\omega G(i\omega))$ este mai mare decît o constantă pozitivă. Într-adevăr, cazul $m_0 = 0$ $m_1 = m_2$ se poate ivi dacă şi numai dacă

$$\alpha = \lim_{\omega\to 0} \mathcal{Re}\,(i\omega G(i\omega)) > 0, \; \alpha - q^* b = \lim_{\omega\to\infty} \mathcal{Re}\,(i\omega G(i\omega)) > 0.$$

Aceste inegalităţi, împreună cu $\mathcal{Re}\,(i\omega\, G\,(i\omega)) > 0$ pentru toţi $\omega > 0$, implică tocmai existenţa unei constante pozitive care mărgineşte inferior pe $\mathcal{Re}\,(i\omega\, G\,(i\omega))$. În acest caz faptul că $\lim\limits_{t\to\infty} \rho\,(t) = 0$ rezultă imediat.

Avem

$$\mu\,(T) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{Re}\,(i\omega)\, G\,(i\omega))\,|\tilde{f}_T|^2\, \mathrm{d}\omega \leqslant -\frac{\gamma}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}_T|^2\, \mathrm{d}\omega =$$

$$= -\gamma\int_0^{\infty} f_T^2\, \mathrm{d}t = -\gamma\int_0^T f^2\,[\sigma\,(t)]\,\mathrm{d}t.$$

Deci, ţinînd seama de expresia lui $\mu\,(T)$,

$$\int_0^{\sigma\,(t)} f\,(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma - \int_0^{\sigma\,(0)} f\,(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{2}\,\beta\xi^2\,(T) - K_2\,\rho_0 \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\,\xi\,(t)\,| - \frac{1}{2}\,\beta\,\xi_0^2 \leqslant$$

$$\leqslant -\gamma\int_0^T f^2\,[\sigma\,(t)]\,\mathrm{d}t$$

Dar prin ipoteză $\rho\,(t) \leqslant \psi_9\,(\rho_0)$; rezultă

$$\gamma\int_0^T f^2\,[\sigma\,(t)]\,\mathrm{d}t \leqslant \psi_{21}\,(\rho_0),$$

deci

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T f^2\,[\sigma\,(t)]\,\mathrm{d}t = L < \infty.$$

Notînd

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \int_0^t f^2\,[\sigma\,(\tau)]\,\mathrm{d}\tau - L,$$

rezultă

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Pe baza lemei 4 deducem

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{d}^2\gamma}{\mathrm{d}t^2} = \lim_{t\to\infty} f^2\,[\sigma\,(t)] = 0,$$

deci

$$\lim_{t\to\infty} f\,[\sigma\,(t)] = 0.$$

Dar

$$f\,[\sigma\,(t)] = \frac{\mathrm{d}\,\xi\,(t)}{\mathrm{d}t},$$

deci

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{d}\,\xi\,(t)}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Din

$$x(t) = e^{Bt} x_0 + \int_0^t e^{B(t-\tau)} bf[\sigma(\tau)]\, d\tau$$

rezultă acum și $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Din

$$\lim_{t\to\infty} f[\sigma(t)] = 0 \quad \text{și} \quad |\sigma(t)| \leqslant \psi_9(\rho_0)$$

rezultă însă

$$\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = 0.$$

Cum

$$\sigma(t) = q^* x(t) - \alpha\xi(t) - \beta\eta(t)$$

rezultă

$$\lim_{t\to\infty} [\alpha\xi(t) + \beta\eta(t)] = 0,$$

deci

$$\lim_{t\to\infty} \left[\beta\eta(t) + \alpha \frac{d\eta(t)}{dt}\right] = 0.$$

Să scriem

$$\alpha \frac{d\eta(t)}{dt} + \beta\eta(t) = \zeta(t).$$

Deoarece avem prin ipoteză $\alpha > 0$, $\beta > 0$, deducem

$$\eta(t) = e^{-\frac{\beta}{\alpha}t} \eta_0 + \int_0^t e^{-\frac{\beta}{\alpha}(t-\tau)} \zeta(\tau)\, d\tau.$$

Ținînd seama de faptul că $\lim\limits_{t\to\infty} \zeta(t) = 0$, rezultă imediat că $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t) = 0$ (de exemplu aplicînd regula lui Hôpital).

Dar dacă avem și $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t) = 0$, atunci $\lim\limits_{t\to\infty} \xi(t) = 0$ și demonstrația e terminată.

Lemele 5 și 6 sînt necesare tocmai în cazul cînd $\alpha = 0$ sau $\alpha - q^*b = 0$ și deci $k \geqslant 1$.

Fie mai întîi $k = 1$. Atunci polinomul din lema 6 se reduce la $s + a_1$. Fie $y_1$ definită de sistemul

$$\frac{dy_1}{dt} = -a_1 y_1 + \eta(t), \qquad y_1(0) = -\frac{1}{a_1^2}\xi_0 + \frac{1}{a_1}\eta_0,$$

$$y_2(t) = \frac{dy_1}{dt} = -a_1 y_1 + \eta(t),$$

$$y_3(t) = \frac{dy_2}{dt} = -a_1 \frac{dy_1}{dt} + \xi(t) = -a_1 y_2(t) + \xi(t),$$

$$y_4(t) = \frac{dy_3}{dt} = -a_1 \frac{dy_2}{dt} + f[\sigma(t)] = -a_1 y_3(t) + f[\sigma(t)].$$

Fie $u_1$ definită de

$$\frac{du_1}{dt} = -a_1 u_1 + f_T(t), \qquad u_1(0) = 0,$$

$$u_2 = -a_1 u_1 + f_T(t).$$

Observăm că din felul cum a fost ales $y_1(0)$ rezultă

$$y_2(0) = -a_1 y_1(0) + \eta_0 = \frac{1}{a_1}\xi_0 - \eta_0 + \eta_0 = \frac{1}{a_1}\xi_0$$

$$y_3(0) = -a_1 y_2(0) + \xi_0 = -\xi_0 + \xi_0 = 0$$

şi cum pe $[0, T]$ $y_3$ şi $u_1$ verifică aceeaşi ecuaţie diferenţială, rezultă $u_1(t) = y_3(t)$, $u_2(t) = y_4(t)$ pe $[0, T]$.

Deoarece $f_T(t) \equiv 0$ pentru $t > T$, rezultă că pentru $t > T$ avem

$$|u_1(t)| \leqslant K' e^{-a_1 t}, \qquad |u_2(t) \leqslant K' e^{-a_1 t}.$$

Aplicăm transformata Fourier şi obţinem

$$i\omega \tilde{u}_1 = -a_1 \tilde{u}_1 + \tilde{f}_T, \qquad \tilde{u}_1 = \frac{1}{i\omega + a_1}\tilde{f}_T,$$

$$\tilde{u}_2 = -a_1 \tilde{u}_1 + \tilde{f}_T = -\frac{a_1}{i\omega + a_1}\tilde{f}_T + \tilde{f}_T = \frac{i\omega}{i\omega + a_1}\tilde{f}_T.$$

Dacă $m_0 = 0$ avem $\gamma_0 \tilde{u}_1 = H(i\omega)\tilde{f}_T$, iar dacă $m_0 = 1$ avem $\gamma_0 \tilde{u}_2 = H(i\omega)\tilde{f}_T$; prin urmare $\gamma_0 \tilde{u}_{m_0+1} = H(i\omega)\tilde{f}_T$.

Fie

$$\tilde{\mu}(T) = \gamma_0^2 \int_0^\infty u_{m_0+1}^2 \, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \gamma_0^2 |\tilde{u}_{m_0+1}|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty |H(i\omega)|^2 |\tilde{f}_T|^2 d\omega.$$

Avem

$$\mu(T) + \tilde{\mu}(T) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty [\mathcal{Re}(i\omega G(i\omega)) - |H(i\omega)|^2] |\tilde{f}_T|^2 d\omega \leqslant 0.$$

Dar

$$\mu(T) \geqslant -\psi_{22}(\rho_0),$$

deci

$$\tilde{\mu}(T) \leqslant \psi_{22}(\rho_0),$$

adică

$$\gamma_0^2 \int_0^\infty u_{m_0+1}^2 \, dt < \psi_{22}(\rho_0)$$

sau

$$\gamma_0^2 \int_0^\infty y_{m_0+3}^2 \, dt < \psi_{22}(\rho_0).$$

Fie

$$L = \int_0^\infty y_{m_0+3}^2 \, \mathrm{d}t, \quad \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \int_0^t y_{m_0+3}^2 \, \mathrm{d}t - L;$$

din $\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = 0$ deducem aplicînd lema 4, că

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{d}^2\gamma}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

deci

$$\lim_{t\to\infty} y_{m_0+3}^2 = 0,$$

adică

$$\lim_{t\to\infty} y_{m_0+3} = 0.$$

Aplicăm din nou lema 4 cu $\frac{\mathrm{d}^l\gamma}{\mathrm{d}t^l} = y^l$

$$l = 1,2,3,4, \quad l_0 = \mathrm{m}_0 + 3.$$

Rezultă

$$\lim_{t\to\infty} y_2(t) = \lim_{t\to\infty} y_3(t) = \lim_{t\to\infty} y_4(t) = 0$$

Dar din

$$\lim_{t\to\infty} y_3(t) = \lim_{t\to\infty} y_2(t) = 0$$

rezultă

$$\lim_{t\to\infty} \xi(t) = 0$$

şi demonstraţia este terminată.

Cazul $k \geqslant 2$ se tratează la fel. Fie $y_j$ definite de sistemul

$$\frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}t} = y_{j+1}, j = 1,2,\ldots, k-1, \quad \frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}t} = -\sum_{j=1}^{k} a_j y_{k-j+1} + \eta(t)$$

$$y_1(0) = -\frac{a_{k-1}}{a_k^2}\xi_0 + \frac{1}{a_k}\eta_0, \quad y_2(0) = \frac{1}{a_k}\xi_0, \quad y_j(0) = 0, \quad j = 3,\ldots, k.$$

Introducem funcţiile

$$y_{k+1}(t) = \frac{\mathrm{d}y_k(t)}{\mathrm{d}t} = -\sum_{j=1}^{k} a_j y_{k-j+1} + \eta(t),$$

$$y_{k+2}(t) = \frac{\mathrm{d}y_{k+1}(t)}{\mathrm{d}t} = -\sum_{j=1}^{k} a_j \frac{\mathrm{d}y_{k-j+1}}{\mathrm{d}t} + \xi(t) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{k} a_j y_{k-j+2} + \xi(t),$$

$$y_{k+3}(t) = \frac{\mathrm{d}y_{k+2}(t)}{\mathrm{d}t} = -\sum_{j=1}^{k} a_j y_{k-j+3}(t) + f[\sigma(t)].$$

Din $\rho(t) \leqslant \psi_9(\rho_0)$ rezultă că $\eta, \xi, f[\sigma(t)]$ sînt mărginite şi uniform continue. De aici rezultă $|y_j(t)| \leqslant \psi_{23}(\rho_0)$ pentru $j=1,\ldots,k+3$; pentru primele $k$, acest lucru rezultă folosind formula variaţiei constantelor, iar pentru ultimele, direct. Fie acum $u_j(t)$ definite de

$$\frac{du_j}{dt} = u_{j+1} \quad j = 1,\ldots,k-1,$$

$$\frac{du_k}{dt} = -\sum_{j=1}^{k} a_j u_{k-j+1} + f_T(t), \quad u_j(0) = 0$$

$$u_{k+1} = -\sum_{j=1}^{k} a_j u_{k-j+1} + f_T(t).$$

Avem $u_j(t) = y_{j+2}(t)$, $j = 1,\ldots,k+1$ pentru $0 \leqslant t \leqslant T$. Într-adevăr, $y_{j+2}(0) = 0$ pentru $j = 1,\ldots, k+1$ şi pentru $0 \leqslant t \leqslant T$, funcţiile $y_{j+2}(t)$ verifică acelaşi sistem ca $u_j(t)$,

Pentru $t > T$ avem $|u_j(t)| < k' e^{-k''t}$ căci $f_T \equiv 0$ pentru $t > T$ şi sistemul omogen corespunzător este hurwitzian. Aplicînd sistemului în $u_j$ transformata Fourier rezultă $\gamma_0 \tilde{u}_{m_0+1} = H(i\omega)\tilde{f}_T$ de unde, ca în cazul precedent, deducem

$$\gamma_0^2 \int_0^\infty u_{m_0+1}^2 dt = \gamma_0^2 \int_0^\infty y_{m_0+3}^2 dt < \psi_{22}(\rho_0)$$

şi apoi

$$\lim_{t\to\infty} y_{m_0+3}(t) = 0.$$

Aplicînd lema 4 cu

$$\frac{d^l \gamma}{dt^l} = y_l, \quad l = 1,2,\ldots k+3,$$

deducem

$$\lim_{t\to\infty} y_j(t) = 0, \quad j = 2,3,\ldots,k+3,$$

$$\lim_{t\to\infty} \xi(t) = \lim_{t\to\infty} [y_{k+1}(t) + \sum_{j=1}^{k} a_k y_{k-j+2}(t)] = 0$$

şi teorema e demonstrată.

***Exemplu.*** Considerăm sistemul format din ecuaţiile scalare

$$\frac{dx}{dt} = -ax + y - f(\sigma),$$

$$\frac{dy}{dt} = z - cf(\sigma), \qquad \sigma = x,$$

$$\frac{d\tau}{dt} = -b(\sigma).$$

Matricea părţii liniare a sistemului este $\begin{pmatrix} -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi se vede că are două rădăcini nule cu divizor elementar de ordinul al doilea şi rădăcina $-a$, care este negativă dacă $a > 0$.

Calculăm pe $G(s)$ după procedeul indicat mai înainte

$$s\tilde{x} = -a\tilde{x} + \tilde{y} + 1,$$
$$s\tilde{y} = \tilde{z} + c,$$
$$s\tilde{z} = b.$$

Rezultă

$$\tilde{z} = \frac{b}{s},\quad \tilde{y} = \frac{\tilde{z}}{s} + \frac{c}{s} = \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s},\quad (a+s)\,\tilde{x} = \tilde{y} + 1,$$

deci

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{y}}{a+s} + \frac{1}{a+s},$$

deci

$$G(s) = \frac{1}{a+s}\left(1 + \frac{c}{s} + \frac{b}{s^2}\right).$$

Avem

$$\lim_{\omega\to 0} \omega^2 G(i\omega) = -\frac{b}{a} < 0 \quad \text{dacă} \quad b > 0. \ \text{Deci}$$

$$\mathcal{R}e\,(i\omega\, G(i\omega)) = \mathcal{R}e\, \frac{i\omega}{a+i\omega}\left(1 + \frac{c}{i\omega} - \frac{b}{\omega^2}\right) = \mathcal{R}e\left[\frac{i\omega(a-i\omega) + c(a-i\omega)}{a^2+\omega^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{i\omega\, b\,(a-i\omega)}{\omega^2(a^2+\omega^2)}\right] = \mathcal{R}e\left(\frac{i\omega\, a + \omega^2 + ac - i\omega c}{a^2+\omega^2} - \frac{i\omega\, ab + b\omega^2}{\omega^2(a^2+\omega^2)}\right) = \frac{ac - b + \omega^2}{a^2+\omega^2}.$$

Se vede că $\lim\limits_{\omega\to\infty} \mathcal{R}e\,(i\omega\, G(i\omega)) = 1$. Condiţia $\mathcal{R}e\,(i\omega\, G(i\omega)) > 0$ pentru $\omega > 0$ se reduce la $ac - b \geqslant 0$. Prin urmare, dacă $a > 0$, $b > 0$, $ac - b \geqslant 0$, soluţia banală este absolut stabilă pentru toate funcţiile $f$ cu $\sigma f(\sigma) > 0$ pentru $\sigma \neq 0$, $\lim\limits_{\sigma\to\pm\infty} \sup\left(|f(\sigma)| + \int_0^\sigma f(\sigma)\,d\sigma\right) = \infty$.

Şi de data aceasta metoda lui V. M. Popov dă rezultate cel puţin la fel de puternice ca cele bazate pe construcţia unei funcţii Liapunov de tipul obişnuit. Anume, *dacă există o funcţie Liapunov, negativ definită de tipul „formă pătratică plus integrală" cu derivată în virtutea sistemului, pozitiv definită, condiţia* $\mathcal{R}e\,(i\omega\, G(i\omega)) \geqslant 0$ *este îndeplinită.*

*Demonstraţie.* Scriem sistemul echivalent

$$\frac{dx}{dt} = Bx + bf(\sigma),$$

$$\frac{d\xi}{dt} = f(\sigma),$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = q^*Bx - \beta\xi + (q^*b - \alpha)f(\sigma)$$

şi funcţia Liapunov

$$V(x, \xi, \sigma) = x^* N x + 2\xi c_1^* x + 2\sigma c_2^* x + \gamma_{11}\xi^2 + 2\gamma_{12}\xi\sigma + $$
$$+ \gamma_{22}\sigma^2 - 2\int_0^\sigma f(\sigma)\,d\sigma \leqslant 0.$$

Pentru

$$f(\sigma) = h\sigma, \quad h > 0, \quad V(x, \xi, \sigma) \text{ devine}$$
$$V_h(x, \xi, \sigma) = x^* N x + 2\xi c_1^* x + 2\sigma c_2^* x + \gamma_{11}\xi^2 + 2\gamma_{12}\xi\sigma + (\gamma_{22} - h)\sigma^2.$$

Derivata în virtutea sistemului va fi

$$\frac{dV_h}{dt} = W_h(x, \xi, \sigma) \geqslant 0.$$

Avem $W_h(x, \xi, \sigma) \geqslant 0$ şi pentru $h = 0$ căci dacă ar fi strict negativă, ar rămîne negativă pentru $h$ suficient de mic. Rezultă

$$\frac{1}{2} x^*(NB + B^* N)x + \xi c_1^* Bx + \sigma c_2^* Bx +$$
$$+ (c_2^* x + \gamma_{12}\xi + \gamma_{22}\sigma)(q^* Bx - \beta\xi) \geqslant 0$$
$$x^* N x + 2\xi c_1^* x + 2\sigma c_2^* x + \gamma_{11}\xi^2 + 2\gamma_{12}\xi\sigma + \gamma_{22}\sigma^2 \leqslant 0.$$

În particular, pentru $x=0$, $\xi = \varepsilon^2\beta$, $\sigma = \gamma_{22}$ deducem din prima inegalitate

$$-\varepsilon^2\beta^2(\gamma_{12}\varepsilon^2\beta + \gamma_{22}^2) \geqslant 0.$$

pentru toţi $\varepsilon$ deci $\gamma_{22} = 0$. A doua inegalitate dă pentru $x=0$, $\xi=\varepsilon^2$, $\sigma=\gamma_{12}$,

$$\varepsilon^4\gamma_{11} + 2\gamma_{12}^2\varepsilon^2 + \gamma_{22}\gamma_{12}^2 \leqslant 0$$

deci

$$\gamma_{12} = 0.$$

Tot aceeaşi inegalitate dă pentru $x = \varepsilon^2 c_2$, $\xi = 0$, $\sigma = 1$

$$\varepsilon^4 c_2^* N c_2 + 2\varepsilon^2 c_2^* c_2 + \gamma_{22} \leqslant 0,$$

deci

$$c_2 = 0.$$

Punînd din nou în prima inegalitate $x = B^* c_1\varepsilon^2$, $\xi = -1$, $\sigma = 0$ se deduce $B^* c_1 = 0$, deci $c_1 = 0$. Rezultă că $V_h$ are forma $x^* N x + \gamma_{11}\xi^2 - h\sigma^2$, iar derivata în virtutea sistemului liniar este

$$\frac{1}{2} x^* N(Bx + bh\sigma) + \frac{1}{2}(Bx + bh\sigma)^* N x +$$
$$+ (h\sigma(\gamma_{11} + \beta)\xi - q^* Bx - (q^* b - \alpha)h\sigma) \geqslant 0.$$

Punînd

$$x = \omega B^{-1} U(\omega), \quad \xi = 0, \quad \sigma = 0,$$

deducem

$$\frac{1}{2}\omega^2(B^{-1}U(\omega))^*NU(\omega)+\frac{1}{2}\omega^2U^*(\omega)NB^{-1}U(\omega)\geqslant 0.$$

Luînd $U(\omega)=-B(\omega^2E+B^2)^{-1}b$ și punînd $x=U(\omega)$, $\xi=0$, $\sigma=\frac{1}{h}$, deducem

$$\frac{1}{2}U^*(\omega)N(BU(\omega)+b)+\frac{1}{2}(BU(\omega)+b)^*NU(\omega)-q^*BU(\omega)+$$
$$+\alpha-q^*b\geqslant 0.$$

Dar

$$BU(\omega)+b=-B^2(\omega^2E+B^2)^{-1}b+(\omega^2E+B^2)(\omega^2E+B^2)^{-1}b=$$
$$=\omega^2(\omega^2E+B^2)^{-1}b=-\omega^2\mathrm{B}^{-1}U(\omega).$$

În definitiv obținem $-q^*BU(\omega)+\alpha-q^*b\geqslant 0$ ceea ce coincide cu $\mathcal{Re}\,(i\omega G(i\omega))\geqslant 0$.

Să observăm că derivata funcției $V_h$ pentru $x=0$, $\sigma=0$, $\xi\neq 0$, este nulă, deci nu există funcții Liapunov de tipul considerat cu derivată pozitiv definită.

Și în această problemă se poate folosi metoda funcției Liapunov.

Dacă $\beta\neq 0$, sistemul este echivalent din punctul de vedere al stabilității absolute cu

$$\frac{dx}{dt}=Ax+bf(\sigma),$$

$$\frac{d\xi}{dt}=f(\sigma),$$

$$\frac{d\sigma}{dt}=q^*Ax+(q^*b-\alpha)f(\sigma)-\beta\xi.$$

O condiție necesară pentru stabilitatea absolută a acestui sistem este $\beta>0$. Într-adevăr, din stabilitatea absolută rezultă că valorile proprii ale matricii

$$H=\begin{pmatrix} A & b & 0\\ q^*A & q^*b-\alpha & -\beta\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

($H$ este matricea sistemului liniar care se obține pentru $f(\sigma)=\sigma$), au părți reale negative, deci

$$(-1)^{n+2}\det H=(-1)^n\det H>0.$$

Dar

$$\det H = -\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ q^*A & -\beta \end{pmatrix} = \beta \det A$$

şi

$$(-1)^n \det H = (-1)^n \beta \det A.$$

Ţinînd seama de faptul că $A$ este hurwitziană, rezultă că $(-1)^n \det H > 0$ deci $\beta > 0$.

În cele ce urmează se va presupune deci $\beta > 0$ şi în plus

$$\lim_{|\sigma| \to \infty} \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma = \infty.$$

Pentru orice matrice $\Gamma > 0$ există $B > 0$ astfel încît

$$BA + A^* B = -\Gamma.$$

Considerăm funcţia

$$V(x, \xi, \sigma) = (Bx, x) + \beta \xi^2 + 2\int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma.$$

Derivata acestei funcţii, în virtutea sistemului, este

$$\frac{dV}{dt} = -\{(\Gamma x, x) - 2((Bb + A^* q), x) f(\sigma) + 2(\alpha - q^* b) f^2(\sigma)\}.$$

Rezultă că $-\frac{dV}{dt}$ este o formă pătratică în $x$, $\sigma$ cu matricea

$$\begin{pmatrix} \Gamma & -(Bb + A^* q) \\ -(Bb + A^* q)^* & 2(\alpha - q^* b) \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, necesar şi suficient pentru ca această formă pătratică să fie pozitiv definită este ca

$$\det\begin{pmatrix} \Gamma & -(Bb + A^* q) \\ -(Bb + A^* q)^* & 2(\alpha - q^* b) \end{pmatrix} > 0.$$

Aceasta conduce la condiţia

$$\alpha - q^* b > \frac{1}{2}(Bb + A^* q)^* \Gamma^{-1}(Bb + A^* q).$$

Deoarece $\frac{dV}{dt}$ se poate anula numai pentru $x = 0$, $\sigma = 0$ şi această mulţime nu conţine semitraiectorii întregi, deducem că o condiţie suficientă pentru stabilitatea absolută a sistemului este

$$\alpha - q^* b > \min_{\Gamma > 0} \frac{1}{2}(Bb + A^* q)^* \Gamma^{-1}(Bb + A^* q).$$

Fie acum

$$A = \operatorname{diag}(-\mu_i),\ \Gamma = \operatorname{diag}\ (\gamma_i).$$

Rezultă

$$B = \operatorname{diag}\left(\frac{\gamma_i}{2\mu_i}\right),\ (Bb + A^* q)^* \Gamma^{-1}(Bb+A^* q) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\mu_i^2}\left(\frac{\gamma_i b_i - 2\mu_i^2 q_i}{\sqrt{\gamma_i}}\right)^2,$$

unde $b_i$, $q_i$ sînt coordonatele vectorilor $b$, $q$. Deducem

$$\min_{\Gamma>0}(Bb + A^* q)^* \Gamma^{-1}(Bb + A^* q) = 2\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i' q_i b_i$$

$$\varepsilon_i' = \begin{cases} 0 & \text{dacă } b_i q_i > 0, \\ 1 & \text{dacă } b_i q_i < 0. \end{cases}$$

Obţinem astfel următoarea condiţie de stabilitate absolută

$$\alpha > \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i q_i b_i,\ \varepsilon_i = \begin{cases} 0 & q_i b_i < 0, \\ 1 & q_i b_i > 0. \end{cases}$$

Să observăm acum că, în cazul cînd $A$ e diagonală, avem

$$G(i\omega) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i q_i}{i\omega + \mu_i} + \frac{\alpha}{i\omega} - \frac{\beta}{\omega^2}$$

şi inegalitatea $\mathcal{Re}\, i\omega\, G(i\omega) > 0$ devine

$$\alpha > \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i q_i \omega^2}{\mu_i^2 + \omega^2}.$$

Teorema lui M. V. Popov conduce la următoarea condiţie de stabilitate

$$\alpha > \max_{\omega > 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i q_i \omega^2}{\mu_i^2 + \omega^2}.$$

Deoarece $\mathcal{Re}\ \{i\omega G(i\omega)\} = \alpha$ pentru $\omega = 0$, inegalitatea

$$\mathcal{Re}\, i\omega\ G(i\omega) > 0 \quad \text{pentru orice} \quad \omega > 0$$

implică $\alpha \geqslant 0$ chiar dacă matricea $A$ nu este diagonală. Din

$$\max_{\omega \geqslant 0} \frac{b_i q_i}{\mu_i^2 + \omega^2} = \varepsilon_i'' b_i q_i,\ \varepsilon'' = \begin{cases} 1 & b_i q_i > 0 \\ 0 & b_i q_i \leqslant 0 \end{cases}$$

deducem că $\alpha > \sum_{i=1}^{n} \varepsilon''_i b_i q_i$ este o condiţie suficientă de stabilitate absolută şi regăsim rezultatul obţinut mai sus cu ajutorul funcţiei Liapunov.

În cazul cînd $b_i q_i > 0$ pentru $i = 1, \ldots, n$, avem

$$\min_{\substack{\Gamma > 0 \\ \Gamma \text{ diagonală}}} (Bb + A^* q)^* \Gamma^{-1}(Bb + A^* q) = 0$$

şi este evident că acest minim nu poate fi îmbunătăţit considerînd matrici nediagonale, deoarece $\Gamma^{-1}$ este pozitiv definită şi deci

$$(Bb + A^* q)^* \Gamma^{-1}(Bb + A^* q) \geqslant 0.$$

În cazul cînd $b_i q_i < 0$ pentru $i = 1,\ldots,n$, avem

$$\min_{\substack{\Gamma > 0 \\ \Gamma \text{ diagonală}}} (Bb + A^* q)^* \Gamma^{-1}(Bb + A^* q) = -2 q^* b$$

şi din nou, minimul nu poate fi îmbunătăţit considerînd matrici $\Gamma$ nediagonale. Într-adevăr, dacă ar exista $\Gamma > 0$ astfel încît

$$(Bb + A^* q)^* \Gamma^{-1}(Bb + A^* q) < -2 q^* b$$

am deduce că pentru

$$\alpha - q^* b > \frac{1}{2}(Bb + A^* q)^* \Gamma^{-1}(Bb + A^* q)$$

există o funcţie Liapunov şi cum

$$q^* b + \frac{1}{2}(Bb + A^* q)^* \Gamma^{-1}(Bb + A^* q) < 0$$

am putea avea o funcţie Liapunov pentru $\alpha < 0$ ceea ce contrazice concluzia trasă pe baza teoremei lui Popov. Cum această concluzie nu folosea faptul că $A$ e diagonală, deducem că pentru orice $A$ hurwitziană şi orice $\Gamma > 0$ are loc inegalitatea

$$(Bb + A^* q)^* \Gamma^{-1}(Bb + A^* q) \geqslant -2 q^* b.$$

Luînd $q = \frac{1}{2} A^{*-1} c$, obţinem

$$\left(Bb + \frac{1}{2} c\right)^* \Gamma^{-1}\left(Bb + \frac{1}{2} c\right) \geqslant -c^* A^{*-1} b.$$

Această ultimă inegalitate a fost obţinută pe altă cale de J. P. La Salle.

În cele ce urmează vom scoate în evidenţă ideile generale conţinute în metoda lui V. M. Popov pentru a putea ajunge la o generalizare a teoremei 2.2.

Să considerăm un sistem de forma

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(y), \; f(0) = 0,$$

unde $y$ este un vector. Putem presupune fie că $y = \varphi(x)$, fie că sistemul mai conţine o ecuaţie $\frac{dy}{dx} = g(x, y)$.

Să presupunem că am reuşit să demonstrăm că pentru orice condiţii iniţiale $(x_0, y_0)$ avem $|y(t)| < \gamma(x_0, y_0)$, unde $\gamma \to 0$ cînd $|x_0| + |y_0| \to 0$.

Presupunem că matricea $A$ este hurwitziană. Atunci va rezulta o evaluare de acelaşi tip şi pentru $x(t)$. Într-adevăr, avem

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} f[y(s)] ds.$$

Fie

$$\lambda(x_0, y_0) = \sup_{|y| \leqslant \gamma(x_0, y_0)} |f(y)|.$$

Deoarece $f(0) = 0$, rezultă că

$$\lambda(x_0, y_0) \to 0 \text{ cînd } |x_0| + |y_0| \to 0.$$

Avem

$$|x(t)| \leqslant K_1 e^{-K_0(t-t_0)} |x_0| + \int_{t_0}^{t} K_1 e^{-K_0(t-s)} \lambda(x_0, y_0) ds \leqslant$$

$$\leqslant K_1 |x_0| + \frac{K_1}{K_0} \lambda(x_0, y_0).$$

Dacă în plus

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0,$$

rezultă

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0,$$

căci

$$|x(t)| \leqslant K_1 e^{-K_0(t-t_0)} |x_0| + \int_{t_0}^{t} K_1 e^{-K_0(t-s)} |f[y(s)]| ds$$

şi

$$\lim_{t \to \infty} \int_{t_0}^{t} e^{-K_0(t-s)} |f(y(s))| ds = \lim_{t \to \infty} \frac{\int_{t_0}^{t} e^{K_0 s} |f(y(s))| ds}{e^{K_0 t}} =$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{e^{K_0 t} |f(y(t))|}{K_0 e^{K_0 t}} = \lim_{t \to \infty} |f(y(t))| = 0.$$

Rezultă de aici că pentru a obţine stabilitatea asimptotică în mare este suficient să fie puse în evidenţă proprietăţile corespunzătoare ale lui $y(t)$. Aceste proprietăţi sînt puse în evidenţă arătînd că există trei funcţii continue, nule în origină, primele două monoton crescătoare, astfel încît

$$a(|y|) + \int_0^t b(|y|) dt < c(|x_0|, |y_0|).$$

Într-adevăr, dacă o asemenea inegalitate are loc rezultă în particular

$$a(|y|) < c(|x_0|, |y_0|)$$

şi deci

$$|y(t)| < a^{-1}(c(|x_0|, |y_0|).$$

Tot din această inegalitate rezultă

$$\int_0^\infty b(|y|)\,\mathrm{d}t < c(|x_0|, |y_0|).$$

Pe de altă parte am văzut că rezultă

$$|x(t)| < \beta(|x_0|, |y_0|)$$

deci

$$\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right| < \gamma(|x_0|, |y_0|),$$

deci în orice caz

$$\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right| < \delta(|x_0|, |y_0|).$$

Din convergenţa integralei rezultă atunci

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

Să observăm că dacă există o funcţie Liapunov se poate întotdeauna obţine o inegalitate integrală de tipul considerat. Într-adevăr, din

$$a(|y|) \leqslant V(t, y) \leqslant b(|x|, |y|), \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} < -c(|y|)$$

ezultă prin integrare

$$V(t, y) - V(0, y_0) < -\int_0^t c(|y|)\,\mathrm{d}t,$$

deci

$$a(|y|) < b(|x_0|, |y_0|) - \int_0^t c(|y|)\,\mathrm{d}t$$

sau

$$a(|y|) + \int_0^t c(|y|)\,\mathrm{d}t < b(|x_0|, |y_0|).$$

Metoda lui V. M Popov de obţinere a inegalităţii integrale de forma dorită este următoarea. Se consideră o funcţională pătratică $\chi(T)$ în $y$ pentru care se caută pe de o parte evaluări inferioare de forma $a|(y|) + \int_0^t b(|y|)\,\mathrm{d}t + \delta(|x_0|, |y_0|)$, pe de altă parte o evaluare superioară de forma $c(|x_0|, |y_0|)$. Pentru obţinerea evaluării superioare se foloseşte

transformata Fourier. Întreaga artă legată de aplicarea metodei constă în alegerea convenabilă a funcţionalei $\chi(T)$.

Vom considera sisteme generale de forma

$$\frac{dx}{dt} = Ax + By, \quad \frac{dy}{dt} = f(z), \quad z = C_1 x + D_1 y.$$

Facem schimbarea de variabilă $x' = Ax + By$, $y' = y$, $z' = z$. Obţinem

$$\frac{dx'}{dt} = A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} = Ax' + Bf(z), \quad \frac{dy'}{dt} = f(z)$$

$$z = C_1(A^{-1}x' - A'By') + D_1 y'.$$

Suprimînd indicii şi accentele, scriem sistemul sub forma

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bf(z), \quad \frac{dy}{dt} = f(z), \quad z = Cx + Dy. \tag{6}$$

Vom presupune că matricea $A$ este hurwitziană, iar $D$ nesingulară. Căutăm condiţii care să asigure stabilitatea asimptotică în mare, oricare ar fi funcţiile $f(z)$ de forma $\{f_i(z_i)\}$ verificînd condiţiile

$$\delta_i z_i^2 \leqslant f_i(z_i) z_i \leqslant (h_i - \delta_i') z_i^2,$$

unde $\delta_i$, $\delta_i'$, $h_i$ sînt numere pozitive date.

TEOREMA 2.6. *Presupunem că există matricele $P$, $Q$ diagonale cu următoarele proprietăţi:*

1) *elementele matricei $P$ sînt pozitive sau nule;*

2) *dacă un element de pe diagonala lui $P$ este nul, elementul corespunzător al lui $Q$ este strict pozitiv;*

3) *$PD$ este o matrice simetrică, $PD \leqslant 0$;*

4) *fie $F_h$ matricea diagonală cu elementele $h_i$,*

$$G(i\omega) = P[F_h^{-1} - C(i\omega E - A)^{-1}B - Q[CA(i\omega E - A)^{-1}B + D + CB]$$

$$H(i\omega) = \frac{1}{2}[G(i\omega) + G^*(i\omega)], \quad S = \lim_{\omega\to\infty} H(i\omega) =$$

$$= PF_h^{-1} - \frac{1}{2}[Q(CB+D) + (B^*C^* + D^*)Q^*].$$

*Presupunem $H(i\omega) > 0$, $S > 0$.*

*Atunci soluţia banală a sistemului* (6) *este asimptotic stabilă în mare, oricare ar fi funcţia $f$ din clasa considerată.*

Vom arăta mai întîi că din ipotezele făcute rezultă că matricea $D$ este obligatoriu hurwitziană. Fie

$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix}$, $PD = \begin{pmatrix} P_1 D_1 & P_1 D_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $PD$ trebuie să fie simetrică, deci $P_1 D_2 = 0$. Deoarece $P_1$ e nesingulară, rezultă $D_2 = 0$. De aici se deduce că valorile proprii ale lui $D$ sînt cele ale lui $D_1$ şi $D_4$. Din $PD \leqslant 0$ rezultă $P_1 D_1 \leqslant 0$; dacă există $u_0 \neq 0$ astfel încît

$P_1 D_1 u_0=0$, rezultă $D_1 u_0=0$, deci $D_1$ este singulară, deci $D$ este singulară, ceea ce am exclus. Rezultă $P_1 D_1 < 0$. Funcția $V=\frac{1}{2}(P_1 D_1(D_1^{-1} u), D_1^{-1} u)$ este deci negativ definită, iar derivata ei în virtutea sistemului $\frac{du}{dt} = D_1 u$ este

$$(P_1 D_1 (D_1^{-1} u), D_1^{-1} D_1 u) = (P_1 u,u),$$

deci este pozitiv definită; rezultă că $D_1$ e hurwitziană. Considerăm acum matricea

$$H(0) = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_3 & H_4 \end{pmatrix};$$

deoarece $H(0) > 0$ rezultă $H_4 > 0$. Avem

$$H(0) = \frac{1}{2}(G(0) + G^*(0)),\ G(0) = P\,[F_h^{-1} + CA^{-1}B] +$$

$$+Q\,[CB - D - CB] = P\,[F_h^{-1} + CA^{-1}B] - QD.$$

Dacă

$$G(0) = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{pmatrix}$$

rezultă, ținînd seama de forma lui $P$, că

$$G_4 = -Q_4 D_4,$$

unde am notat

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_4 \end{pmatrix}.$$

Rezultă

$$H_4 = -\frac{1}{2}(Q_4 D_4 + D_4^* Q_4).$$

Conform ipotezei, $Q_4>0$, deci $V=-\frac{1}{2}(Q_4\, v,\, v)$ este negativ definită; derivata ei în virtutea sistemului $\frac{dv}{dt} = D_4 v$ este $\frac{1}{2}(H_4 v,\, v)$ deci pozitiv definită, deci $D_4$ este hurwitziană.

Deoarece matricele $A$ și $D$ sînt hurwitziene, există matricele simetrice negativ definite $M_1$ și $M_2$ astfel ca

$$M_1 A + A^* M_1 = E,\ M_2 D + D^* M_2 = E'.$$

Funcția $V = (M_1\, x,\, x) + (M_2\, y, y)$ este negativ definită și derivata ei în virtutea sistemului

$$\frac{dx}{dt} = Ax + BF(Cx + Dy),\ \frac{dy}{dt} = F(Cx + Dy)$$

este

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=(M_1(Ax+BFCx+BFDy),\ x)+(M_1\ x,\ Ax+BFCx+BFDy)+$$
$$+(M_2F\ (Cx+Dy),\ y)+(M_2y,\ F(Cx+Dy))=$$
$$=((M_1A+A^*M_1)\,x,\ x)+((M_2FD+D^*F^*M_2)\,y,\ y)+(M_1FB(Cx+Dy),\ x)+$$
$$+(M_1\,x,\ BF(Cx+Dy))+(M_2F\ Cx,y)+(M_2\,y,FCx).$$

Luînd $F=\varepsilon_0 E'$, rezultă

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=(x,\ x)+\varepsilon_0\ (y,\ y)+\varepsilon_0\ T(x,\ y),$$

unde am notat

$$T(x,\ y)=2(M_1B(Cx+Dy),\ x)+2(M_2\ Cx,\ y).$$

Avem

$$|\ T(x,y)\,|\leqslant a\,(x,x)+b\,|x|\ \ |y\,|,$$

deci

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\geqslant|\,x\,|^2+\varepsilon_0\,|\,y\,|^2-\varepsilon_0(a\,|\,x\,|^2+b\,|\,x\,|\,|\,y\,|)=$$
$$=(1-\varepsilon_0\ a)\left(|\,x\,|-\frac{\varepsilon_0\,b}{2(1-\varepsilon_0 a)}|\,y\,|\right)^2+\varepsilon_0\,|\,y\,|^2\left(1-\frac{\varepsilon_0\,b^2}{4(1-\varepsilon_0\,a)}\right).$$

Se vede că pentru $\varepsilon_0$ suficient de mic, $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ e pozitiv definită, deci soluția banală a sistemului

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax+\varepsilon_0\,B(Cx+Dy),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\varepsilon_0(Cx+Dy)$$

este asimptotic stabilă; punînd $z=Cx+Dy$, avem

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+D\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=C(Ax+\varepsilon_0\ Bz)+D\ \varepsilon_0\,z=CAx+\varepsilon_0(CB+D)z$$

deci soluția banală a sistemului

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax+\varepsilon_0\ Bz,\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=CAx+\varepsilon_0(CB+D)z$$

este asimptotic stabilă deci matricea

$$\begin{pmatrix} A & \varepsilon_0\,B \\ CA & \varepsilon_0(CB+D)\end{pmatrix}$$

este hurwitziană pentru $\varepsilon_0$ suficient de mic.

Considerăm matricea

$$\begin{pmatrix} A & BF \\ CA & (CB+D)F \end{pmatrix}.$$

Vom demonstra că această matrice este hurwitziană pentru toate matricile diagonale $F>0$ cu elementele diagonale mai mici sau egale cu $h_i$.

Dacă afirmaţia nu ar fi adevărată ar exista o matrice $0 < F_0 \leqslant F_h$ astfel ca matricea

$$\begin{pmatrix} A & BF_0 \\ CA & (CB+D)F_0 \end{pmatrix}$$

să aibă o rădăcină pur imaginară $i\omega_0$ deoarece pentru $F = \varepsilon_0 E'$ matricea este hurwitziană.

Avem

$$\det\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA(A-\lambda E)^{-1} & E' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A-\lambda E & BF \\ CA & (CB+D)F-\lambda E' \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} A-\lambda E & BF \\ 0 & [-CA(A-\lambda E)^{-1}+CB+D]F-\lambda E' \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} A-\lambda E & BF \\ CA & (CB+D)F-\lambda E' \end{pmatrix}.$$

Pentru $F = F_0$, $\lambda = i\,\omega_0$, rezultă

$$\det\begin{pmatrix} A-i\,\omega_0 E & BF_0 \\ 0 & [-CA(A-i\omega_0 E)^{-1}B+CB+D]F_0 - i\omega_0 E' \end{pmatrix} = 0.$$

Cum

$$\det(A - i\,\omega_0 E) \neq 0$$

rezultă

$$\det\{[-CA(A-i\,\omega_0 E)^{-1}B + CB + D]F_0 - i\,\omega_0 E'\} = 0.$$

Pentru $\omega_0 = 0$ se capătă $\det DF_0 = 0$, ceea ce nu se poate.

Fie $\omega_0 \neq 0$. Avem

$$A(A-i\omega_0 E)^{-1}B = B + i\,\omega_0(A-i\,\omega_0 E)^{-1}B$$

căci din

$$(A-i\omega_0 E)(A-i\,\omega_0 E)^{-1} = E$$

rezultă

$$A(A-i\,\omega_0 E)^{-1} - i\,\omega_0(A-i\omega_0 E)^{-1} = E,$$

deci

$$A(A-i\,\omega_0 E)^{-1} = E + i\,\omega_0(A-i\omega_0 E)^{-1}.$$

Rezultă

$$CA(A-i\omega_0 E)^{-1}B = CB + i\,\omega_0 C(A-i\omega_0 E)^{-1}B,$$

deci

$$-CA(A-i\omega_0 E)^{-1}B+CB=-i\omega_0 C(A-i\omega_0 E)^{-1}B,$$

deci

$$\det\{[-i\omega_0 C(A-i\omega_0 E)^{-1}B+D]F_0-i\omega_0 E'\}=0$$

sau

$$\det[-i\omega_0 C(A-i\omega_0 E)^{-1}B+D-i\omega_0 F_0^{-1}]=0,$$

deci

$$\det\left[C(A-i\omega_0 E)^{-1}B+F_0^{-1}-\frac{1}{i\omega_0}D\right]=0.$$

Există atunci un vector $z_0\neq 0$ astfel încît

$$\left[C(A-i\omega_0 E)^{-1}B+F_0^{-1}-\frac{1}{i\omega_0}D\right]z_0=0,$$

deci

$$[i\omega_0 C(A-i\omega_0 E)^{-1}B+i\omega_0 F_0^{-1}-D]z_0=0$$

sau

$$[CA(A-i\omega_0 E)^{-1}B-CB-D+i\omega_0 F_0^{-1}]z_0=0.$$

Rezultă

$$\Bigl\{P\left[C(A-i\omega_0 E)^{-1}B+F_0^{-1}-\frac{1}{i\omega_0}D\right]-$$
$$-Q[-CA(A-i\omega_0 E)^{-1}B+CB+D]+i\omega_0 QF_0^{-1}\Bigr\}z_0=0.$$

Cum prin ipoteză $H(i\omega_0)>0$, rezultă $(H(i\omega_0)z_0,z_0)>0$. Avem

$$G(i\omega_0)z_0=PF_h^{-1}z_0-PC(i\omega_0 E-A)^{-1}Bz_0-Q[CA(i\omega_0 E-A)^{-1}B+$$
$$+CB+D]z_0=PF_h^{-1}z_0-PF_0^{-1}z_0+\frac{1}{i\omega_0}PDz_0-i\omega_0 QF_0^{-1}z_0,$$

$$G^*(i\omega_0)z_0=PF_h^{-1}z_0-PF_0^{-1}z_0-\frac{1}{i\omega_0}PDz_0+i\omega_0 QF_0^{-1}z_0,$$

deci

$$(P(F_h^{-1}-F_0^{-1})z_0,\ z_0)>0.$$

Dar

$$0<F_0<F_h,\quad F_0^{-1}>F_h^{-1},$$

deci

$$F_h^{-1}-F_0^{-1}<0,$$

deci

$$(P(F_h^{-1}-F_0^{-1})z_0,\ z_0)<0.$$

Am obţinut o contradicţie, deci matricea e hurwitziană pentru orice $0<F<F_h$.

Vom lua în particular $F = F_q$, unde elementele lui $F_q$ sînt $\frac{1}{2}\,\delta_i$ pentru acei $i$ pentru care $q_i > 0$ şi $h_i - \frac{1}{2}\,\delta_i'$ pentru acei $i$ pentru care $q_i \leqslant 0$. Considerăm sistemul ajutător

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + BF_q z, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = F_q z, \quad z = Cx + Dy$$

sau, echivalent,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + BF_q z, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = CAx + (CB + D)F_q z.$$

Conform celor de mai sus, acest sistem are soluţia banală asimptotic stabilă.

Fie acum $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ o soluţie a sistemului (6). Considerăm soluţia $\bar{\bar{x}}(t)$, $\bar{\bar{y}}(t)$, $\bar{\bar{z}}(t)$ a sistemului ajutător definită pentru $t \geqslant T$ prin condiţiile $\bar{\bar{x}}(T) = x(T)$, $\bar{\bar{y}}(T) = y(T)$, $\bar{\bar{z}}(T) = z(T)$. Definim funcţiile

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} x(t) \text{ pentru } 0 \leqslant t \leqslant T, \\ \bar{\bar{x}}(t) \text{ pentru } T \leqslant t, \end{cases}$$

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} y(t) \text{ pentru } 0 \leqslant t \leqslant T, \\ \bar{\bar{y}}(t) \text{ pentru } T \leqslant t, \end{cases}$$

$$\bar{z}(t) = \begin{cases} z(t) \text{ pentru } 0 \leqslant t \leqslant T, \\ \bar{\bar{z}}(t) \text{ pentru } T \leqslant t. \end{cases}$$

Funcţiile $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$, $\bar{z}(t)$ verifică (exceptînd punctul $t = T$), sistemul

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}t} = A\bar{x} + Bf_T(t), \quad \frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}t} = f_T(t), \quad \bar{z} = C\bar{x} + D\bar{y}$$

unde

$$f_T(t) = \begin{cases} f(z(t)) \text{ pentru } 0 \leqslant t < T, \\ F_q\,\bar{\bar{z}}(t) \text{ pentru } T \leqslant t. \end{cases}$$

Deoarece matricea sistemului ajutător este hurwitziană, funcţiile $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ descresc exponenţial la infinit, deci admit transformate Fourier. Fie

$$\chi(T) = \int_0^\infty (f_T(t),\ P(\bar{z} - D\bar{y} - F_h^{-1} f_T(t)))\,\mathrm{d}t + \varepsilon_0 \int_0^\infty (f_T(t),\ f_T(t))\,\mathrm{d}t +$$
$$+ \int_0^\infty (f_T(t),\ Q\dot{\bar{z}}(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^T (f(z),\ P(z - F_h^{-1} f(z)))\,\mathrm{d}t +$$
$$+ \int_T^\infty (F_q\,\bar{\bar{z}},\ P(\bar{\bar{z}} - F_h^{-1} F_q\,\bar{\bar{z}}))\,\mathrm{d}t - \int_0^\infty (f_T(t),\ PD\bar{y})\,\mathrm{d}t + \varepsilon_0 \int_0^\infty (f_T(t), f_T(t))\,\mathrm{d}t +$$
$$+ \int_0^T (f(z),\ Q\dot{z})\,\mathrm{d}t + \int_T^\infty (Fq\bar{\bar{z}},\ Q\dot{\bar{\bar{z}}})\,\mathrm{d}t.$$

Din $F_q < F_h$ rezultă

$$F_h^{-1} F_q < E,$$

deci

$$(F_q \bar{\bar{z}},\ P(\bar{z} - F_h^{-1} F_q \bar{\bar{z}})) > 0.$$

Din

$$\frac{d}{dt}(PD\bar{y},\ \bar{y}) = 2\left(PD\bar{y},\ \frac{d\bar{y}}{dt}\right) = 2(PD\bar{y},\ f_T)$$

rezultă

$$-\int_0^\infty (f_T,\ PD\bar{y})\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{d}{dt}(PD\bar{y},\ \bar{y})\,dt = -(PD\bar{y},\ \bar{y})\Big|_0^\infty = (PDy_0, y_0)$$

căci

$$\lim_{t\to\infty} \bar{y}(t) = 0.$$

Mai departe

$$\int_T^\infty (F_q \bar{\bar{z}},\ Q\dot{\bar{z}})\,dt = \frac{1}{2}\int_T^\infty \frac{d}{dt}(F_q \bar{\bar{z}},\ Q\bar{\bar{z}})\,dt = \frac{1}{2}(F_q \bar{\bar{z}},\ Q\bar{\bar{z}})\Big|_T^\infty =$$

$$= -\frac{1}{2}(F_q\, z(T),\ Q\, z(T))$$

iar

$$\int_0^T (F_q z,\ Q\dot{z})\,dt = \frac{1}{2}(F_q z(T),\ Qz(T)) - \frac{1}{2}(F_q z_0,\ Q\, z_0),$$

deci

$$\int_T^\infty (F_q \bar{\bar{z}},\ Q\dot{\bar{z}})\,dt = -\int_0^T (F_q z,\ Q\dot{z})\,dt - \frac{1}{2}(F_q\, z_0,\ Qz_0),$$

deci

$$\int_0^\infty (f_T(t),\ Q\dot{z}(t)\,dt = \int_0^T (f(z) - F_q z,\ Q\dot{z})\,dt - \frac{1}{2}(F_q z_0, Qz_0) =$$

$$= \int_{z_0}^{z(T)} (f(z) - F_q z,\ Q dz) - \frac{1}{2}(F_q\, z_0, Qz_0) = \Phi(z(T)) - \Phi(z_0) - \frac{1}{2}(F_q z_0,\ Qz_0),$$

unde am notat

$$\Phi(z) = \int_0^z (f(z) - F_q\ z,\ Q\ dz) = \sum_i q_i \int_0^{z_i} (f_i(u) - f_q^i u)\,du.$$

Să ne amintim că dacă $q_i > 0, f_q^i = \frac{1}{2}\delta_i$ și cum $u\left[f_i(u) - \frac{1}{2}\delta_i u\right] > 0$ rezultă că pentru acești $i$ avem

$$q_i \int_0^{z_i} (f_i(u) - f_q^i\, u)\,du > 0\ ;$$

dacă $q_i \leqslant 0$, atunci

$$f_q^i = h_i - \frac{1}{2}\,\delta_i'$$

şi deci

$$u[f_i(u) - f_q^i\, u] < 0$$

deci

$$\int_0^{z_i} (f_i(u) - f_q^i\, u)\,\mathrm{d}u < 0$$

deci din nou

$$q_i \int_0^{z_i} (f_i(u) - f_q^i\, u)\,\mathrm{d}u \geqslant 0.$$

Rezultă în orice caz $\Phi\,(z) > 0$.

Ţinînd seama de calculele de mai sus deducem

$$\chi(T) > \int_0^T (f(z),\ P(z - F_h^{-1} f(z)))\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}(PDy_0,\ y_0) + \varepsilon_0 \int_0^\infty (f_T(t),\ f_T(t))\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \Phi(z(T)) - \Phi(z_0) - \frac{1}{2}(F_q\, z_0,\ Qz_0).$$

Transformînd pe $\chi(T)$ prin aplicarea teoremei lui Parseval din teoria transformatei Fourier, deducem

$$\chi(T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}_T,\ P(\tilde{z} - D\tilde{y} - F_h^{-1}\tilde{f}_T))\,\mathrm{d}\omega + \frac{\varepsilon_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}_T, \tilde{f}_T)\,\mathrm{d}\omega +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}_T,\ Q\tilde{\dot{z}})\,\mathrm{d}\,\omega,$$

unde $\tilde{f}_T$ este transformata Fourier a lui $f_T$, $\tilde{z}$ transformata lui $\bar{z}$, $\tilde{y}$ a lui $\bar{y}$, $\tilde{\dot{z}}$ a lui $\dot{\bar{z}}$. Din

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}t} = A\bar{x} + Bf_T$$

deducem

$$i\omega\, \tilde{x} - x_0 = A\tilde{x} + B\tilde{f}_T,$$

unde $\tilde{x}$ este transformata Fourier a lui $\bar{x}$.

De aici

$$(i\omega\, E - A)\,\tilde{x} = x_0 + B\tilde{f}_T,\quad \tilde{x} = (i\omega\, E - A)^{-1} x_0 + (i\omega E - A)^{-1}\, B\tilde{f}_T.$$

Din

$$\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}t} = f_T$$

rezultă

$$i\omega\tilde{y} - y_0 = \tilde{f}_T,$$

deci

$$\tilde{y} = \frac{1}{i\,\omega}\, y_0 + \frac{1}{i\,\omega}\tilde{f}_T .$$

Din

$$\bar{z} = C\bar{x} + D\bar{y}$$

rezultă

$$\tilde{z} = C\,\tilde{x} + D\tilde{y}$$

deci

$$\tilde{z} = C(i\omega E - A)^{-1} x_0 + C(i\,\omega\; E - A)^{-1} B\tilde{f}_T + \frac{1}{i\omega} Dy_0 + \frac{1}{i\,\omega} D\tilde{f}_T .$$

De aici deducem

$$\tilde{\tilde{z}} = i\,\omega\,\tilde{z} - z_0 = i\omega\; C(i\omega E - A)^{-1} x_0 + i\omega\; C(i\omega\; E - A)^{-1}\; B\tilde{f}_T +$$
$$+ Dy_0 + D\tilde{f}_T - z_0 .$$

Rezultă

$$\chi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}_T, P(C(i\;\omega\;\; E - A)^{-1} x_0 + C(i\,\omega E - A)^{-1} B\tilde{f}_T -$$
$$- F_h^{-1}\tilde{f}_T))\,\mathrm{d}\omega + \frac{\varepsilon_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}_T, \tilde{f}_T)\,\mathrm{d}\,\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}_T, Q[i\omega\; C(i\omega E - A)^{-1} x_0 +$$
$$+ i\omega\, C(i\omega E - A)^{-1} B\tilde{f}_T + Dy_0 + D\tilde{f}_T - z_0])\,\mathrm{d}\,\omega =$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}_T, [-PC(i\omega E - A)^{-1} B + PF_h^{-1} +$$
$$+ Q(i\omega\, C(A - i\omega E)^{-1} B - D]\tilde{f}_T)\,\mathrm{d}\omega +$$
$$+ \frac{\varepsilon_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}_T, \tilde{f}_T)\,\mathrm{d}\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}_T,\; Lx_0 + My_0 + Nz_0)\,\mathrm{d}\omega =$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}_T,\;\; G\tilde{f}_T)\,\mathrm{d}\,\omega + \frac{\varepsilon_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}_T, \tilde{f}_T)\,\mathrm{d}\,\omega +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}_T,\; Lx_0 + My_0 + Nz_0)\,\mathrm{d}\omega.$$

Deoarece $\chi\,(T)$ e reală, rezultă

$$\chi(T) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}_T,\;\; (H - \varepsilon_0\; E')\tilde{f}_T)\,\mathrm{d}\omega +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}_T, L\,x_0 + M\,y_0 + Nz_0)\,\mathrm{d}\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (L\,x_0 + My_0 + N\,z_0,\; \tilde{f}_T)\,\mathrm{d}\,\omega.$$

Deoarece $H(i\omega) > 0$ şi $\lim\limits_{|\omega| \to \infty} H(i\,\omega) > 0$, rezultă $H\,(i\,\omega) > \alpha^2\,E'$. Alegînd pe $\varepsilon_0$ suficient de mic, rezultă $H(i\,\omega) - \varepsilon_0 E' > 0$, deci putem scrie

$$H\,(i\,\omega) - \varepsilon_0\,E' = K\,(i\,\omega)^2.$$

Rezultă

$$\chi(T) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (K\widetilde{f}_T - K^{-1}(Lx_0 + M\,y_0 + N\,z_0),\ K\widetilde{f}_T - K^{-1}(Lx_0 + My_0 + Nz_0))\,\mathrm{d}\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (K^{-1}(L\,x_0 + My_0 + Nz_0),\ K^{-1}(Lx_0 + My_0 + Nz_0))\,\mathrm{d}\omega.$$

Convergenţa ultimei integrale rezultă din faptul că termenii de sub-integrală se comportă la infinit ca $\frac{1}{\omega^2}$. Deducem de aici

$$\chi(T) < \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (K^{-1}(Lx_0 + M\,y_0 + Nz_0), K^{-1}(Lx_0 + My_0 + Nz_0))\,\mathrm{d}\omega.$$

Ţinînd seama de evaluările obţinute anterior avem

$$\int_0^T (f(z),\ P(z - F_h^{-1}\,f(z)))\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}(PD\,y_0,\ y_0) + \varepsilon_0\int_0^T (f(z),\ f(z))\,\mathrm{d}t + \Phi(z(T)) - \Phi(z_0) - \frac{1}{2}(F_q\,z_0,\ Qz_0) < \gamma(|\,x_0\,|,\ |\,y_0\,|,\ |\,z_0\,|)$$

sau

$$\Phi(z(T)) + \int_0^T (f(z), P(z - F_h^{-1}\,f(z)) + \varepsilon_0\,f(z))\,\mathrm{d}t < c(|\,x_0\,| + |\,z_0\,|).$$

Avem $\Phi\ (z) > 0$ şi $(f(z),\ P(z - F_h^{-1} f(z))) > 0$.

Într-adevăr, din $\delta_i\ z_i^2 < z_i f_i(z_i) < h_i^2 z_i^2$ rezultă că pentru $z_i > 0$ avem $\delta_i\,z_i < f_i < h_i\,z_i$ şi $z_i - \frac{1}{h_i} f_i > 0$ deci $p_i\left(z_i - \frac{1}{h_i} f_i\right) > 0$, deci, cum $f_i > 0$, rezultă $p_i f_i\left(z_i - \frac{1}{h_i} f_i\right) > 0$; pentru $z_i < 0$ avem $h_i\ z_i < f_i < \delta_i\,z_i$ deci $z_i - \frac{1}{h_i} f_i < 0$, deci $p_i\left(z_i - \frac{1}{h_i} f_i\right) \leqslant 0$, deci, cum în acest caz $f_i < 0$, rezultă din nou $p_i\ f_i\left(z_i - \frac{1}{h_i} f_i\right) > 0$.

Fie acum

$$a(r) = \inf_{|z| \geqslant r} \Phi(z),\quad b(r) = \inf_{|z| \geqslant r}\ [(f(z),\ P(z - F_h^{-1} f(z))) + \varepsilon_0(f(z),\ f(z))].$$

Avem

$$\Phi(z) \geqslant a(|z|), \quad (f(z), P(z - F_h^{-1} f(z)) + \varepsilon_0 f(z)) \geqslant b(|z|)$$

deci inegalitatea obţinută se poate scrie

$$a(|z(T)|) + \int_0^T b(|z(t)|) \mathrm{d}t < c(|x_0| + |z_0|).$$

Dar am văzut mai sus că o asemenea inegalitate implică stabilitatea asimptotică în mare. Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Să observăm că această teoremă generală poate servi în studiul stabilităţii sistemelor de reglare cu mai multe organe regulatoare.

## § 4. STABILITATEA PRACTICĂ A SISTEMELOR CU ELEMENTE DE TIP RELEU

În încheierea acestui capitol vom prezenta un rezultat care aparţine tot lui V. M. Popov, relativ la sistemele de reglare care conţin elementele de tip releu. Acest rezultat prezintă interes teoretic şi din cauză că este un exemplu de modificare a noţiunii de stabilitate; aşa-numita stabilitate „practică" sau $\varepsilon_0$-stabilitate care se introduce cu acest prilej se poate dovedi utilă şi în alte probleme.

DEFINIŢIE. *Soluţia banală a sistemului se numeşte $\varepsilon_0$-stabilă dacă pentru orice $\varepsilon > \varepsilon_0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît $|y(t_0)| < \delta(\varepsilon)$ să implice $|y(t)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0$; $\varepsilon_0$-stabilitatea este asimptotică dacă în plus există $T(\eta, \varepsilon)$ astfel încît $\varepsilon_0 < |y(t_0)| < \eta$ şi $t \geqslant t_0 + T(\eta, \varepsilon)$ să implice $|y(t)| < \varepsilon$ (din nou $\varepsilon > \varepsilon_0$, $\eta > \varepsilon_0$).*

Se vede că această definiţie diferă de aceea obişnuită a stabilităţii uniforme prin faptul că funcţiile $\delta(\varepsilon)$ şi $T(\eta, \varepsilon)$ nu mai sînt definite pentru orice $\varepsilon > 0$ ci numai pentru $\varepsilon > \varepsilon_0$. Justificarea acestei definiţii constă în faptul că în practică valorile suficient de mici pot fi considerate nule, deci nu este necesar să putem asigura ca $|y(t)|$ să fie oricît de mic, ci numai mai mic decît nişte valori convenabile. Este uşor de văzut însă că pentru sistemele liniare această definiţie nu reprezintă o slăbire reală a noţiunii de stabilitate după Liapunov.

PROPOZIŢIE. *Dacă există $V(y)$ cu $a(|y|) \leqslant V(y) \leqslant b(|y|)$, $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} < -c(|y|)$ pentru $\varepsilon_1 \leqslant |y| \leqslant \eta_0$, atunci soluţia banală a sistemului este $\varepsilon_2$-asimptotic stabilă, $\varepsilon_2 = a^{-1}[b(\varepsilon_1)]$.*

*Demonstraţie.* Fie $\delta(\varepsilon) = b^{-1}[a(\varepsilon)]$; funcţia $a(r)$ e definită pentru $r \geqslant \varepsilon_1$, deci $\delta(\varepsilon)$ e definită pentru $\varepsilon > \varepsilon_1$.

Dacă $\varepsilon > \varepsilon_2$ rezultă $a(\varepsilon) > a(\varepsilon_2) = b(\varepsilon_1)$ şi $\delta(\varepsilon) = b^{-1}[a(\varepsilon)] > \varepsilon_1$. Fie $|y(t_0)| < \delta(\varepsilon)$; dacă $|y(t)|$ rămîne mai mic decît $\varepsilon_1$, atunci, evident, $|y(t)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0$. Putem deci presupune că există $t_1$ astfel încît $\varepsilon_1 \leqslant |y(t_1)| < \delta(\varepsilon)$ şi dacă $t_1 > t_0$ pentru $t_0 \leqslant t < t_1$ avem $|y(t)| < \varepsilon_1$.

Rezultă pentru $t \geqslant t_1$,

$$a(|y(t)|) \leqslant V(y(t)) \leqslant V(y(t_1)) \leqslant b(|y(t_1)|) \leqslant b(\delta(\varepsilon)) = a(\varepsilon)$$

deci

$$|y(t)| < \varepsilon.$$

Fie acum $T(\eta, \varepsilon) = \dfrac{b(\eta)}{c[\delta(\varepsilon)]}$, $\eta > \varepsilon_1$ şi fie $\varepsilon_1 < |y(t_0)| < \eta$.

Arătăm că în intervalul $[t_0, t_0 + T]$ există $t'$ astfel încît $|y(t')| < < \delta(\varepsilon)$. Într-adevăr, dacă am avea $|y(t)| \geqslant \delta(\varepsilon) > \varepsilon_1$ ar rezulta

$$\frac{dV}{dt} < -c(|y|) < -c[\delta(\varepsilon)],$$

deci

$$V[y(t)] - V[y(t_0)] < -c[\delta(\varepsilon)](t - t_0),$$

deci

$$V[y(t_0 + T_0] - V[y(t_0)] < -c[\delta(\varepsilon)]T = -b(\eta),$$

deci

$$V[y(t_0 + T_0)] < V[y(t_0)] - b(\eta) < b(|y(t_0)|) - b(\eta) < 0,$$

căci

$$|y(t_0)| < \eta.$$

Dar

$$V(y(t_0 + T_0)) > a(|y(t_0 + T_0)|) \geqslant a[\delta(\varepsilon)]$$

şi am ajuns la o contradicţie. Rezultă

$$|y(t')| < \delta(\varepsilon),$$

deci

$$|y(t)| < \varepsilon \text{ pentru } t \geqslant t',$$

deci în orice caz pentru $t \geqslant t_0 + T_0$. Propoziţia e demonstrată.

Să considerăm un sistem de reglare automată care conţine un singur element neliniar, descris de sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\frac{dx}{dt} = Bx + kf(\sigma) + l\sigma, \quad \frac{d\sigma}{dt} = (b, x) - pf(\sigma) + r\sigma, \tag{7}$$

unde $f(\sigma)$ verifică următoarele condiţii:

$$f(\sigma) \geqslant \rho \text{ pentru } \sigma > \delta,$$

$$-\alpha\rho \leqslant f(\sigma) \leqslant \rho \text{ pentru } |\sigma| \leqslant \delta,$$

$$f(\sigma) \leqslant -\rho \quad \text{pentru } \sigma < \delta.$$

Vom spune că o funcţie $f$ care verifică aceste condiţii aparţine clasei $C_{\rho,\delta,\alpha}$.

Vom presupune în cele ce urmează $p > 0$.

Luînd $f(\sigma) = h\sigma$ se obține sistemul

$$\frac{dx}{dt} = Bx + kh\sigma + l\sigma,$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = (b, x) - ph\sigma + r\sigma.$$

Matricea acestui sistem va fi

$$\begin{pmatrix} B & hk + l \\ b & -ph + r \end{pmatrix}$$

și va avea ecuația caracteristică

$$\det\begin{pmatrix} B - \lambda E & hk + l \\ b & -ph + r - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

sau

$$\det\begin{pmatrix} B - \lambda E & l \\ b & r - \lambda \end{pmatrix} + h \det\begin{pmatrix} B - \lambda E & h \\ b & -p \end{pmatrix} = 0$$

ceea ce se poate scrie sub forma

$$Q(\lambda) + hP(\lambda) = 0.$$

TEOREMA 2.7. *Dacă ecuația* $P(\lambda) = 0$ *are rădăcinile cu părți reale negative, atunci pentru* $\varepsilon_0$, $\eta_0$, $\alpha$ *dați se pot găsi* $\rho_0$, $\delta_0$, *astfel încît dacă* $f \in C_{\rho_0, \delta_0, \alpha}$ *să aibă loc proprietatea de* $\varepsilon_0$*-stabilitate asimptotică a sistemului* (7).

*Demonstrație*. Facem în sistem schimbarea de variabile $\eta = px + k\sigma$, care e inversabilă deoarece $p \neq 0$. Considerăm vectorul $\zeta = \begin{pmatrix} \eta \\ \sigma \end{pmatrix}$. Avem

$$\frac{d\eta}{dt} = p\frac{dx}{dt} + k\frac{d\sigma}{dt} = p\,Bx + pkf(\sigma) + pl\sigma + k(b, x) - kpf(\sigma) + kr\sigma =$$

$$= B(\eta - k\sigma) + pl\sigma + kr\sigma + kb^*\left(\frac{1}{p}\eta - \frac{1}{p}k\sigma\right) = \left(B + \frac{1}{p}kb^*\right)\eta +$$

$$+ \left(pl + rk - Bk - \frac{1}{p}kb^*k\right)\sigma = A\eta + m\sigma,$$

unde

$$A = B + \frac{1}{p}kb^*$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = (b, x) - pf(\sigma) + r\sigma = \frac{1}{p}(b, \eta - k\sigma) - pf(\sigma) + r\sigma =$$

$$= (a, \eta) - pf(\sigma) + r'\sigma.$$

În definitiv,

$$\frac{d\eta}{dt} = A\,\eta + m\,\sigma, \quad \frac{d\sigma}{dt} = a\eta - pf(\sigma) + r'\sigma.$$

Ecuaţia caracteristică a matricei $A$ este

$$\det\left(B - \lambda E + \frac{1}{p}kb^*\right) = 0.$$

Să observăm că

$$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} B-\lambda E & k \\ b & -p \end{pmatrix} = p\det\begin{pmatrix} B-\lambda E + \frac{1}{p}kb^* & \frac{1}{p}k \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^n p \det\left(B - \lambda E + \frac{1}{p}kb^*\right).$$

Rezultă că $P(\lambda) = 0$ este tocmai ecuaţia caracteristică a matricei $A$, deci condiţia din enunţ asigură că $A$ e hurwitziană. Există deci o matrice $P > 0$ astfel încît $PA + A^*P = N$, cu $N < 0$. Alegem $V = (P\eta, \eta) + \frac{1}{2}\sigma^2$; rezultă $V > 0$. Mai departe

$$\frac{dV}{dt} = \left(P\frac{d\eta}{dt}, \eta\right) + \left(P\eta, \frac{d\eta}{dt}\right) + \sigma\frac{d\sigma}{dt} = (P(A\eta + m\sigma), \eta) +$$

$$+ (P\eta, A\eta + m\sigma) + \sigma(a^*\eta - pf(\sigma) + r'\sigma) = ((PA + A^*P)\eta, \eta) +$$

$$+ 2(Pm, \eta)\sigma + (a^*\eta)\sigma - p\sigma f(\sigma) + r'\sigma^2 = (N\eta, \eta) + \sigma[(\gamma, \zeta) - pf(\sigma)];$$

am pus

$$(\gamma, \zeta) = 2(Pm, \eta) + (a, \eta) + r'\sigma,$$

deci

$$\gamma = \begin{pmatrix} Pm + a \\ r' \end{pmatrix}.$$

Din $N < 0$ rezultă

$$(N\eta, \eta) \leqslant -c|\eta|^2.$$

Deoarece $V$ este o formă pătratică pozitiv definită, există constantele $a_0$ şi $b_0$ pozitive, astfel ca

$$a_0|\zeta|^2 \leqslant V(\eta, \sigma) \leqslant b_0|\zeta|^2.$$

Fie $M_0 = a_0\varepsilon_0^2, \quad N_0 = \eta_0^2.$

Considerăm domeniul $\sqrt{\frac{M_0}{b_0}} \leqslant |\zeta| \leqslant \eta_0$.

Dacă în acest domeniu $|\sigma| \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M_0}{b_0}}$, atunci $|\eta| \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M_0}{b_0}}$, deci există $\mu > 0$ astfel ca $(N\eta, \eta) \leqslant -\mu$.

Fie acum $\nu$ astfel ca $|(\gamma, \zeta)| \leqslant \nu$ pentru $\zeta$ astfel ca $\sqrt{\frac{M_0}{b_0}} \leqslant |\zeta| \leqslant \eta_0$. Alegem $\rho_0 = \frac{\nu}{p}(1 + \Delta)$, $\Delta > 0$ arbitrar,

$$\delta_0 = \min\left[\frac{\mu(1-\Delta)}{2\nu[1+\alpha(1+\Delta)]}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M_0}{b_0}}\right].$$

Se vede că $\rho_0$ şi $\delta_0$ depind de $M_0$, $\eta_0$, $\alpha$, deci de $\varepsilon_0$, $\eta_0$, $\alpha$. Deoarece $p > 0$, rezultă $\rho_0 > 0$. Fie $|\sigma| > \delta_0$. Rezultă

$$\frac{dV}{dt} = (N\eta, \eta) - p\sigma f(\sigma) + \sigma(\gamma, \zeta) < (N\eta, \eta) - p|\sigma|\,|f(\sigma)| + \nu|\sigma|.$$

Dar pentru $|\sigma| > \delta_0$ avem $|f(\sigma)| \geqslant \rho_0$ deoarece $f \in C_{\rho_0, \delta_0, \alpha}$. Rezultă

$$p|f(\sigma)| \geqslant \nu(1+\Delta), \; p|f(\sigma)| - \nu > \nu\Delta,$$

deci

$$\frac{dV}{dt} < (N\eta, \eta) - \gamma\Delta|\sigma|$$

dacă

$$\sqrt{\frac{M_0}{b_0}} \leqslant |\zeta| \leqslant \eta_0, \; |\sigma| > \delta_0.$$

Fie acum $|\sigma| \leqslant \delta_0$. Rezultă

$$\frac{dV}{dt} < (N\eta, \eta) + \delta_0(\nu + p\alpha\rho_0)$$

căci $f \in C_{\rho_0, \delta_0, \alpha}$. Dar

$$\nu + p\alpha\rho_0 = \nu + \alpha\nu + \alpha\nu\Delta = \nu(1 + \alpha(1+\Delta))$$

şi cum

$$\delta_0 \leqslant \frac{\mu(1-\Delta)}{2\nu(1+\alpha(1+\Delta))}$$

rezultă

$$\delta_0(\nu + p\alpha\rho_0) = \delta_0\nu(1+\alpha(1+\Delta)) \leqslant \frac{\mu(1-\Delta)}{2}$$

deci

$$\frac{dV}{dt} < (N\eta, \eta) + \frac{\mu}{2} - \frac{\Delta}{2}.$$

Dar $\delta_0 \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M_0}{b_0}}$, deci $|\sigma| \leqslant \delta_0$ implică $|\sigma| < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M_0}{b_0}}$, deci $(N\eta, \eta) \leqslant -\mu$, deci $\frac{dV}{dt} < -\frac{\mu}{2} - \frac{\Delta}{2}$.

În definitiv, $\frac{dV}{dt} < -c(|\zeta|)$ în domeniul $\sqrt{\frac{M_0}{b_0}} \leqslant |\zeta| \leqslant \bar{\eta}_0$. Să aplicăm acum propoziția demonstrată mai sus în care

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{M_0}{b_0}}, \quad b(r) = b_0 r^2, \quad a(r) = a_0 r^2, \quad a^{-1}(r) = \sqrt{\frac{r}{a_0}}.$$

Atunci

$$b(\varepsilon_1) = b_0 \frac{M_0}{b_0} = M_0, \quad \varepsilon_2 = a^{-1}[b(\varepsilon_1)] = \sqrt{\frac{M_0}{a_0}} = \varepsilon_0.$$

Conform propoziției precedente rezultă $\varepsilon_2$-stabilitatea asimptotică deci $\varepsilon_0$-stabilitatea asimptotică și teorema e demonstrată.

*Observații.* 1) Proprietatea de $\varepsilon_0$-stabilitate nu presupune numaidecît că sistemul admite soluția banală. De aceea nu este necesar să presupunem că $f(0) = 0$.

2) Cazul releelor ideale se obține dacă $\delta_0 = 0$ și se vede că avem $\delta_0 = 0$ dacă luăm $\varepsilon_0 = 0$. În acest caz rezultă deci stabilitatea asimptotică în sensul obișnuit.

## COMENTARII BIBLIOGRAFICE

Problema stabilității absolute la sistemele neliniare de reglare automată a fost studiată pentru prima dată cu metoda funcției Liapunov în [36]. În acest domeniu au apărut monografiile [37], [38]. Studiul intrinsec, fără reducerea la forma canonică a fost efectuat de V. A. Iakubovici în [39], [40] și de S. Lefschetz [41]. Rezultatele din text, care dezvoltă pe ale lui S. Lefschetz, aparțin lui T. Morozan. Metoda lui V. M. Popov este expusă în lucrările [42], [43], [44]. Studiul cazului a două rădăcini nule cu metoda funcției lui Liapunov a fost efectuat de T. Morozan. Rezultatul lui V. M. Popov relativ la stabilitatea practică pentru sistemele cu elemente de tip releu a fost publicat în [45].

Echivalența metodei lui V. M. Popov cu cea a funcției Liapunov a fost demonstrată de V. A. Iakubovici în [46].

CAPITOLUL III

# TEORIA OSCILAŢIILOR

Din punct de vedere matematic, teoria oscilaţiilor conţine problema existenţei şi stabilităţii soluţiilor periodice ale sistemelor de ecuaţii diferenţiale. Se numesc, în mod uzual, oscilaţii liniare soluţiile periodice ale sistemelor liniare.

Soluţiile periodice ale sistemelor liniare cu coeficienţi constanţi sau ale unor sisteme neliniare care nu depind explicit de $t$ se numesc uneori oscilaţii libere; cînd în membrul al doilea al sistemului mai apare o funcţie periodică de $t$, oscilaţiile corespunzătoare se numesc forţate. În ultima vreme se studiază tot mai mult problema existenţei soluţiilor aproape-periodice.

În cele ce urmează vom prezenta unele fapte fundamentale relative la existenţa soluţiilor periodice şi aproape-periodice la sistemele de ecuaţii diferenţiale ordinare.

## § 1. OSCILAŢII LINIARE

Să considerăm sistemul

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)\,x + f(t), \tag{1}$$

unde $A(t)$ şi $f(t)$ sînt periodice de perioadă $\omega$.

TEOREMA 3.1. *Condiţia necesară şi suficientă ca pentru orice funcţie periodică $f(t)$ de perioadă $\omega$ sistemul (1) să admită soluţii periodice de perioadă $\omega$ este ca sistemul omogen corespunzător să nu admită alte soluţii periodice de perioadă $\omega$ decît cea banală.* Dacă această condiţie este îndeplinită, soluţia periodică a sistemului (1) este unică.

*Demonstraţie.* O soluţie a sistemului este periodică de perioadă $\omega$ dacă şi numai dacă $x(\omega) = x(0)$. Dacă soluţia este periodică, această condiţie este evident verificată; dacă această condiţie este verificată,

soluțiile $x(t+\omega)$ și $x(t)$ coincid pentru $t=0$, deci, pe baza teoremei de unicitate, coincid pentru orice $t$, deci $x(t)$ e periodică de perioadă $\omega$. După cum am văzut în capitolul I, soluția generală a sistemului (1) se scrie

$$x(t;\ x_0) = U(t)\,x_0 + \int_0^t C(t,\ s) f(s)\,ds.$$

Reamintim că $U(t) = C(t,\ 0)$ și că $C(t,\ s)$ este matricea care are drept coloane soluțiile sistemului omogen, astfel ca $C(s,\ s) = E$.

Rezultă

$$x(\omega;\ x_0) = U(\omega)\,x_0 + \int_0^\omega C(\omega,\ s) f(s)\,ds.$$

Condiția de periodicitate a soluției se scrie

$$x(\omega;\ x_0) = x_0,$$

deci

$$x_0 = U(\omega)\,x_0 + \int_0^\omega C(\omega,\ s) f(s)\,ds$$

sau

$$[E - U(\omega)]\,x_0 = \int_0^\omega C(\omega,\ s) f(s)\,ds.$$

Condiția ca acest sistem să permită determinarea lui $x_0$, oricare ar fi funcția $f$, se scrie:

$$\det\,[E - U(\omega)] \neq 0.$$

Aceasta înseamnă însă că ecuația

$$U(\omega)\,x_0 = x_0$$

nu are altă soluție decît $x_0 = 0$. Dar $U(t)\,x_0$ este soluția generală a sistemului omogen și condiția

$$U(\omega)\ x_0 = x_0$$

reprezintă tocmai condiția de periodicitate pentru soluțiile sistemului omogen. Condiția

$$\det\,[E - U(\omega)] \neq 0$$

este deci echivalentă cu cererea ca sistemul omogen să nu aibă alte soluții periodice de perioadă $\omega$, decît cea banală. Teorema e demonstrată.

PROPOZIȚIE. *În condițiile din teorema 3.1 soluția periodică unică a sistemului (1) se poate pune sub forma*

$$x(t) = \int_0^\omega G(t,\ s) f(s)\,ds,$$

*unde*

$$G(t,\ s) = U(t)\,[E - U(\omega)]^{-1}\,U^{-1}(s) \quad \textit{pentru} \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \omega,$$

$$G(t,\ s) = U(t+\omega)\,[E - U(\omega)]^{-1}\,U^{-1}(s) \quad \textit{pentru} \quad 0 \leqslant t < s \leqslant \omega.$$

*Demonstrație.* Dacă $x_0$ este valoarea inițială a soluției periodice a sistemului (1), avem

$$x_0 = [E - U(\omega)]^{-1} \int_0^\omega C(\omega, s) f(s)\, ds.$$

Soluția periodică se scrie deci

$$x(t) = U(t)\,[E - U(\omega)]^{-1} \int_0^\omega C(\omega, s) f(s)\, ds + \int_0^t C(t, s) f(s)\, ds.$$

Dar

$$C(t, s) = C(t, 0)\, C(0, s) = U(t)\, U^{-1}(s).$$

Rezultă

$$x(t) = U(t)\,[E - U(\omega)]^{-1}\, U(\omega) \int_0^\omega U^{-1}(s) f(s)\, ds + U(t) \int_0^t U^{-1}(s) f(s)\, ds.$$

Putem scrie

$$x(t) = \int_0^t G(t, s) f(s)\, ds,$$

unde

$$G(t, s) = U(t)\,[E - U(\omega)]^{-1}\, U(\omega)\, U^{-1}(s) + U(t)\, U^{-1}(s)$$

pentru $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \omega$,

$$G(t, s) = U(t)\,[E - U(\omega)]^{-1}\, U(\omega)\, U^{-1}(s) \text{ pentru } 0 \leqslant t < s \leqslant \omega.$$

Aceste formule pentru $G(t,s)$ pot fi aduse la forma din enunț observînd că

$$U(t)\,[E - U(\omega)]^{-1}\, U(\omega)\, U^{-1}(s) + U(t)\, U^{-1}(s) =$$
$$= U(t)\,\{[E - U(\omega)]^{-1}\, U(\omega) + E\}\, U^{-1}(s) = U(t)\,[E - U(\omega)]^{-1}\, U^{-1}(s)$$

căci din

$$[E - U(\omega)]^{-1}\,[E - U(\omega)] = E$$

rezultă

$$[E - U(\omega)]^{-1} - [E - U(\omega)]^{-1}\, U(\omega) = E.$$

Din relația

$$[E - U(\omega)]^{-1}\,[E - U(\omega)] = [E - U(\omega)]\,[E - U(\omega)]^{-1}$$

rezultă

$$[E - U(\omega)]^{-1}\, U(\omega) = U(\omega)\,[E - U(\omega)]^{-1}$$

deci

$$U(t)\,[E - U(\omega)]^{-1}\, U(\omega)\, U^{-1}(s) = U(t)\, U(\omega)\,[E - U(\omega)]^{-1}\, U^{-1}(s) =$$
$$= U(t + \omega)\,[E - U(\omega)]^{-1}\, U^{-1}(s).$$

Propoziția e demonstrată.

Să observăm că din această propoziție rezultă pentru soluția periodică evaluarea $|x(t)| \leqslant M \sup |f|$, unde $M$ depinde numai de sistemul omogen.

TEOREMA 3.2. *Dacă sistemul omogen*

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x \tag{2}$$

*admite soluţii periodice de perioadă* $\omega$, *atunci sistemul adjunct*

$$\frac{dy}{dt} = -\,y A(t) \tag{3}$$

*admite acelaşi număr de soluţii periodice liniar independente ca şi sistemul (2). Condiţia necesară şi suficientă ca sistemul (1) să admită soluţii periodice este ca f să fie ortogonală pe soluţiile periodice ale sistemului (3), adică*

$$\int_0^{\omega} y_k(t) f(t)\, dt = 0, \quad k = 1,2\ldots, l,$$

$y_1, \ldots, y_l$ *fiind soluţiile periodice liniar independente ale sistemului* (3).

*Demonstraţie.* Dacă sistemul (2) admite soluţii periodice, există $x_0$ astfel ca

$$U(\omega)\,x_0 = x_0\,.$$

Am văzut în capitolul I că $U^{-1}(t)$ are drept linii soluţii liniar independente ale sistemului adjunct; soluţia generală a sistemului adjunct (3) se scrie

$$y(t\,;\,y_0) = y_0\, U^{-1}(t).$$

Condiţia ca această soluţie să fie periodică de perioadă $\omega$ se scrie tot sub forma

$$y(\omega\,;\,y_0) = y_0\,,$$

deci

$$y_0\, U^{-1}(\omega) = y_0\,,$$

sau

$$y_0 = y_0\, U(\omega).$$

Trecînd la transpuse obţinem sistemul

$$U^*(\omega)\, y_0^* = y_0^*\,.$$

Dar matricile $U(\omega) - E$ şi $U^*(\omega) - E$ au acelaşi rang, deci sistemele

$$U(\omega)\,x_0 = x_0$$

şi

$$U^*(\omega)\, y_0^* = y_0^*$$

au acelaşi număr de soluţii liniar independente.

Aceasta înseamnă însă că sistemele (2) şi (3) au acelaşi număr de soluţii periodice de perioadă $\omega$ liniar independente. Condiţia necesară şi

suficientă ca sistemul (1) să admită soluții periodice de perioadă $\omega$ este ca sistemul de ecuații liniare

$$[E - U(\omega)]\,x_0 = \int_0^\omega C(\omega, s) f(s)\, ds$$

să admită soluții. Să presupunem că sistemul admite o soluție periodică. Fie $y(t)$ o soluție periodică a sistemului (3); să înmulțim egalitatea de mai sus cu $y(0)$. Avem

$$y(0)\,[E - U(\omega)]\,x_0 = y(0) \int_0^\omega U(\omega)\, U^{-1}(s) f(s)\, ds.$$

Dar am văzut mai sus că dacă $y(t)$ e soluția periodică a sistemului (3), atunci

$$y(0) = y(0)\, U(\omega)$$

deci

$$y(0)\,[E - U(\omega)] = 0.$$

Rezultă și

$$y(0)\,[E - U(\omega)]\,x_0 = 0$$

deci

$$y(0) \int_0^\omega U(\omega)\, U^{-1}(s) f(s)\, ds = 0$$

sau

$$\int_0^\omega y(0)\, U(\omega)\, U^{-1}(s) f(s)\, ds = 0.$$

Dar

$$y(0)\, U(\omega) = y(0)$$

și

$$y(0)\, U^{-1}(s) = y(s)$$

deci condiția devine

$$\int_0^\omega y(s) f(s)\, ds = 0$$

și am demonstrat că cererea din enunț e necesară.

Să presupunem acum această condiție îndeplinită. Rezultă că

$$y_0\, U(\omega) \int_0^\omega U^{-1}(s) f(s)\, ds = 0$$

pentru toate soluțiile $y_0$ ale sistemului

$$y_0 = y_0\, U(\omega).$$

Rezultă că sistemul

$$y_0[E - U(\omega)] = 0, \quad y_0\, U(\omega) \int_0^\omega U^{-1}(s) f(s)\, ds = 0$$

are acelaşi număr de soluţii liniar independente ca şi sistemul

$$y_0\,[E - U(\omega)] = 0$$

deci matricea $E - U(\omega)$ şi matricea extinsă la care s-a adăugat coloana $\int_0^\omega U(\omega)\,U^{-1}(s)\,f(s)\mathrm{d}s$ au acelaşi rang. Dar conform teoremei lui Kronecker-Capelli, aceasta este suficient pentru ca sistemul

$$[E - U(\omega)]\,x_0 = \int_0^\omega U(\omega)\;U^{-1}(s)\,f(s)\,\mathrm{d}s$$

să aibă soluţii şi teorema e demonstrată.

În cazul cînd condiţia de ortogonalitate din teorema 3.2 nu este verificată, sistemul (1) nu admite soluţii periodice şi are loc *fenomenul de rezonanţă* : toate soluţiile sistemului (1) sînt nemărginite.

TEOREMA 3.3. *Dacă sistemul (1) nu are soluţii periodice, afară de soluţia banală, atunci toate soluţiile sistemului sînt nemărginite.*

*Demonstraţie.* Dacă sistemul (1) nu admite soluţii periodice, există o soluţie periodică de perioadă $\omega$ a sistemului (3) astfel încît

$$\int_0^\omega y(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t \neq 0.$$

Notînd cu $y_0$ valoarea iniţială a acestei soluţii avem

$$y_0\,[E - U(\omega)] = 0$$

şi

$$y_0 \int_0^\omega U^{-1}(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t \neq 0.$$

Fie $x(t)$ o soluţie oarecare a sistemului (1). Avem

$$x(t) = U(t)\,x(0) + \int_0^t C(t, s)\,f(s)\,\mathrm{d}s = U(t)\left[x(0) + \int_0^t U^{-1}(s)\,f(s)\,\mathrm{d}s\right],$$

deci

$$x(\omega) = U(\omega)\left[x(0) + \int_0^\omega U^{-1}(s)\,f(s)\,\mathrm{d}s\right],$$

de unde deducem

$$y_0\,x(\omega) = y_0\,U(\omega)\,x(0) + y_0\,U(\omega)\int_0^\omega U^{-1}(s)\,f(s)\,\mathrm{d}s =$$

$$= y_0\,x(0) + y_0\int_0^\omega U^{-1}(s)\,f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Mai departe, putem scrie

$$x(t + \omega) = U(t)\,x(\omega) + \int_0^t C(t, s)\,f(s)\,\mathrm{d}s,$$

căci în ambii membri avem soluţii ale ecuaţiei care coincid pentru $t = 0$. Rezultă

$$x(2\omega) = U(\omega)\left[x(\omega) + \int_0^\omega U^{-1}(s) f(s)\, ds\right],$$

de unde

$$y_0\, x(2\omega) = y_0\, x(\omega) + y_0 \int_0^\omega U^{-1}(s) f(s)\, ds = y_0\, x(0) + 2y_0 \int_0^\omega U^{-1}(s) f(s)\, ds.$$

Arătăm prin inducţie că

$$y_0\, x\,(n\,\omega) = y_0\, x(0) + ny_0 \int_0^\omega U^{-1}(s) f(s)\, ds.$$

Avem

$$x(t + n\omega) = U(t)\, x(n\omega) + \int_0^t C(t, s) f(s)\, ds,$$

căci în ambii membri sînt soluţii ale sistemului şi acestea coincid pentru $t = 0$. Rezultă

$$x\,[(n+1)\,\omega] = U(\omega)\left[x(n\omega) + \int_0^\omega U^{-1}(s) f(s)\, ds\right],$$

deci

$$y_0\, x\,[(n+1)\,\omega] = y_0\, x(n\omega) + y_0 \int_0^\omega U^{-1}(s) f(s)\, ds =$$

$$= y_0\, x(n\omega) + (n+1)\, y_0 \int_0^\omega U^{-1}(s) f(s)\, ds.$$

Cum din felul în care a fost ales $y_0$ rezultă

$$y_0 \int_0^\omega U^{-1}(s) f(s)\, ds \neq 0$$

din formula

$$y_0\, x(n\omega) = y_0\, x(0) + ny_0 \int_0^\omega U^{-1}(s) f(s)\, ds$$

rezultă că soluţia $x\,(t)$ nu poate fi mărginită, căci atunci şirul numeric $y_0\, x(n\omega)$ ar trebui să fie mărginit. Teorema este demonstrată.

## § 2. SOLUŢII APROAPE-PERIODICE ALE SISTEMELOR LINIARE

Teoremele demonstrate pînă acum au avut un caracter pronunţat algebric. Vom stabili acum o teoremă mai slabă decît teorema 3.1, folosind o funcţie Liapunov; interesul acestei teoreme constă în faptul că ea se poate extinde în cazul sistemelor aproape-periodice.

Să începem cu următoarea observaţie simplă : *Dacă un sistem periodic*

$$\dot{x} = f(t, x), \qquad f(t + \omega, x) = f(t, x)$$

*admite o soluţie mărginită* $x_0(t)$ *astfel încît*

$$\lim_{t\to\infty} [x_0(t + \omega) - x_0(t)] = 0,$$

*atunci el admite o soluţie periodică.*

Într-adevăr, şirul

$$x_n = x(n\omega)$$

este mărginit, deci din el se poate extrage un subşir $x_{n_k}$ convergent către un punct $x^*$. Din ipoteză rezultă pentru orice $n$

$$\lim_{n\to\infty} [x_0((n + 1)\omega) - x_0(n\omega)] = 0,$$

deci

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k+1} = x^*.$$

Din

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x^*$$

rezultă

$$\lim_{k\to\infty} x(t; x_{n_k}) = x(t; x^*)$$

şi din

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k+1} = x^*$$

rezultă

$$\lim_{k\to\infty} x(t; x_{n_k+1}) = x(t; x^*).$$

Dar

$$x(t; x_{n_k+1}) = x(t; x_0[(n_k + 1)\omega]) = x_0(t + (n_k + 1)\omega) =$$

$$= x_0(t + \omega + n_k\omega) = x(t + \omega; x_0(n_k\omega)) = x(t + \omega; x_{n_k}).$$

Rezultă

$$\lim_{k\to\infty} x(t; x_{n_k+1}) = \lim_{k\to\infty} x(t + \omega; x_{n_k}) = x(t + \omega; x^*),$$

deci

$$x(t; x^*) = x(t + \omega; x^*)$$

şi soluţia determinată pentru $t = 0$ prin valoarea $x^*$ este periodică.

Să considerăm acum sistemul (1) şi să presupunem că soluţia banală a sistemului (2) este asimptotic stabilă.

Fie $x_0(t)$ o soluţie oarecare a sistemului (1); deoarece $x_0(t + \omega)$ este de asemenea soluţie a sistemului (1), rezultă că $x_0(t + \omega) - x_0(t)$ este soluţie a sistemului (2), deci

$$\lim_{k\to\infty} [x_0(t + \omega) - x_0(t)] = 0.$$

Prin urmare, pentru a deduce că sistemul (1) admite o soluţie periodică este suficient să arătăm că soluţia banală a sistemului (2) este asimptotic stabilă şi că sistemul (1) admite o soluţie mărginită. Vom arăta însă că, chiar în condiţii mai generale, dacă soluţia banală a sistemului (2) este uniform asimptotic stabilă, atunci sistemul (1) admite o soluţie mărginită.

LEMĂ. *Se consideră sistemul* (1) *unde* $A(t)$ *şi* $f(t)$ *sînt presupuse mărginite pentru* $t \geqslant 0$. *Dacă soluţia banală a sistemului* (2) *este uniform asimptotic stabilă, atunci toate soluţiile sistemului sînt mărginite pentru* $t \geqslant 0$.

*Demonstraţie.* Conform teoremei 1.6″ există o formă pătratică $(V(t)\,x, x)$ cu proprietăţile:

$$\mu\,|x|^2 \leqslant (V(t)\,x,\ x) \leqslant M\,|x|^2,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\,x,\ x\right) + 2\,(Vx,\ A(t)\,x) = -\,|x|^2.$$

Folosind aceleaşi calcule ca în demonstraţia teoremei 1.7, deducem

$$\frac{\mathrm{d}V^*}{\mathrm{d}t} = -\,|x(t\,;t_0,x_0)|^2 + 2\,(V(t)\,x(t\,;t_0,x_0), f(t)),$$

unde $x\,(t\,; t_0, x_0)$ este soluţia generală a sistemului (1) şi

$$V^*(t) = (V(t)\,x(t\,;t_0,x_0),\ x(t\,;t_0,x_0)).$$

Dacă

$$L = \sup_{t \geqslant 0}\,|f(t)|$$

deducem

$$\frac{\mathrm{d}V^*}{\mathrm{d}t} \leqslant -\,|x(t\,;t_0,x_0)|^2 + 2ML\,|x(t\,;t_0,x_0)|.$$

Să considerăm acum o soluţie oarecare cu $|x_0| < 2LM$.
Rezultă

$$V^*(t_0) = (V(t_0)\,x_0,\ x_0) < M\,|x_0|^2 < 4L^2M^3.$$

Demonstrăm că pentru orice $t \geqslant 0$ avem

$$V^*(t) < 4L^2M^3.$$

Dacă afirmaţia nu ar fi adevărată, ar exista $t_1 > t_0$ astfel încît

$$V^*(t_1) = 4L^2M^3$$

şi

$$V^*(t) < 4L^2M^3$$

pentru $t_0 \leqslant t < t_1$. Dar atunci

$$\left.\frac{\mathrm{d}V^*}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_1} \geqslant 0.$$

Pe de altă parte,

$$4L^2M^3 = V^*(t_1) < M \mid x(t_1\,;\, t_0,\, x_0) \mid^2,$$

deci

$$\mid x(t_1\,;\, t_0,\, x_0) \mid^2 > 4L^2M^2, \quad \mid x(t_1\,;\, t_0,\, x_0) \mid > 2LM.$$

Avem

$$\left.\frac{\mathrm{d}V^*}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_1} \leqslant \mid x(t_1\,;\, t_0,\, x_0) \mid \; (2LM - \mid x(t_1\,;\, t_0,\, x_0) \mid) < 0,$$

ceea ce contrazice inegalitatea găsită mai sus. Existenţa lui $t_1$ este contradictorie, deci

$$V^*(t) < 4L^2M^3$$

pentru orice $t \geqslant t_0$, deci

$$\mu \mid x(t\,;\, t_0,\, x_0) \mid^2 \leqslant V^*(t) < 4L^2M^3,$$

ceea ce arată că soluţiile cu $\mid x_0 \mid < 2ML$ sînt mărginite pentru $t \geqslant t_0$, şi anume $\mid x(t\,;\, t_0,\, x_0) \mid \leqslant KL$. Din cauza stabilităţii asimptotice uniforme rezultă că toate soluţiile sînt mărginite şi lema e demonstrată.

Ţinînd seamă de această lemă şi de consideraţiile preliminare făcute rezultă că *dacă soluţia banală a sistemului (2) este asimptotic stabilă, atunci sistemul (1) admite o soluţie periodică unică, asimptotic stabilă.*

TEOREMA 3.4. *Se consideră sistemul (1) cu $A$ $(t)$ şi $f$ $(t)$ aproape-periodice. Dacă soluţia banală a sistemului* (2) *este uniform asimptotic stabilă, atunci sistemul* (1) *admite o soluţie aproape-periodică unică, uniform asimptotic stabilă şi care verifică o evaluare de forma :*

$$\mid x(t) \mid \leqslant K \;\sup\; \mid f(t) \mid.$$

*Demonstraţie.* Din lema precedentă rezultă existenţa unei soluţii mărginite $u$ $(t)$. Din

$$\dot{u}(t) = A(t)\, u(t) + f(t),$$

$$\dot{u}(t+\tau) = A(t+\tau)\, u(t+\tau) + f(t+\tau),$$

rezultă

$$\dot{u}(t+\tau) - \dot{u}(t) = A(t)\,[u(t+\tau) - u(t)] +$$

$$+ [A(t+\tau) - A(t)]\, u(t+\tau) + f(t+\tau) - f(t).$$

Fie $M_1 = \sup \mid u(t) \mid + 1$, $\tau$ o $\dfrac{\varepsilon}{2M_1K}$ — aproape perioadă comună

pentru $A$ şi $f$; $K$ e constanta, depinzînd numai de sistemul (2) a cărei existenţă a rezultat în lemă.

Fie $y$ $(t)$ soluţia sistemului (2) cu :

$$y(0) = u(\tau) - u(0),$$

$$v(t) = u(t+\tau) - u(t) - y(t).$$

Avem

$$v(0) = 0$$

şi

$$\dot{v}(t) = \dot{u}(t+\tau) - \dot{u}(t) - \dot{y}(t) = A(t)\,[u(t+\tau) - u(t)] +$$
$$+ [A(t+\tau) - A(t)]\,u(t+\tau) + f(t+\tau) - f(t) - A(t)\,y(t) =$$
$$= A(t)\,v(t) + [A(t+\tau) - A(t)]\,u(t+\tau) + f(t+\tau) - f(t).$$

Conform lemei rezultă

$$|v(t)| \leqslant K \sup\ |[A(t+\tau) - A(t)]\,u(t+\tau) + f(t+\tau) - f(t)| \leqslant$$
$$\leqslant K (\sup\ |A(t+\tau) - A(t)|\ \sup\ |u(t+\tau)| + \sup\ |f(t+\tau) - f(t)|) \leqslant$$
$$\leqslant K \left(\frac{\varepsilon}{2M_1K} \sup\ |u(t+\tau)| + \frac{\varepsilon}{2M_1K}\right) = K\,\frac{\varepsilon}{2K} = \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Prin urmare $|u(t+\tau) - u(t) - y(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru $t \geqslant 0$.

Deoarece soluţia banală a sistemului (2) este uniform asimptotic stabilă, avem

$$|y(t)| \leqslant Be^{-\alpha t}\ |y(0)| < 2M_1\,Be^{-\alpha t}.$$

Există $T > 0$ astfel încît dacă $t > T$ să avem

$$|y(t)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Dar atunci, pentru $t > T$, rezultă

$$|u(t+\tau) - u(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Rezultă că pentru $\varepsilon > 0$ dat există $l(\varepsilon)$ şi $T(\varepsilon)$ astfel încît în orice interval de lungime $l$ să existe un număr $\tau$ cu proprietatea că $|u(t+\tau) - u(t)| < \varepsilon$ pentru $t > T$.

Dar aceasta înseamnă că $u(t)$ este o funcţie asimptotic aproape-periodică. Atunci, pe baza teoremei fundamentale a lui Fréchet avem

$$u(t) = x_0(t) + \omega(t),$$

unde $x_0(t)$ este aproape-periodică şi

$$\lim_{t\to\infty} \omega(t) = 0.$$

Avem

$$\dot{x}_0(t) + \dot{\omega}(t) = A(t)\,x_0(t) + A(t)\,\omega(t) + f(t).$$

Dar $A(t)\,\omega(t)$ are limita zero şi $A(t)\,x_0(t) + f(t)$ este aproape-periodică; pe baza teoremei fundamentale de descompunere a lui Fréchet rezultă :

$$\dot{x}_0(t) = A(t)\,x_0(t) + f(t),$$

deci $x_0(t)$ este o soluţie aproape-periodică a sistemului (1). Din

$$|u(t)| \leqslant K \sup |f|$$

rezultă

$$|x_0(t)| \leqslant ML + |\omega(t)|.$$

Fie $\varepsilon > 0$; din

$$\lim_{t\to\infty} \omega(t) = 0$$

rezultă că există $T > 0$ astfel încît pentru $t > T$ să avem

$$|\omega(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Rezultă

$$|x_0(t)| \leqslant ML + \frac{\varepsilon}{2},$$

pentru $t > T$. Fie acum $t$ arbitrar; există o $\frac{\varepsilon}{2}$ — aproape-perioadă astfel încît $t + \tau > T$. Atunci $|x_0(t+\tau)| \leqslant ML + \frac{\varepsilon}{2}$

şi

$$|x_0(t+\tau) - x_0(t)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

deci

$$|x_0(t)| \leqslant ML + \varepsilon.$$

Deoarece $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, rezultă

$$|x_0(t)| \leqslant ML.$$

Teorema este complet demonstrată.

## § 3. SISTEME CVASILINIARE

Trecînd la studiul sistemelor neliniare începem cu cazul cel mai simplu al sistemelor cvasiliniare de forma

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(x,t), \tag{4}$$

unde $A(t)$ este o matrice periodică şi $f(x,t)$ este periodică în raport cu $t$ cu aceeaşi perioadă $\omega$ ca şi $A(t)$.

Vom presupune că sistemul liniar

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

nu admite alte soluții periodice de perioadă $\omega$ decît soluția banală. În acest caz am văzut că există o matrice $G(t,s)$ astfel încît soluția periodică unică a sistemului neomogen

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + g(t)$$

se scrie sub forma

$$x(t) = \int_0^\omega G(t,s)\, g(s)\, ds.$$

Formăm ecuația integrală neliniară

$$x(t) = \int_0^\omega G(t,s) f[x(s), s]\, ds. \tag{5}$$

Orice soluție continuă a acestei ecuații reprezintă o soluție periodică a sistemului, căci dacă ținem seama de expresia matricii $G(t,s)$, ecuația integrală devine

$$x(t) = U(t)\,[E-U(\omega)]^{-1}\int_0^\omega C(\omega; s) f[x(s), s]\, ds + \int_0^t C(t, s) f[x(s), s]\, ds$$

și deci

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\, U(t)\, [E-U(\omega)]^{-1}\int_0^\omega C(\omega; s)\, f[x(s),s]\, ds + f[x(t),t] +$$
$$+ \int_0^t A(t)\, C(t,s) f[x(s), s]\, ds = A(t)\, x(t) + f[x(t), t].$$

Reciproc, dacă $x_0(t)$ este o soluție periodică a sistemului (4), ea poate fi considerată ca soluție a sistemului liniar

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\, x + f[x_0(t), t]$$

și această soluție periodică e unică și reprezentată de formula

$$x_0(t) = \int_0^\omega G(t,s) f[x_0(s), s]\, ds,$$

deci $x_0(t)$ este soluție a ecuației integrale (5).

Rezultă că problema găsirii soluțiilor periodice ale sistemului de ecuații diferențiale considerat este echivalentă cu problema găsirii soluțiilor unei ecuații integrale neliniare. Pentru demonstrarea existenței soluțiilor acestei ecuații vom folosi metoda punctului fix.

Considerăm spațiul Banach al funcțiilor vectoriale continue și periodice, de perioadă $\omega$, cu norma

$$\| x(t) \| = \max_{0 \leqslant t \leqslant \omega} | x(t) |.$$

Definim în acest spaţiu operatorul

$$\Omega[x(t)] = \int_0^\omega G(t,s) f[x(s), s]\, ds$$

care aplică acest spaţiu în el însuşi. Într-adevăr, din cele ce precedă se ştie că $\Omega\,[x(t)]$ este soluţia periodică a sistemului liniar

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f[x(t), t],$$

deci este o funcţie continuă şi periodică de perioadă $\omega$.

Ecuaţia integrală se scrie

$$x(t) = \Omega\,[x(t)]$$

deci soluţiile ei sînt acele puncte ale spaţiului care sînt transformate de către operatorul $\Omega$ în ele însele, deci punctele fixe ale operatorului $\Omega$. În acest fel problema demonstrării existenţei soluţiilor periodice pentru sistemul de ecuaţii diferenţiale considerat se reduce la aceea a demonstrării existenţei punctelor fixe ale operatorului $\Omega$. Cea mai simplă teoremă de punct fix o constituie aşa-numitul principiu al contracţiei, valabil în orice spaţiu metric complet. Anume, dacă un operator $\Omega$ aplică o sferă a spaţiului în ea însăşi şi în plus contractă distanţele, atunci operatorul admite un punct fix şi acest punct fix e unic. Condiţia de contractare a distanţelor se scrie

$$\rho\,[\Omega(x),\ \Omega(y)] \leqslant \mu\, \rho\,(x,y),\ 0 < \mu < 1.$$

Principiul contracţiei reprezintă, după cum se ştie, forma abstractă a metodei aproximaţiilor succesive.

Să presupunem că pentru orice $x_1$ şi $x_2$ avem relaţia :

$$|f(x_1, t) - f(x_2, t)| \leqslant \beta(t)\,|x_1 - x_2|,\ \int_0^\omega \beta(s)\, ds < \frac{q}{M},\ q < 1,$$

$$M = \sup_{0 \leqslant t, s \leqslant \omega} |G(t,s)|.$$

Rezultă

$$|\,\Omega\,[x_1(t)] - \Omega\,[x_2(t)]\,| = \left|\int_0^\omega G(t,s)\,\{f[x_1(s), s] - f[x_2(s), s]\}\, ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\omega |G(t,s)|\,\Big|f[x_1(s), s] - f[x_2(s), s]\Big|\, ds \leqslant \int_0^\omega |G(t,s)|\,\beta(s)\,\Big|x_1(s) -$$

$$- x_2(s)\,|\, ds \leqslant M\,\|x_1 - x_2\| \int_0^\omega \beta(s)\, ds < M\,\frac{q}{M}\,\|x_1 - x_2\| = q\,\|x_1 - x_2\|$$

deci $\Omega$ este o contracţie.

Deducem că $\Omega$ are un punct fix unic, deci sistemul considerat admite o soluţie periodică unică.

Condițiile impuse funcției $f$ sînt foarte puternice; se cere ca această funcție să fie lipschitziană în tot spațiul, de exemplu ca derivatele ei parțiale să fie mărginite în tot spațiul. De aceea este de dorit să înlocuim această condiție cu o condiție Lipschitz locală. Pentru aceasta să punem

$$f(0,t) = g(t), \quad F(x,t) = f(x,t) - f(0,t).$$

Sistemul (4) se scrie

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + g(t) + F(x,t).$$

Ecuația integrală echivalentă cu sistemul devine

$$x(t) = \int_0^\omega G(t,s)\,g(s)\,ds + \int_0^\omega G(t,s)\,F\,[x(s), s]\,ds.$$

Dar $\int_0^\omega G(t,s)\,g(s)\,ds$ reprezintă soluția periodică unică a sistemului

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + g(t);$$

să notăm această soluție cu $\Phi(t)$. Ecuația integrală (5) se scrie deci

$$x(t) = \Phi(t) + \int_0^\omega G(t,s)\,F\,[x(s), s]\,ds.$$

*Să presupunem că există* $0 < q < 1$ *astfel încît în sfera* $\| x - \Phi \| \leqslant L$ *cu* $L \geqslant \frac{q}{1-q} \| \Phi \|$, *funcția* $F$ *să verifice condiția*

$$|F(x_1, t) - F(x_2, t)| < \beta(t)\,|x_1 - x_2|, \quad \int_0^\omega \beta(s)\,ds < \frac{q}{M}\cdot$$

*Atunci operatorul* $\Omega$ *aplică sfera* $\|x - \Phi\| < L$ *în ea însăși și este în această sferă o contracție, deci sistemul admite o soluție periodică unică în sfera* $\| x - \Phi \| \leqslant L$.

Într-adevăr, fie $x(t)$ astfel ca $\|x - \Phi\| \leqslant L$. Avem

$$|\,\Omega\,[x(t)] - \Phi(t)\,| = \left| \int_0^\omega G(t,s)\,F\,[x(s), s]\,ds \right| \leqslant M \int_0^\omega |F\,[x(s), s]|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant M \int_0^\omega \beta(s)\,|x(s)|\,ds \leqslant M\,\|x\| \int_0^\omega \beta(s)\,ds < q\,\|x\| = q\,\|x - \Phi + \Phi\| \leqslant$$

$$\leqslant q\,\|x - \Phi\| + q\,\|\Phi\| \leqslant qL + q\,\|\Phi\| \leqslant qL + q\,\frac{1-q}{q}\,L = L$$

deci $\| \Omega(x) - \Phi \| \leqslant L$. Faptul că $\Omega$ este o contracție se vede ca mai sus.

Dacă înlocuim principiul contracției cu o teoremă de punct fix mai fină, putem înlocui condiția ca $f$ să fie lipschițziană cu alte condiții mai

slabe. Vom folosi în cele ce urmează teorema lui Schauder sub forma următoare: dacă operatorul $\Omega$ aplică o sferă a spaţiului Banach în ea însăşi şi în plus $\Omega$ este complet continuu (compact), atunci $\Omega$ admite cel puţin un punct fix. Reamintim că un operator se numeşte complet continuu, dacă aplică orice mulţime mărginită într-o mulţime relativ compactă. În spaţiul Banach al funcţiilor vectoriale continue, periodice de perioadă $\omega$, condiţia ca o mulţime să fie compactă e dată de teorema lui Arzelà: e suficient ca această mulţime să fie formată din funcţii uniform mărginite şi egal continue.

Să arătăm că operatorul $\Omega$ considerat mai sus este complet continuu. Dacă $\| x \| \leqslant \alpha$, rezultă $\| \Omega (x) \| = \sup | \int_0^\omega G(t,s) f[x(s), s]\, ds | \leqslant M \omega L$, unde $L = \sup_{|x| \leqslant \alpha,\, 0 \leqslant t \leqslant \omega} | f(x, t) |$, deci mulţimea funcţiilor $\Omega[x(t)]$ este uniform mărginită. Pe de altă parte, funcţiile $\Omega[x(t)]$ sînt chiar derivabile şi avem

$$\frac{d}{dt} \Omega [x(t)] = A\, \Omega[x(t)] + f[x(t), t]$$

deci

$$\left\| \frac{d}{dt} \Omega [x(t)] \right\| \leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant \omega} | A(t) |\, M \omega L + L,$$

deci derivatele funcţiilor $\Omega[x(t)]$ sînt uniform mărginite, ceea ce arată că aceste funcţii sînt egal continue. Mulţimea $\Omega[x(t)]$ rezultă relativ compactă dacă $\| x \| \leqslant \alpha$, deci operatorul $\Omega$ este complet continuu. Pentru a putea deduce existenţa unui punct fix rămîne să găsim condiţii care asigură că există o sferă pe care $\Omega$ o aplică în ea însăşi.

*Fie* $|f(x, t)| \leqslant \beta(|x|)$; *dacă există* $\alpha_0$ *astfel încît* $\frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0} \leqslant \frac{1}{M\omega}$, *atunci operatorul* $\Omega$ *aplică sfera* $\| x \| \leqslant \alpha_0$ *în ea însăşi.*

Într-adevăr, dacă $\| x \| < \alpha_0$ rezultă

$$| f(x(t), t) | < \beta(\alpha_0) \text{ şi}$$

$$\| \Omega(x) \| \leqslant M \omega \beta(\alpha_0) \leqslant M \omega \frac{\alpha_0}{M\omega} = \alpha_0.$$

***În particular**, dacă există* $\beta$ *şi* $K$ *astfel încît în tot spaţiul* $|f(t, x)| \leqslant \beta |x| + K$ *şi* $\beta < \frac{1}{M\omega}$, *atunci* $\beta(\alpha) = \beta\alpha + K$, $\frac{\beta(\alpha)}{\alpha} = \beta + \frac{K}{\alpha}$, $\lim_{\alpha \to \infty} \frac{\beta(\alpha)}{\alpha} = \beta < \frac{1}{M\omega}$ *şi există* $\alpha_0$ *astfel încît* $\frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0} \leqslant \frac{1}{M\omega}$.

Rezultă că *dacă* $|f(t,x)| \leqslant \beta |x| + K$ *şi* $\beta < \frac{1}{M\omega}$, *atunci sistemul* (4) *admite cel puţin o soluţie periodică de perioadă* $\omega$.

Vom stabili acum un rezultat mai fin care permite anumite aplicaţii în teoria servomecanismelor neliniare.

TEOREMA 3.5. *Considerăm sistemul*

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + \lambda\, e(t) + F(x,t), \quad \lambda > 0.$$

*Presupunem că $A(t)$ și $e(t)$ sînt periodice de perioadă $\omega$, sistemul liniar $\frac{dx}{dt} = A(t)\,x$ nu are alte soluții periodice de perioadă $\omega$ decît soluția banală, $F(x,t)$ e periodică în $t$ de perioadă $\omega$, $|F(x,t)| \leqslant L$ pentru orice $x$ și $t$, $|F(x_1, t) - F(x_2, t)| < B\,|x_1 - x_2|$ pentru orice $x_1$, $x_2$ și $t$. În plus, presupunem că există $r_0 > 0$ astfel încît pentru $|x_1| \geqslant r_0$, $|x_2| \geqslant r_0$ să avem*

$$|F(x_1,t) - F(x_2,t)| \leqslant \beta\,|x_1 - x_2|, \ \beta < \frac{1}{M\omega}, \ M = \sup|G(t,s)|.$$

*În sfîrșit, presupunem că există $\eta > 0$ astfel încît*

$$\text{mes}\, E = \text{mes}\, \{t \in [0,\omega], |\Phi(t)| < \eta\} < \frac{1 - M\omega\beta}{MB},$$

*$\Phi(t)$ fiind soluția periodică unică a sistemului $\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + e(t)$. În aceste condiții, pentru $\lambda > \lambda_0 = \frac{r_0 + ML\omega}{\eta}$ sistemul admite o soluție periodică unică de perioadă $\omega$.*

*Observație.* Ipoteza $|F(x,t)| \leqslant L$ este suficientă pentru a permite, pe baza considerațiilor precedente, să deducem existența soluției periodice pentru orice $\lambda$. De aceea esențialul în teorema pe care o demonstrăm este *unicitatea* soluției periodice pentru $\lambda > \lambda_0$. În ceea ce privește ipotezele ele diferă de cele al rezultatului bazat pe principiul contracției prin faptul că funcției $F$ i se cere să admită o constantă Lipschitz mică numai pentru $|x| > r_0$ și în schimb se impune o condiție suplimentară soluției $\Phi(t)$. Subliniem faptul că în condițiile teoremei unicitatea se obține numai pentru $\lambda > \lambda_0$.

*Demonstrație.* Soluțiile periodice de perioadă $\omega$ ale sistemului verifică ecuația integrală

$$x(t) = \lambda\,\Phi(t) + \int_0^{\omega} G(t,s)\, F[x(s), s]\, ds.$$

Rezultă că pentru toate soluțiile periodice avem

$$|x(t) - \lambda\,\Phi(t)| \leqslant L\,\omega\, M,$$

deci

$$|x(t)| \geqslant \lambda\,|\Phi(t)| - L\,\omega\, M.$$

Pentru $t \in [0,\omega] - E_\eta = CE_\eta$ va rezulta $|x(t)| \geqslant \lambda \cdot \eta - L\,\omega\, M > r_0$ dacă $\lambda > \lambda_0$. Dacă $x_1$ și $x_2$ sînt două soluții periodice de perioadă $\omega$ avem

$$x_1(t) - x_2(t) = \int_0^\omega G(t, s)\{F[x_1(s), s] - F[x_2(s), s]\}\, ds =$$

$$= \int_{E_\eta} G(t,s)\{F[x_1(s), s] - F[x_2(s), s]\}\, ds +$$

$$+ \int_{CE_\eta} G(t, s)\{F[x_1(s), s] - F[x_2(s), s]\}\, ds$$

deci

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant MB \| x_1 - x_2 \| \text{ mes } E_\eta + \omega\, M\, \beta \| x_1 - x_2 \|$$

căci mes $CE_\eta \leqslant \omega$ și pe $CE_\eta$ avem $|x_1(t)| > r_0$, $|x_2(t)| > r_0$. Rezultă

$$\| x_1 - x_2 \| \leqslant M(B \text{ mes } E_\eta + \omega\, \beta) \| x_1 - x_2 \|.$$

Din

$$\text{mes } E_\eta < \frac{1 - M\omega\beta}{MB}$$

rezultă

$$MB \text{ mes } E_\eta + M\,\omega\,\beta < 1$$

și inegalitatea obținută implică $\| x_1 - x_2 \| = 0$, deci $x_1 = x_2$. Teorema e demonstrată.

TEOREMA 3.6. *Dacă la condițiile teoremei precedente adăugăm condiția ca soluția banală a sistemului*

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y$$

*să fie uniform asimptotic stabilă, deci* $|y(t; t_0, y_0)| \leqslant K e^{-\alpha(t-t_0)} |y_0|$, *și în plus*

$$\beta < \min\left\{\frac{\alpha}{K}, \frac{1}{M\omega}\right\},$$

*și*

$$\text{mes } \{t \in [0,\omega],\ |\Phi(t)| = 0\} = 0,$$

*atunci există* $\lambda_0$ *astfel încît pentru* $\lambda > \lambda_0$ *soluția periodică unică este uniform asimptotic stabilă.*

*Demonstrație.* Fie $\mu > 0$ arbitrar, $\tau > \dfrac{\ln K + BK\mu}{\alpha - K\beta}$; atunci

$$q = K e^{BK\mu} e^{-(\alpha - K\beta)\tau} < 1.$$

Fie $N$ cel mai mic număr natural astfel ca $N\omega \geqslant \tau$. Deoarece mulțimea punctelor pe care $\Phi(t)$ se anulează are măsura nulă, rezultă că există $\eta > 0$ astfel încît

$$\text{mes } \{t \in [t_0, t_0 + N\omega],\ |\Phi(t)| < \eta\} < \mu.$$

Într-adevăr, funcția $\Phi(t)$ fiind periodică avem pentru orice $t_0 \geqslant 0$

$$\text{mes}\,\{t \in [t_0,\ t_0 + N\omega],\ |\ \Phi(t)\ | = 0\ \} = 0.$$

Dar

$$\{t \in [t_0,\ t_0 + N\ \omega],\ |\ \Phi(t)\ | = 0\} = \bigcap_{i=0}^{\infty} \{t \in [t_0,\ t_0 + N\omega],\ |\ \Phi(t)\ | < \eta_i\},$$

unde $\eta_i$ este un șir monoton descrescător care tinde către zero.
Rezultă

$$\lim_{i \to \infty} \text{mes}\,\{t \in [t_0,\ t_0 + N\ \omega],\ |\ \Phi(t)\ | < \eta_i\} = 0,$$

deci există $\eta > 0$ astfel ca

$$\text{mes}\,\{t \in [t_0,\ t_0 + N\ \omega],\ |\ \Phi(t)\ | < \eta\} < \mu,$$

$\eta$ depinzînd numai de $\mu$ și nu de $t_0$ (căci măsura translatatei unei mulțimi este aceeași cu cea a mulțimii date, iar $\{t \in [t_0, t_0 + N\ \omega],\ |\ \Phi(t)\ | < \eta_i\}$ este translatata cu $t_0$ a mulțimii $\{t \in [0, N\omega],\ |\ \Phi(t)| < \eta_i\}$ din cauza periodicității funcției $\Phi$).

Pentru $\eta$ astfel găsit luăm

$$\lambda_0 = \frac{2\,r_0 + LM\omega}{\eta}.$$

Punem

$$F_\eta^t = \{\ s \in [t_0, t],\ |\ \Phi(s)\ | < \eta\}.$$

Pentru $0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + N\omega$ avem mes $F_\eta^t < \mu$. Fie $x_0(t)$ soluția periodică unică a sistemului, care există pentru $\lambda > \lambda_0$ conform teoremei precedente. Din relația

$$x_0(t) = \lambda\,\Phi(t) + \int_0^\omega G(t, s)\, F\,[x_0(s), s]\, ds$$

rezultă

$$\|\ x_0\ (t) - \lambda\,\Phi\ (t)\| < LM\ \omega,$$

deci

$$|\ x_0(t)\ | \geqslant \lambda\ |\ \Phi(t)\ | - LM\omega.$$

De aici deducem că pentru $s \in [t_0, t] - F_\eta^t = CF_\eta^t$ vom avea $|\ x_0(s)\ | \geqslant \lambda\ \eta - LM\ \omega \geqslant 2\ r_0$. Fie $x(t)$ o soluție a sistemului,

$$y_0 = x(t_0) - x_0(t_0),\ y(t) = x(t) - x_0(t).$$

Avem

$$\frac{dy(t)}{dt} = A(t)\, y(t) + F\,[y(t) + x_0(t), t] - F\,[x_0(t), t].$$

Rezultă

$$y(t) = C(t;t_0)\,y_0 + \int_{t_0}^{t} C(t,s)\,\{F[y(s)+x_0(s),s] - F[x_0(s),s]\}\,ds =$$

$$= C(t;t_0)\,y_0 + \int_{F_\eta^t} C(t,s)\,\{F[y(s)+x_0(s),s] - F[x_0(s),s]\}\,ds +$$

$$+ \int_{CF_\eta^t} C(t,s)\,\{F[y(s)+x_0(s),s] - F[x_0(s),s]\}\,ds.$$

Fie

$$K^* = e^{(\alpha - K\beta)\tau},\quad |y_0| \leqslant \frac{r_0}{K^*}\cdot$$

Deoarece $K^* > 1$, există un interval dincolo de $t_0$ pentru care $|y(s)| < r_0$; avem

$$|y(s) + x_0(s)| \geqslant |x_0(s)| - |y(s)|,$$

deci pentru valorile lui $s$ pentru care $|y(s)| < r_0$ şi care aparţin lui $CF_\eta^t$ va rezulta

$$|y(s) + x_0(s)| \geqslant 2r_0 - r_0 = r_0.$$

Rezultă că pentru $0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau \leqslant t_0 + N\omega$ vom avea

$$|y(t)| \leqslant K e^{-\alpha(t-t_0)}|y_0| + BK\int_{F_\eta^t} e^{-\alpha(t-s)}|y(s)|\,ds +$$

$$+ K\beta\int_{CF_\eta^t} e^{-\alpha(t-s)}|y(s)|\,ds$$

dacă pentru $t_0 \leqslant s < t$ avem $|y(s)| < r_0$.

Punînd

$$u(t) = |y(t)|\,e^{\alpha t},$$

inegalitatea se scrie

$$u(t) \leqslant K e^{\alpha t_0}|y_0| + \int_{F_\eta^t} BK\,u(s)\,ds + \int_{CF_\eta^t} \beta K u(s)\,ds.$$

Considerăm funcţia măsurabilă

$$k(s) = \begin{cases} BK \text{ pentru } s \in F_\eta^t, \\ \beta K \text{ pentru } s \in CF_\eta^t \end{cases}$$

Inegalitatea precedentă devine

$$u(t) \leqslant K e^{\alpha t_0}|y_0| + \int_{t_0}^{t} k(s)\,u(s)\,ds.$$

De aici deducem

$$u(t) \leqslant Ke^{\alpha t_0} | y_0 | e^{\int_{t_0}^{t} k(s)\, ds} = Ke^{\alpha t_0} | y_0 | e^{\int_{F_\eta^t} BK ds} e^{\int_{CF_\eta^t} \beta K ds} \leqslant$$

$$\leqslant Ke^{\alpha t_0} | y_0 | e^{BK\mu} e^{\beta K (t - t_0)},$$

deci

$$| y(t) | < Ke^{BK\mu} | y_0 | e^{-(\alpha - K\beta)(t - t_0)} ;$$

de unde

$$| y(t) | \leqslant Ke^{\beta K\mu} | y_0 | = q K^* | y_0 | \leqslant qr_0$$

pentru orice $t \geqslant t_0$, ceea ce arată că inegalitatea $|y(t)| < r_0$ se menține în tot intervalul $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau$, deci în tot acest interval avem

$$| y(t) | \leqslant qK^* | y_0 | e^{-(\alpha - K\beta)(t - t_0)}.$$

În particular

$$| y(t_0 + \tau) | \leqslant q K^* | y_0 | e^{-(\alpha - K\beta)\tau} = q | y_0 |.$$

Deoarece constanta $q$ nu depinde de $t_0$, putem lua ca moment inițial pe $t_0 + \tau$ și deducem

$$| y(t_0 + 2\tau) | \leqslant q | y(t_0 + \tau) | \leqslant q^2 | y_0 |$$

și prin inducție obținem

$$| y(t_0 + n\tau) | \leqslant q^n | y_0 |.$$

Fie acum $t \geqslant t_0 \geqslant 0$. Există $n$ astfel ca

$$n\tau \leqslant t - t_0 < (n + 1)\tau$$

deci

$$| y(t) | \leqslant qK^* | y(t_0 + n\tau) | \leqslant q K^* q^n | y_0 |.$$

Din

$$n + 1 > \frac{t - t_0}{\tau}, \quad q < 1$$

rezultă

$$q^{n+1} < q^{\frac{t - t_0}{\tau}} = e^{\frac{t - t_0}{\tau} \ln q} ;$$

luînd

$$\alpha^* = -\frac{\ln q}{\tau},$$

deducem

$$| y(t) | \leqslant K^* e^{-\alpha^* (t - t_0)} | y_0 |,$$

ceea ce arată că soluția $x_0(t)$ este exponențial stabilă și teorema e demonstrată.

Să observăm că dacă

$$\lambda \geqslant \frac{m r_0 + LM\omega}{\eta}, \quad m \geqslant 2,$$

stabilitatea asimptotică va fi asigurată dacă

$$| y_0 | \leqslant \frac{(m-1) r_0}{K^*},$$

deci domeniul de atracţie poate fi oricît de mare cu condiţia ca $\lambda$ să fie suficient de mare.

*Aplicaţii.* 1° Considerăm sistemul

$$\ddot{x} + A\dot{x} + Bx = \begin{cases} M(t)\,[\lambda\, e(t) + C\dot{x} + Dx] \text{ pentru } |\lambda\, e(t) + C\dot{x} + Dx| \leqslant 1, \\ \dfrac{M(t)\,[\lambda\, e(t) + C\dot{x} + Dx]}{|\lambda\, e(t) + C\dot{x} + Dx|} \text{ pentru } |\lambda\, e(t) + C\dot{x} + Dx| \geqslant 1, \end{cases}$$

unde $A$, $B$, $C$, $D$ sînt matrici pătratice constante, de ordinul $n$, $M(t)$ o matrice pătratică de ordinul $n$, cu derivată continuă, periodică de perioadă $\omega$, $\lambda > 0$. Presupunem verificate condiţiile:

*a*) matricile $C$ şi $D$ sînt permutabile cu $A$ şi cu $B$.

*b*) Părţile reale ale rădăcinilor ecuaţiilor

$$\det\,(\lambda^2 E + A\lambda + B) = 0,$$

$$\det\,(C^{-1} D + E\lambda) = 0$$

sînt negative; $E$ este ca de obicei matricea unitate.

*c*) $e(t)$ este periodică, de perioadă $\omega$, admite derivată de ordinul al doilea continuă şi

$$\text{mes}\,\{t \in [0, \omega],\, |e(t)| = 0\} = 0.$$

Atunci există $\lambda_0$ astfel încît pentru $\lambda > \lambda_0$ sistemul admite o soluţie periodică unică şi această soluţie este asimptotic stabilă; domeniul ei de atracţie creşte cu $\lambda$ şi tinde la infinit cînd $\lambda \to \infty$.

*Demonstraţie.* Fie

$$g(u) = \begin{cases} u \text{ pentru } |u| \leqslant 1, \\ \dfrac{u}{|u|} \text{ pentru } |u| \geqslant 1. \end{cases}$$

Considerăm sistemul auxiliar

$$\dot{x} = -C^{-1} Dx + C^{-1} y - \lambda\, C^{-1} e(t),$$

$$\dot{y} = -Ay + z + CM(t)\, g(y) + \lambda\, (\dot{e}(t) + Ae(t)),$$

$$\dot{z} = -By + DM(t)\, g(y) + \lambda\, Be(t).$$

Acest sistem verifică toate condiţiile din teorema precedentă. Sistemul liniar corespunzător se scrie

$$\dot{x} = -C^{-1} Dx + y, \quad \dot{y} = -Ay + z, \quad \dot{z} = -By.$$

Matricea lui este

$$\begin{pmatrix} -C^{-1}D & C^{-1} & O \\ O & -A & E \\ O & -B & O \end{pmatrix};$$

valorile proprii ale acestei matrici vor fi cele ale matricii

$$\begin{pmatrix} -A & E \\ -B & O \end{pmatrix}$$

şi cele ale matricii $-C^{-1}D$.

Deoarece rădăcinile ecuației

$$\det (C^{-1}D + \lambda E) = 0$$

au părți reale negative, matricea $-C^{-1}D$ este hurwitziană. Ecuația

$$\det\begin{pmatrix} -A-\lambda E & E \\ -B & -\lambda E \end{pmatrix} = 0$$

se mai poate scrie

$$\det\begin{pmatrix} -A-\lambda E & E \\ -B-A\lambda-\lambda^2 E & O \end{pmatrix} = 0$$

deci

$$\det (\lambda^2 E + \lambda A + B) = 0$$

deci conform ipotezelor şi matricea

$$\begin{pmatrix} -A & E \\ -B & O \end{pmatrix}$$

este hurwitziană. Rezultă că soluția banală a sistemului liniar de primă aproximație este asimptotic stabilă.

Considerăm acum sistemul liniar neomogen

$$\dot{x} = -C^{-1}Dx + C^{-1}y - C^{-1}e(t),$$

$$\dot{y} = -Ay + z + (\dot{e}(t) + Ae(t)),$$

$$\dot{z} = -By + Be(t).$$

Acest sistem admite soluția periodică $x = 0$, $y = e(t)$, $z = 0$. Datorită proprietăților sistemului omogen, această soluție periodică e unică; conform ipotezei făcute asupra funcției $e(t)$, soluția periodică verifică condiția din teorema precedentă. Rămîne deci să verificăm proprietățile termenilor neliniari. Primul grup de ecuații nu conține asemenea termeni. Termenii din ultimele două grupuri sînt de forma $CM(t)g(y)$ şi $DM(t)g(y)$.

Cum $|g(u)| \leqslant 1$, condiția de mărginire e verificată.

Mai departe, dacă $|u_1| \leqslant 1$, $|u_2| \leqslant 1$ avem

$$|g(u_1) - g(u_2)| = |u_1 - u_2|.$$

Dacă $1 \leqslant |u_1| \leqslant |u_2|$ fie $u_3 = \frac{|u_1|}{|u_2|} u_2$; atunci $|g(u_1) - g(u_2)| =$

$$= \left|\frac{u_1}{|u_1|} - \frac{u_2}{|u_2|}\right| = \frac{1}{|u_1|}\left|u_1 - \frac{|u_1|}{|u_2|} u_2\right| = \frac{1}{|u_1|} |u_1 - u_3| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|u_1|} |u_1 - u_2|.$$

Dacă

$$|u_1| < 1 < |u_2|,$$

atunci

$$|g(u_1) - g(u_2)| = \left|u_1 - \frac{u_2}{|u_2|}\right| < |u_1 - u_2|.$$

Rezultă că pentru toți $u_1$ și $u_2$ avem

$$|g(u_1) - g(u_2)| \leqslant |u_1 - u_2|$$

deci $g$ este lipschitziană. Dacă $|u_2| \geqslant |u_1| \geqslant r_0$, rezultă

$$|g(u_1) - g(u_2)| \leqslant \frac{1}{|u_1|} |u_1 - u_2| \leqslant \frac{1}{r_0} |u_1 - u_2|$$

deci dacă $r_0$ este suficient de mare constanta Lipschitz în regiunea $r \geqslant r_0$ poate fi luată oricît de mică. Deducem că sînt îndeplinite toate condițiile din teorema precedentă și deci pentru $\lambda > \lambda_0$ există o soluție periodică unică a sistemului și această soluție este exponențial stabilă. Sistemul dat inițial se poate scrie

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -Bx - Ay + \varphi(x, y, t),$$

unde

$$\varphi(x, y, t) = \begin{cases} M(t)\,[\lambda e(t) + Cy + Dx] & \text{pentru } |\lambda e(t) + Cy + Dx| \leqslant 1 \\ \dfrac{M(t)\,[\lambda e(t) + Cy + Dx]}{|\lambda e(t) + Cy + Dx|} & \text{pentru } |\lambda e(t) + Cy + Dx| \geqslant 1. \end{cases}$$

Se vede că $\varphi$ e mărginită și cum sistemul liniar

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -Bx - Ay$$

are matricea $\begin{pmatrix} O & E \\ -B & -A \end{pmatrix}$ hurwitziană, rezultă că sistemul dat admite o soluție periodică de perioadă $\omega$. Pentru a deduce unicitatea și stabilitatea acestei soluții vom arăta că orice soluție a sistemului dat verifică sistemul auxiliar; cum soluția periodică a sistemului auxiliar e unică, soluția periodică a sistemului dat, care există, rezultă unică. Din stabi-

litatea asimptotică a soluției periodice a sistemului auxiliar va rezulta stabilitatea asimptotică a soluției periodice și pentru sistemul dat.

Fie deci $x(t)$ o soluție oarecare a ecuației date. Punem

$$y(t) = \lambda e(t) + C\dot{x}(t) + Dx(t).$$

Avem

$$\ddot{x} + A\dot{x} + Bx = M(t)\, g(y(t)).$$

Pentru $|u| \neq 1$ funcția $g(u)$ e derivabilă, deci pentru valorile $t$ pentru care $|y(t)| \neq 1$ avem

$$\dddot{x} + A\ddot{x} + B\dot{x} = M(t) \frac{\partial g}{\partial y} \dot{y} + \dot{M} g(y).$$

Deducem

$$\ddot{y} + A\dot{y} + By = \lambda \ddot{e} + C\dddot{x} + D\ddot{x} + A(\lambda \dot{e} + C\ddot{x} + D\dot{x}) + B(\lambda e + C\dot{x} + Dx) = \lambda(\ddot{e} + A\dot{e} + Be) + C(\dddot{x} + A\ddot{x} + B\dot{x}) + D(\ddot{x} + A\dot{x} + Bx) =$$

$$= \lambda(\ddot{e} + A\dot{e} + Be) + C\left(M(t) \frac{\partial g}{\partial y} \dot{y} + \dot{M} g(y)\right) + DMg(y).$$

Să punem

$$z(t) = \dot{y}(t) + Ay(t) - CM(t) g(y(t)) - \lambda(\dot{e}(t) + Ae(t)).$$

Rezultă

$$\dot{z}(t) = \ddot{y}(t) + A\dot{y}(t) - C\dot{M}(t) g(y(t)) - CM(t) \frac{\partial g}{\partial y} \dot{y}(t) - \lambda(\ddot{e}(t) + A\dot{e}(t)) = -By(t) + \lambda(\ddot{e}(t) + A\dot{e}(t) + Be(t)) + CM(t) \frac{\partial g}{\partial y} \dot{y}(t) + C\dot{M}(t) g(y(t)) + DM(t) g(y(t)) - C\dot{M}(t) g(y(t)) - \lambda(\ddot{e}(t) + A\dot{e}(t)) - CM(t) \frac{\partial g}{\partial y} \dot{y}(t).$$

deci

$$\dot{z}(t) = -By(t) + \lambda Be(t) + DM(t)\, g(y(t)).$$

În definitiv, dacă $x(t)$ este o soluție oarecare a sistemului dat, funcțiile $x(t)$, $y(t) = \lambda e(t) + C\dot{x}(t) + Dx(t)$, $z(t) = \dot{y}(t) + Ay(t) - CM(t) g(y(t)) - \lambda(\dot{e}(t) + Ae(t))$
formează o soluție a sistemului auxiliar. Cu aceasta demonstrația este încheiată.

2° Să considerăm sistemul

$$\dot{x} = A(t)\, x + \sum_{i=1}^{m} k^i(t) f(\sigma_i) + \lambda e(t),$$

unde $A\ (t)$ este o matrice pătratică, continuă și periodică de perioadă $\omega$, $k^i\ (t)$ funcții vectoriale continue și periodice de perioadă $\omega$, $f(u)$ o funcție scalară de variabilă reală, definită prin:

$$f(u) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } |u| \geqslant 1, \\ u \text{ pentru } |u| \leqslant 1, \end{cases}$$

iar $\sigma_i = (\beta^i(t), x) + \lambda\eta_i(t)$, unde $\beta^i\ (t)$ sînt vectori periodici, de perioadă $\omega$, cu derivate de ordinul întîi continue, $\eta_i$ sînt funcții scalare, periodice de perioadă $\omega$, cu derivate de ordinul întîi continue, $e(t)$ periodică de perioadă $\omega$, cu derivată continuă.

Presupunem că:

*a*) există un determinant de ordinul $m$ al matricii vectorilor $\beta^i\ (t)$ care e diferit de zero pentru toți $t$;

*b*) sistemul $\dot{x} = A(t)x$ are soluția banală uniform asimptotic stabilă;

*c*) dacă $\Phi_i\ (t)$ sînt componentele soluției periodice unice de perioadă $\omega$ a sistemului $\frac{dx}{dt} = A(t)\ x + e\ (t)$ avem pentru $i = 1,2,\ldots, m$:

$$\text{mes} \left\{ t \in [0, \omega], \left| \eta_i(t) + \sum_{k=1}^{n} \beta_k^i(t)\ \Phi_k\ (t) \right| = 0 \right\} = 0.$$

În aceste condiții există $\lambda_0 > 0$ astfel încît pentru $\lambda \geqslant \lambda_0$ sistemul dat să admită o soluție periodică unică de perioadă $\omega$ și această soluție este exponențial stabilă.

*Demonstrație*. Presupunem că este diferit de zero determinantul format cu primele $m$ linii și $m$ coloane ale matricii vectorilor $\beta^i\ (t)$. Considerăm matricea nesingulară

$$B\,(t) = \begin{pmatrix} \beta_1^1(t) & \beta_2^1(t) \ldots \beta_m^1(t) & \beta_{m+1}^1(t) \ldots \beta_n^1(t) \\ \beta_1^2(t) & \beta_2^2(t) \ldots \beta_m^2(t) & \beta_{m+1}^2(t) \ldots \beta_n^2(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_1^m(t) & \beta_2^m(t) \ldots \beta_m^m(t) & \beta_{m+1}^m(t) \ldots \beta_n^m(t) \\ 0 & 0 \ \ldots\ 0 & 1 \ \ldots\ 0 \\ \vdots & & \vdots \qquad \vdots \\ 0 & 0 \ \ldots\ 0 & 0 \ \ldots\ 1 \end{pmatrix},$$

vectorul

$$\eta\ (t) = \begin{pmatrix} \eta_1\ (t) \\ \vdots \\ \eta_m\ (t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

și transformarea liniară

$$y = B\ (t)\ x + \lambda\ \eta\ (t)$$

Avem

$$y_1 = \sigma_1, y_2 = \sigma_2, \ldots, y_m = \sigma_m, y_{m+1} = x_{m+1}, \ldots, y_n = x_n,$$

$$\dot{y} = \dot{B}x + B\dot{x} + \lambda\dot{\eta} = \dot{B}B^{-1}(y - \lambda\eta) + B(Ax + \Sigma k^i f(\sigma_i) + \lambda e) + \lambda\dot{\eta} =$$

$$= \dot{B}B^{-1}y - \lambda\dot{B}B^{-1}_{\eta} + BAB^{-1}(y - \lambda\eta) + \lambda Be + \lambda\dot{\eta} + \Sigma B k^i f(\sigma_i) =$$

$$= (BAB^{-1} + \dot{B}B^{-1})y + \lambda Be(t) + \lambda\dot{\eta}(t) - \lambda(\dot{B}B^{-1} + BAB^{-1})\eta(t) +$$

$$+ B\sum_{i=1}^{m} k^i(t) f(y_i).$$

Acest sistem îndeplinește toate condițiile teoremei 3.6.
Într-adevăr, sistemul liniar

$$\frac{dz}{dt} = (BAB^{-1} + \dot{B}B^{-1})z$$

se obține din

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

prin transformarea $z = B(t)x$ și are soluția banală uniform asimptotic stabilă.

Sistemul liniar neomogen

$$\dot{y} = (BAB^{-1} + \dot{B}B^{-1})y + Be(t) + \dot{\eta}(t) - (BAB^{-1} + \dot{B}B^{-1})\eta(t)$$

admite soluția periodică $\eta(t) + B\Phi(t)$ și conform ipotezei această soluție se anulează pe o mulțime de măsură nulă. Termenii neliniari sînt dați de $B\,\Sigma k^i f(y_i)$ și se vede că sînt mărginiți, lipschitzieni și că dacă $|y_i| \gg 1$ pentru $i = 1,2,\ldots, m$, constanta lipschitziană este nulă. Rezultă că sistemul în $y$ admite o soluție periodică unică, asimptotic stabilă.

Dacă $y(t)$ este această soluție, atunci

$$x(t) = B^{-1}(t)\,[y(t) - \lambda\eta(t)]$$

este soluția periodică a sistemului dat și se vede imediat că și ea este unică și asimptotic stabilă.

## § 4. SISTEME CU PARAMETRU MIC

O metodă foarte importantă din punct de vedere practic în studiul sistemelor neliniare este așa-numita *metodă a parametrului mic*. De multe ori elementele neliniare intervin în ecuații înmulțite cu un parametru mic. Aceasta face să apară ideea că ele pot fi neglijate, studiindu-se numai ecuațiile care se obțin pentru valoarea nulă a parametrului. Această neglijare trebuie însă justificată și teoria stabilește tocmai cazurile cînd ea este permisă, indicînd în același timp fenomenele noi care apar din considerarea termenilor neliniari.

Să considerăm un sistem de forma

$$\frac{dx}{dt} = X_0\,(x,t) + \varepsilon X_1\,(x,t,\varepsilon), \tag{6}$$

unde $X_0$ şi $X_1$ sînt periodice în raport cu $t$ cu perioadă $\omega$ şi verifică condiţiile obişnuite de regularitate (vom presupune că admit derivate parţiale continue). Pentru $\varepsilon = 0$ se obţine sistemul

$$\frac{dx}{dt} = X_0\,(x,t) \tag{7}$$

pe care-l vom numi *sistem generator*. Presupunem că sistemul generator admite o soluţie periodică $x_0(t)$; vom numi această soluţie, *soluţie generatoare*. Problema constă în a stabili unele condiţii care să asigure că există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încît dacă $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ sistemul (6) admite o soluţie periodică $x\,(t,\varepsilon)$ cu proprietatea

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x\,(t,\varepsilon) = x_0\,(t),$$

deci o soluţie pentru care $x_0\,(t)$ reprezintă o bună aproximaţie pentru $|\varepsilon|$ suficient de mic.

Fie $x\,(t,p,\varepsilon)$ soluţia sistemului (6) cu $x\,(0,p,\varepsilon)=p$. Condiţia ca această soluţie să fie periodică se scrie $x\,(\omega,p,\varepsilon) = x\,(0,p,\varepsilon)$, deci $x\,(\omega,p,\varepsilon) - p = 0$. Observăm că $x\,(t,p,0) = x_0\,(t,p)$, unde $x_0\,(t,p)$ este soluţia sistemului (7) cu $x_0\,(0,p) = p$. Notăm $f\,(p,\varepsilon) = x\,(\omega,p,\varepsilon) - p$.

Constatăm că ecuaţia $f(p,\varepsilon) = 0$ e verificată de punctul $(p_0,0)$, unde $p_0 = x_0\,(0)$, căci sistemul generator admite soluţia periodică $x_0\,(t)$. Pe baza teoremei funcţiilor implicite rezultă că dacă $\det\dfrac{\partial f}{\partial p} \neq 0$ în punctul $(p_0,0)$, atunci există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încît pentru $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ există $p\,(\varepsilon)$ continuă, cu $p\,(0) = 0$ şi $f\,[p\,(\varepsilon),\varepsilon] \equiv 0$. Soluţia $x\,(t,p\,(\varepsilon),\varepsilon)$ a sistemului va fi soluţia periodică $x\,(t,\varepsilon)$ căutată.

Rămîne deci să găsim semnificaţia condiţiei $\det\dfrac{\partial f}{\partial p} \neq 0$ în punctul $(p_0,0)$. Observăm că $\dfrac{\partial f}{\partial p} = \dfrac{\partial}{\partial p}\,x\,(\omega,p,\varepsilon) - E$, $E$ fiind matricea unitate. Rezultă de aici că $\det\dfrac{\partial f}{\partial p} \neq 0$ în punctul $(p_0,0)$ e echivalent cu a cere ca matricea $\dfrac{\partial}{\partial p}\,x\,(\omega,p,\varepsilon)$ pentru $\varepsilon = 0$, $p = p_0$ să nu admită valoarea proprie 1. Mai departe, $\dfrac{\partial}{\partial p}\,x\,(\omega,p,\varepsilon)$ pentru $\varepsilon = 0$, $p = p_0$ coincide cu $\dfrac{\partial}{\partial p}\,x\,(\omega,p,0)$ pentru $p = p_0$, deci cu $\dfrac{\partial}{\partial p}\,x\,(t,p,0)$ pentru $t = \omega$, $p = p_0$, sau $\dfrac{\partial}{\partial p}\,x_0\,(t,p)$ pentru $t = \omega$, $p = p_0$.

Rezultă de aici că existenţa soluţiei periodice pentru $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ depinde numai de sistemul generator (7). Din

$$\frac{dx_0(t, p)}{dt} = X_0[x_0(t, p), t]$$

rezultă

$$\frac{\partial}{\partial p}\frac{dx_0(t, p)}{dt} = \frac{\partial}{\partial p}X_0[x_0(t, p), t] = \frac{\partial}{\partial x}X_0[x_0(t, p), t]\frac{\partial}{\partial p}x_0(t, p),$$

deci

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial p}x_0(t, p) = \frac{\partial}{\partial x}X_0[x_0(t, p), t]\frac{\partial}{\partial p}x_0(t, p).$$

Pentru $p = p_0$ se capătă

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial p}x_0(t, p_0) = \frac{\partial}{\partial x}X_0[x_0(t, p_0), t]\frac{\partial}{\partial p}x_0(t, p_0).$$

Rezultă că matricea $\frac{\partial}{\partial p}x_0(t, p_0)$ reprezintă o matrice de soluţii a sistemului liniar

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}X_0[x_0(t), t]\,u \tag{8}$$

(*sistemul în variaţii corespunzător soluţiei generatoare*).

Cum $x_0(0, p) = p$, rezultă că $\frac{\partial}{\partial p}x_0(t, p)$ pentru $t = 0$ este chiar $E$, deci $\frac{\partial}{\partial p}x_0(t, p_0)$ este o matrice fundamentală de soluţii a sistemului în variaţii. Deoarece $x_0(t)$ este periodică de perioadă $\omega$, matricea $\frac{\partial}{\partial x}X_0[x_0(t), t]$ este periodică de perioadă $\omega$. Matricea $\frac{\partial}{\partial p}x_0(t, p)$ pentru $p = p_0$, $t = \omega$ este deci chiar matricea de monodromie a sistemului liniar (8). Condiţia ca această matrice să nu aibă valoarea proprie 1 este echivalentă cu cererea ca sistemul în variaţii să nu aibă soluţie periodică de perioadă $\omega$. Am obţinut astfel:

TEOREMA 3.7. *Dacă sistemul în variaţii corespunzător soluţiei generatoare nu are altă soluţie periodică de perioadă $\omega$ decît soluţia banală, atunci există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încît pentru $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ sistemul (6) admite o soluţie periodică $x(t, \varepsilon)$ unică cu proprietatea*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x(t, \varepsilon) = x_0(t),$$

*şi această soluţie depinde continuu de* $\varepsilon$.

Un caz particular important este cel în care sistemul generator este liniar, deci cazul sistemelor de forma

$$\frac{dx}{dt} = A\,(t)\,x + P\,(t) + \varepsilon\,X\,(x, t, \varepsilon).$$

Sistemul (8) coincide în acest caz cu

$$\frac{du}{dt} = A\,(t)\,u$$

şi teorema arată că dacă soluţia generatoare reprezintă o oscilaţie forţată în cazul de nerezonanţă, atunci pentru $|\,\varepsilon\,|$ suficient de mic sistemul neliniar admite o soluţie periodică unică a cărei primă aproximaţie este soluţia generatoare.

Să considerăm acum cazul cînd sistemul în variaţii (8) are soluţii periodice de perioadă $\omega$; atunci sistemul adjunct sistemului (8) are acelaşi număr de soluţii periodice de perioadă $\omega$ liniar independente. Notăm cu $W\,(t)$ matricea ale cărei linii sînt aceste soluţii.

Să presupunem că sistemul (6) admite o soluţie periodică $x\,(t, \varepsilon)$ astfel ca

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x\,(t, \varepsilon) = x_0\,(t).$$

Notăm

$$y\,(t, \varepsilon) = x\,(t, \varepsilon) - x_0\,(t).$$

Deducem

$$\frac{d}{dt}\,y\,(t, \varepsilon) = X_0\,[x\,(t, \varepsilon), t] + \varepsilon\,X_1\,[x\,(t, \varepsilon), t, \varepsilon] - X_0\,[x_0\,(t), t] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} X_0\,[x_0\,(t), t]\,y\,(t, \varepsilon) + Y_0\,[y\,(t, \varepsilon), t] + \varepsilon\,X_1\,[y\,(t, \varepsilon) + x_0(t), t, \varepsilon],$$

unde $Y_0\,(0, t) \equiv 0$.

Deoarece $y\,(t, \varepsilon)$ este periodică, rezultă de aici că sistemul

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} X_0\,[x_0\,(t), t]\,u + Y_0\,[y\,(t, \varepsilon), t] + \varepsilon\,X_1\,[y\,(t, \varepsilon) + x_0\,(t), t, \varepsilon]$$

admite o soluţie periodică. Pe baza teoremei 3.2 rezultă

$$\int_0^{\omega} W\,(s)\,\{Y_0[y\,(s, \varepsilon), s] + \varepsilon\,X_1\,[y\,(s, \varepsilon) + x_0\,(s), s, \varepsilon]\}\,ds = 0.$$

De aici rezultă că

$$\int_0^{\omega} W\,(s)\,X_1\,[x_0\,(s), s, 0]\,ds = 0.$$

Într-adevăr, dacă nu ar fi aşa, am avea

$$\left|\int_0^{\omega} W\,(s)\,X_1\,[x_0\,(s), s, 0]\,ds\right| = c > 0.$$

Din $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} y(s, \varepsilon) = 0$ și din continuitatea funcției $X_1$ rezultă că există $\varepsilon_0 > 0$ astfel ca pentru $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ să avem

$$\left| \int_0^\omega W(s) X_1 [y(s, \varepsilon) + x_0(s), s, \varepsilon] \, \mathrm{d}s \right| > \frac{c}{2}.$$

Dacă $X_1$ e derivabilă în raport cu $\varepsilon$, atunci $x(t, \varepsilon)$ e derivabilă în raport cu $\varepsilon$, deci $y(t, \varepsilon)$ e derivabilă în raport cu $\varepsilon$, deci $|y(t, \varepsilon)| < L|\varepsilon|$ pentru $t \in [0, \omega]$. Din diferențiabilitatea lui $X_0(x, t)$ în raport cu $x$ rezultă

$$|Y_0[y(s, \varepsilon), s]| = o(|y(s, \varepsilon)|) = o(\varepsilon).$$

Rezultă

$$\left| \varepsilon \int_0^\omega W(s) X_1 [y(s, \varepsilon) + x_0(s), s, \varepsilon] \, \mathrm{d}s \right| > \frac{c}{2} \varepsilon$$

și

$$\left| \int_0^\omega W(s) Y_0 [y(s, \varepsilon), s] \, \mathrm{d}s \right| = o(\varepsilon)$$

ceea ce este contradictoriu căci cele două mărimi sînt egale.

Am stabilit astfel următoarea:

PROPOZIȚIE. *Dacă sistemul (8) admite soluții periodice de perioadă* $\omega$ *și dacă sistemul (6) admite o soluție periodică* $x(t, \varepsilon)$ *astfel că* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} x(t, \varepsilon) = x_0(t)$, *atunci*

$$\int_0^\omega W(s) X_1 [x_0(s), s, 0] \, \mathrm{d}s = 0,$$

$W(t)$ *fiind matricea ale cărei linii sînt soluțiile periodice ale sistemului adjunct sistemului* (8).

Dacă soluția generatoare face parte dintr-o familie de soluții periodice depinzînd de un număr de parametri, sîntem în condițiile propoziției deoarece derivatele soluțiilor în raport cu parametrii sînt soluții periodice ale sistemului (8).

Condiția din propoziție permite să se găsească acele valori ale parametrilor pentru care soluția corespunzătoare este efectiv prima aproximație a unei soluții periodice a sistemului (6).

Vom redemonstra pe o cale puțin diferită propoziția de mai sus; această nouă demonstrație ne va da posibilitatea de a merge mai departe în studiul cazului cînd soluția generatoare face parte dintr-o familie de soluții depinzînd de un număr de parametri.

Fie $U(t)$ matricea fundamentală de soluții a sistemului (8), $l_i$ vectorii inițiali ai soluțiilor periodice ale sistemului adjunct sistemului (8); avem $l_i \{U(\omega) - E\} = 0$. Dacă $\rho_j$ sînt vectorii inițiali ai soluțiilor periodice ale sistemului (8) avem

$$\{U(\omega) - E\} \rho_j = 0, \; (j = n - k + 1, \ldots, n).$$

Considerăm acum vectorii $l_1, \ldots, l_{n-k}$ şi $\rho_1, \ldots, \rho_{n-k}$ astfel încît sistemele de vectori $l_i$ şi $\rho_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, să fie formate din vectori liniar independenți. Fie $S$ matricea ale cărei linii sînt $l_i$ şi $T$ matricea ale cărei coloane sînt $\rho_i$. Avem

$$S\,[U(\omega) - E]\,T = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dacă sistemul (8) admite exact $k$ soluții periodice liniar independente, atunci matricea $U(\omega) - E$ are rangul $n - k$, deci $\det \Delta \neq 0$. Condiția ca soluția $x(t, p, \varepsilon)$ a sistemului (6) să fie periodică se scrie $x(\omega, p, \varepsilon) - p = 0$. Putem scrie

$$x(\omega, p, \varepsilon) = x(\omega, p_0, 0) + \frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial p}(p - p_0) + \varepsilon \frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial \varepsilon} + o(|\varepsilon| + |p - p_0|).$$

Cum

$$x(\omega, p_0, 0) = p_0,$$

condiția de periodicitate se scrie

$$\left\{\frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial p} - E\right\}(p - p_0) + \varepsilon \frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial \varepsilon} + o(|\varepsilon| + |p - p_0|) = 0.$$

Dar am văzut că

$$\frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial p} = U(\omega),$$

deci condiția de periodicitate se scrie

$$\{U(\omega) - E\}(p - p_0) + \varepsilon \frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial \varepsilon} + o(|\varepsilon| + |p - p_0|) = 0.$$

Calculăm pe $\dfrac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial \varepsilon}$. Avem

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \varepsilon} x(t, p, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\frac{d}{dt} x(t, p, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} X_0[x(t, p, \varepsilon), t] + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\varepsilon X_1[x(t, p, \varepsilon), t, \varepsilon] = \frac{\partial X_0[x(t, p, \varepsilon), t]}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varepsilon} x(t, p, \varepsilon) + X_1[x(t, p, \varepsilon), t, \varepsilon] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} X_1[x(t, p, \varepsilon), t, \varepsilon].$$

De aici, pentru $\varepsilon = 0, p = p_0$, se capătă

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x(t, p_0, 0)}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial X_0(x_0(t), t)}{\partial x}\frac{\partial x(t, p_0, 0)}{\partial \varepsilon} + X_1[x_0(t), t, 0]$$

deci $\dfrac{\partial x(t,p_0,0)}{\partial\varepsilon}$ verifică sistemul

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial X_0[x_0(t),t]}{\partial x}z+X_1[x_0(t),t,0]$$

şi condiţia iniţială $z(0)=0$, deoarece $x(0,p,\varepsilon)=p$, deci

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}x(0,p,\varepsilon)=0.$$

Rezultă de aici, pe baza formulei variaţiei constantelor că

$$\frac{\partial x(t,p_0,0)}{\partial\varepsilon}=U(t)\int_0^t U^{-1}(s)X_1[x_0(s),s,0]\,ds,$$

deci

$$\frac{\partial x(\omega,p_0,0)}{\partial\varepsilon}=U(\omega)\int_0^\omega U^{-1}(s)X_1[x_0(s),s,0]\,ds.$$

Vectorii $l_i$ fiind liniar independenţi condiţia de periodicitate se poate scrie sub forma echivalentă

$$l_i[U(\omega)-E](p-p_0)+\varepsilon l_i\frac{\partial x(\omega,p_0,0)}{\partial\varepsilon}+o(|\varepsilon|+|p-p_0|)=0,$$

$$(i=1,\ldots,n-k)$$

$$l_j[U(\omega)-E](p-p_0)+\varepsilon l_j\frac{\partial x(\omega,p_0,0)}{\partial\varepsilon}+o(|\varepsilon|+|p-p_0|)=0,$$

$$(j=n-k+1,\ldots,n).$$

Dar

$$l_j[U(\omega)-E]=0,$$

deci al doilea grup de ecuaţii se scrie

$$\varepsilon l_j\frac{\partial x(\omega,p_0,0)}{\partial\varepsilon}+o(|\varepsilon|+|p-p_0|)=0.$$

Căutăm soluţia $p(\varepsilon)$ sub forma

$$p(\varepsilon)=p_0+\varepsilon\sum_{i=1}^{n-k}\beta_i(\varepsilon)\rho_i$$

Sistemul de ecuaţii devine

$$\varepsilon\sum_j l_i[U(\omega)-E]\rho_j\beta_j(\varepsilon)+\varepsilon l_i\frac{\partial x(\omega,p_0,0)}{\partial\varepsilon}+o(|\varepsilon|+|p-p_0|)=0,$$

$$(i=1,\ldots n-k)$$

$$\varepsilon l_j\frac{\partial x(\omega,p_0,0)}{\partial\varepsilon}+o(|\varepsilon|+|p-p_0|)=0,(j=n-k+1,\ldots n).$$

Dar

$$|p - p_0| = O(\varepsilon) \text{ și ecuațiile se scriu}$$

$$\sum_j l_i [U(\omega) - E] \rho_j \beta_j + l_i \frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial \varepsilon} + O(|\varepsilon|) = 0, (i = 1, \ldots, n-k)$$

$$l_j \frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial \varepsilon} + O(|\varepsilon|) = 0, (j = n - k + 1, \ldots n). \tag{9}$$

Pentru ca acest sistem să admită soluții e necesar în primul rînd ca

$$l_j \frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial \varepsilon} = 0, \quad (j = n - k + 1, \ldots, n),$$

ceea ce conduce la

$$l_j U(\omega) \int_0^{\omega} U^{-1}(s) X_1 [x_0(s), s, 0] \, ds = 0$$

deci

$$\int_0^{\omega} l_j U^{-1}(s) X_1 [x_0(s), s, 0] \, ds = 0$$

sau

$$\int_0^{\omega} W(s) X_1 [x_0(s), s, 0] \, ds = 0.$$

În afară de aceasta este necesar ca sistemul

$$\sum_j l_i [U(\omega) - E] \rho_j \beta_j + l_i \frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial \varepsilon} = 0$$

să aibă soluții.

Matricea acestui sistem este însă chiar $\Delta$ și det $\Delta \neq 0$ deci sistemul are întotdeauna soluții.

Să presupunem acum că soluția $x_0(t)$ face parte dintr-o familie de soluții periodice, de perioadă $\omega$, depinzînd de $k$ parametri; notăm cu $x_0(t, \alpha)$ această familie. Atunci $\dfrac{\partial x_0(t, \alpha)}{\partial \alpha_i}$ vor fi soluții periodice ale sistemului (8), liniar independente, dacă $k$ parametri sînt independenți. Presupunem că sistemul (8) nu are alte soluții periodice independente, deci că are exact $k$ soluții periodice independente. Atunci putem repeta calculele de mai sus plecînd de la o soluție $x_0(t, \alpha)$ oarecare și obținem condiția necesară ca să existe o soluție periodică de perioadă $\omega$, $x(t, \varepsilon, \alpha)$, a sistemului (6) astfel ca

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x(t, \varepsilon, \alpha) = x_0(t, \alpha),$$

sub forma

$$P(\alpha) \equiv \int_0^{\omega} W_{\alpha}(s) X_1 [x_0(s, \alpha), s, 0] \, ds = 0.$$

Presupunem că ecuația $P(\alpha) = 0$ admite o soluție $\alpha = \alpha_0$ astfel încît $\frac{\partial P(\alpha)}{\partial \alpha}$ pentru $\alpha = \alpha_0$ să fie nesingulară.

Arătăm că în acest caz sistemul (6) admite o soluție periodică de perioadă $\omega$, $x(t, \varepsilon)$, astfel ca

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x(t, \varepsilon) = x_0(t, \alpha_0).$$

Sistemul de ecuații (9) este verificat pentru $\varepsilon = 0$, $\alpha = \alpha_0$ de valorile $\beta = \beta_0$ date de

$$\sum_j l_i [U_{\alpha_0}(\omega) - E] \rho_j \beta_j + l_i \frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial \varepsilon} = 0.$$

Jacobianul sistemului (9) în raport cu $\beta$ și $\alpha$ pentru $\varepsilon = 0$, $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ este egal cu

$$\det \begin{pmatrix} \Delta & \Delta_1 \\ 0 & \frac{\partial P(\alpha_0)}{\partial \alpha} \end{pmatrix} = \det \Delta \det \frac{\partial P(\alpha_0)}{\partial \alpha}$$

și în ipotezele noastre este diferit de zero. Pe baza teoremei funcțiilor implicite există $\varepsilon_0 > 0$ și funcțiile $\alpha(\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon)$ definite pentru $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, verificînd sitemul (9) și astfel ca $\alpha(0) = \alpha_0$, $\beta(0) = \beta_0$.

Punînd

$$p(\varepsilon) = p_0(\alpha(\varepsilon)) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n-k} \beta_i(\varepsilon) \rho_i [\alpha(\varepsilon)]$$

soluția $x(t, p(\varepsilon), \varepsilon)$ va fi periodică de perioadă $\omega$ și pentru $\varepsilon \to 0$ devine

$$x_0(t, p_0(\alpha_0)) = x_0(t, \alpha_0).$$

Am demonstrat astfel următoarea teoremă :

TEOREMA 3.8. *Dacă sistemul (7) admite o familie de soluții $x_0(t, \alpha)$ periodice de perioadă $\omega$, astfel încît sistemul în variații corespunzător să admită pentru orice $\alpha$ exact $k$ soluții periodice independente de perioadă $\omega$, atunci pentru orice valoare $\alpha_0$ astfel ca*

$$P(\alpha_0) = 0, \quad \det \frac{\partial P(\alpha_0)}{\partial \alpha} \neq 0,$$

*unde*

$$P(\alpha) \equiv \int_0^\omega W_\alpha(s) X_1 [x_0(s, \alpha), s, 0] \, ds,$$

*există o soluție $x(t, \varepsilon)$ a sistemului (6), periodică de perioadă $\omega$ și astfel ca $\lim_{\varepsilon \to 0} x(t, \varepsilon) = x_0(t, \alpha_0)$.*

*Aplicaţii.* 1° Un caz particular important este cel al ecuaţiei

$$\ddot{x} + n^2 x + f(t) = \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \varepsilon).$$

unde $f$ şi $F$ sînt periodice în raport cu $t$ cu perioadă $2\pi$. Sistemul în variaţii este aici

$$\ddot{x} + n^2 x = 0$$

şi are soluţiile periodice cu perioadă $\frac{2\pi}{n}$ deci şi de perioadă $2\pi$. Funcţia $f(t)$ este presupusă astfel încît ecuaţia generatoare

$$\ddot{x} + n^2 x + f(t) = 0$$

să aibă soluţie periodică de perioadă $2\pi$. Atunci toate soluţiile sistemului generator sînt periodice cu perioadă $2\pi$ şi formează o familie cu doi parametri,

$$x_0 = \varphi(t) + M_0 \cos nt + N_0 \sin nt.$$

Avem

$$U(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos nt & \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nt \\ -\sqrt{n} \sin nt & \sqrt{n} \cos nt \end{pmatrix}, \quad U^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{n} \cos nt & -\frac{1}{\sqrt{n}} \sin nt \\ \sqrt{n} \sin nt & \frac{1}{\sqrt{n}} \cos nt \end{pmatrix}$$

$$X_1[x_0(s, \alpha), s, 0] = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}$$

$$F = F[s, \varphi(s) + M_0 \cos ns + N_0 \sin ns, \dot{\varphi}(s) - M_0 n \sin ns + N_0 n \cos ns, 0].$$

Ecuaţiile care determină pe $M_0$ şi $N_0$ se scriu

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin ns F[s, x_0(s), \dot{x}_0(s), 0] \, ds = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos ns F[s, x_0(s), \dot{x}_0(s), 0] \, ds = 0$$

deci

$$P(M_0, N_0) \equiv \int_0^{2\pi} F[s, \varphi(s) + M_0 \cos ns + N_0 \sin ns, \dot{\varphi}(s) - M_0 n \sin ns + \\ + N_0 n \cos ns, 0] \sin ns \, ds = 0,$$

$$Q(M_0, N_0) \equiv \int_0^{2\pi} F[s, \varphi(s) + M_0 \cos ns + N_0 \sin ns, \dot{\varphi}(s) - M_0 n \sin ns + \\ + N_0 n \cos ns, 0] \cos ns \, ds = 0,$$

$$\frac{\partial(P, Q)}{\partial(M_0, N_0)} \neq 0.$$

2° Să considerăm ecuația

$$\ddot{x} + \frac{1}{n^2} x + f(t) = \varepsilon F[t, x, \dot{x}, \varepsilon].$$

Sistemul în variații nu are alte soluții de perioadă $2\pi$ decît soluția banală, deci pentru $|\varepsilon|$ suficient de mic există o soluție periodică de perioadă $2\pi$ unică. În același timp, toate soluțiile sistemului generator sînt periodice cu perioadă $2n\pi$, funcțiile $f$ și $F$ avînd perioadă $2\pi$ au și perioadă $2n\pi$, deci în vecinătatea soluțiilor sistemului generator care verifică relațiile din teorema 3.8 pot apărea pentru $|\varepsilon|$ suficient de mic soluții periodice de perioadă $2n\pi$ care nu mai au perioadă $2\pi$. Oscilațiile de acest tip se numesc subarmonice iar fenomenul descris mai sus a fost numit de Mandelstamm și Papalexi care l-au descoperit în 1932, rezonanță de genul $n$.

În încheierea acestui punct să facem cîteva observații asupra stabilității soluției periodice a sistemului (6) în cazul cel mai simplu. Să presupunem că soluția banală a sistemului (8) este asimptotic stabilă; atunci, evident, sistemul (8) nu are alte soluții periodice decît cea banală și pe baza teoremei 3.7 sistemul (6) admite o soluție periodică unică $x(t,\varepsilon)$ cu

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x(t, \varepsilon) = x_0(t).$$

Să facem în sistemul (6) schimbarea de variabile $y = x - x(t, \varepsilon)$. Obținem

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx(t, \varepsilon)}{dt} = X_0[y + x(t, \varepsilon), t] + \varepsilon X_1[y + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon] -$$

$$- X_0[x(t, \varepsilon), t] - \varepsilon X_1[x(t, \varepsilon), t, \varepsilon] = \frac{\partial X_0[x(t, \varepsilon), t]}{\partial x} y + o(|y|) +$$

$$+ \varepsilon \frac{\partial X_1[x(t, \varepsilon), t, \varepsilon]}{\partial x} y + o(|y|) = \frac{\partial X_0[x_0(t), t]}{\partial x} y + \left[\frac{\partial X_0[x(t, \varepsilon), t]}{\partial x} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial X_0[x_0(t), t]}{\partial x}\right] y + \varepsilon \frac{\partial X_1[x(t, \varepsilon), t, \varepsilon]}{\partial x} y + o(|y|).$$

Pentru $|\varepsilon|$ și $|y|$ suficient de mici avem

$$\left| \left[\frac{\partial X_0[x(t, \varepsilon), t]}{\partial x} - \frac{\partial X_0[x_0(t), t]}{\partial x}\right] y + \varepsilon \frac{\partial X_1[x(t, \varepsilon), t, \varepsilon]}{\partial x} y + \right.$$

$$\left. + o(|y|) \right| < \beta |y|$$

cu $\beta$ oricît de mic; cum prin ipoteză soluția banală a sistemului (8) este asimptotic stabilă (sistemul (8) fiind un sistem liniar cu coeficienți perio-

dici, soluţia este uniform asimptotic stabilă, deci exponenţial stabilă), rezultă că putem aplica teorema fundamentală de stabilitate după prima aproximaţie şi deducem că soluţia banală a sistemului în $y$ este asimptotic stabilă. Am stabilit astfel următoarea :

PROPOZIŢIE. *Dacă soluţia banală a sistemului în variaţii (8) este asimptotic stabilă, atunci pentru* $|\varepsilon|$ *suficient de mic sistemul (6) admite o soluţie periodică unică* $x(t, \varepsilon)$ *cu proprietatea*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x(t, \varepsilon) = x_0(t)$$

*şi această soluţie este asimptotic stabilă.*

## § 5. METODA LUĂRII MEDIEI

În cele ce urmează vom prezenta unele cazuri particulare ale metodei generale elaborate de N. M. Krîlov şi N. N. Bogoliubov, cunoscută sub numele de „metoda luării mediei”. Această metodă se aplică şi în problema soluţiilor aproape-periodice.

Să presupunem că sitemul generator (7) admite toate soluţiile periodice de perioadă $\omega$. Fie $x_0(t, h)$ soluţia generală a sistemului generator. Facem schimbarea de variabile $x = x_0(t, z)$. Obţinem

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x_0(t, z)}{\partial t} + \frac{\partial x_0(t, z)}{\partial z}\frac{dz}{dt} = X_0[x_0(t, z), t] + \varepsilon X_1[x_0(t, z), t, \varepsilon].$$

Dar

$$\frac{\partial x_0(t, z)}{\partial t} = X_0[x_0(t, z), t],$$

iar faptul că $x_0(t, h)$ este soluţia generală a sistemului (7) arată că matricea $\frac{\partial x_0(t, z)}{\partial z}$ este inversabilă, deci,

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon Z(t, z, \varepsilon), \tag{10}$$

unde

$$Z(t, z, \varepsilon) = \left[\frac{\partial x_0(t, z)}{\partial z}\right]^{-1} X_1[x_0(t, z), t, \varepsilon].$$

Fie

$$Z_0(z, \varepsilon) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} Z(t, z, \varepsilon)\, dt$$

şi fie $\zeta^0$ o soluţie a ecuaţiei $Z_0(z, 0) = 0$. Facem schimbarea de variabile $z = \zeta^0 + b$.

Obținem sistemul

$$\frac{db}{dt} = \varepsilon B(t, b, \varepsilon),$$

unde $B(t, b, \varepsilon) = Z(t, \zeta^\circ + b, \varepsilon)$, deci $B(t, b, \varepsilon)$ are aceleași proprietăți de regularitate ca și $Z$ și e periodică în $t$ cu perioadă $\omega$. Fie

$$B_0(b, \varepsilon) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega B(t, b, \varepsilon)\, dt.$$

Avem evident $B_0(0,0) = 0$.

Notăm

$$B^*(t, b, \varepsilon) = B(t, b, \varepsilon) - B_0(b, \varepsilon);$$

rezultă

$$\frac{1}{\omega}\int_0^\omega B^*(t, b, \varepsilon)\, dt = 0.$$

Fie

$$B^*_\eta(t, b, \varepsilon) = \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-s)} B^*(s, b, \varepsilon)\, ds = \int_0^\infty e^{-\eta\sigma} B^*(t-\sigma, b, \varepsilon)\, d\sigma =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty e^{-n\eta\omega}\int_{n\omega}^{(n+1)\omega} B^*(t-\sigma, b, \varepsilon)\, e^{-\eta(\sigma-n\omega)}\, d\sigma =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty e^{-n\eta\omega}\int_0^\omega e^{-\eta s} B^*(t-s, b, \varepsilon)\, ds = \frac{1}{1-e^{-\eta\omega}}\int_0^\omega e^{-\eta s} B^*(t-s, b, \varepsilon)\, ds.$$

Fie

$$B^{**}(\sigma, b, \varepsilon) = \int_0^\sigma B^*(\xi, b, \varepsilon)\, d\xi.$$

Avem

$$B^*_\eta(t, b, \varepsilon) = \frac{1}{1-e^{-\eta\omega}}\int_0^\omega e^{-\eta s} B^*(t-s, b, \varepsilon)\, ds =$$

$$= \frac{-1}{1-e^{-\eta\omega}}\int_t^{t-\omega} e^{-\eta t} e^{\eta\sigma} B^*(\sigma, b, \varepsilon)\, d\sigma = \frac{e^{-\eta t}}{1-e^{-\eta\omega}}\int_{t-\omega}^t e^{\eta\sigma} B^*(\sigma, b, \varepsilon)\, d\sigma =$$

$$= \frac{e^{-\eta t}}{1-e^{-\eta\omega}}\int_{t-\omega}^t e^{\eta\sigma}\, dB^{**} =$$

$$= \frac{e^{-\eta t}}{1-e^{-\eta\omega}}\left\{e^{\eta t} B^{**}(t, b, \varepsilon) - e^{\eta(t-\omega)} B^{**}(t-\omega, b, \varepsilon)\right\} -$$

$$-\frac{\eta e^{-\eta t}}{1-e^{-\eta\omega}}\int_{t-\omega}^{t} e^{\eta\sigma} B^{**}(\sigma, b, \varepsilon)\,d\sigma = B^{**}(t, b, \varepsilon)-$$

$$-\frac{\eta e^{-\eta t}}{1-e^{-\eta\omega}}\int_{t-\omega}^{t} e^{\eta\sigma} B^{**}(\sigma, b, \varepsilon)\,d\sigma =$$

$$= B^{**}(t, b, \varepsilon) - \frac{\eta}{1-e^{-\eta\omega}}\int_{0}^{\omega} e^{-\eta s} B^{**}(t-s, b, \varepsilon)\,ds.$$

Deoarece $B^*(t, b, \varepsilon)$ are valoare medie nulă, rezultă că $B^{**}(t,b,\varepsilon)$ este periodică deci mărginită. Obţinem astfel evaluarea

$$|B_\eta^*(t, b, \varepsilon)| \leqslant M + M\frac{\eta}{1-e^{-\eta\omega}}\int_0^{\omega} e^{-\eta s}\,ds = 2M.$$

Facem schimbarea de variabile $b = h + \varepsilon B_\eta^*(t, h, \varepsilon)$.
Obţinem

$$\frac{dh}{dt} + \varepsilon\frac{\partial B_\eta^*}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial B_\eta^*}{\partial b}\frac{dh}{dt} = \varepsilon B = \varepsilon B_0 + \varepsilon B^*,$$

$$B_0(h + \varepsilon B_\eta^*, \varepsilon) = B_0(h, \varepsilon) + O(\varepsilon) = B_0(h, 0) + O(\varepsilon) = Hh + B_1(h) + O(\varepsilon),$$

unde

$$H = \frac{\partial}{\partial b}B_0(0,0),\quad |B_1(h)| \leqslant \mu|h|^2.$$

Din

$$B_0(b, \varepsilon) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} B(t, b, \varepsilon)\,dt = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} Z(t, \zeta^\circ + b, \varepsilon)\,dt = Z_0(\zeta^\circ + b, \varepsilon)$$

rezultă că

$$H = \frac{\partial Z_0(\zeta^\circ, 0)}{\partial z}.$$

Mai departe, avem

$$B^*(t, h + \varepsilon B_\eta^*, \varepsilon) = B^*(t, h, \varepsilon) + O(\varepsilon)$$

şi

$$\frac{\partial B_\eta^*}{\partial t} = B^* - \eta B_\eta^*.$$

Rezultă

$$\left(E + \varepsilon\frac{\partial B_\eta^*}{\partial b}\right)\frac{dh}{dt} = \varepsilon Hh + \varepsilon B_1(h) + \varepsilon B^*(t, h, \varepsilon) - \varepsilon B^*(t, h, \varepsilon) +$$

$$+ \varepsilon\eta B_\eta^*(t, h, \varepsilon) + \varepsilon O(\varepsilon).$$

Luăm $\eta = \varepsilon$; din $|B_\eta^*| < 2M$ rezultă

$$\eta B_\eta^*(t, h, \varepsilon) = O(\varepsilon),$$

deci sistemul devine

$$\left(E+\varepsilon\frac{\partial B_\eta^*}{\partial b}\right)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\varepsilon Hh+\varepsilon B_1(h)+\varepsilon O(\varepsilon)\cdot$$

Dar

$$\frac{\partial B_\eta^*}{\partial b}=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\eta(t-s)}\frac{\partial B^*}{\partial b}\,\mathrm{d}s;$$

$\frac{\partial B^*}{\partial b}$ este ca şi $B^*$ periodică de perioadă $\omega$ şi cu valoare medie nulă, deci $\frac{\partial B_\eta^*}{\partial b}$ este ca şi $B_\eta^*$ mărginită. Rezultă $\varepsilon\frac{\partial B_\eta^*}{\partial b}=O(\varepsilon)$ deci

$$\left(E+\varepsilon\frac{\partial B_\eta^*}{\partial b}\right)^{-1}=E+O(\varepsilon).$$

Obţinem în definitiv

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\varepsilon Hh+\varepsilon B_1(h)+\varepsilon O(\varepsilon).$$

Facem schimbarea de variabilă independentă $\tau=\varepsilon t$.

Sistemul devine

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\tau}=Hh+B_1(h)+O(\varepsilon), \tag{11}$$

unde termenii $O(\varepsilon)$ sînt periodici în $\tau$ cu perioadă $\varepsilon\,\omega$. Presupunem că valorile proprii ale matricii $H$ au părţi reale diferite de zero. În acest caz sistemul $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\tau}=Hh$ nu poate avea nici un fel de soluţii periodice diferite de cea banală. Matricea Green corespunzătoare condiţiilor de periodicitate $h(0)=h(\varepsilon\omega)$ este

$$G(t,s)=\mathrm{e}^{Ht}[E-\mathrm{e}^{\varepsilon H\omega}]^{-1}\mathrm{e}^{-Hs}=\mathrm{e}^{H(t-s)}[E-\mathrm{e}^{\varepsilon\omega H}]^{-1},\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant\varepsilon\,\omega,$$

$$G(t,s)=\mathrm{e}^{H(t+\varepsilon\omega-s)}[E-\mathrm{e}^{\varepsilon\omega H}]^{-1},\ \ 0\leqslant t\leqslant s\leqslant\varepsilon\,\omega.$$

Rezultă că avem $|G(t,s)|\leqslant\frac{M}{\varepsilon}$ căci $[E-e^{\varepsilon\omega H}]^{-1}$ admite o astfel de evaluare. Sistemul (11) va avea soluţie periodică de perioadă $\varepsilon\,\omega$ dacă ecuaţia integrală

$$h(\tau)=\int_0^{\varepsilon\omega}G(\tau,s)\,[B_1(h(s))+O(\varepsilon)]\,\mathrm{d}s$$

are soluţie. Fie $\Omega(h)$ operatorul definit de

$$\Omega(h)=\int_0^{\varepsilon\omega}G(\tau,s)\,[B_1(h(s))+O(\varepsilon)]\,\mathrm{d}s;$$

pentru $\|h\| < l$ avem

$$|\,\Omega(h(t))\,| \leqslant \varepsilon\,\omega\,\frac{M}{\varepsilon}\,(\beta\,\|h\| + N\varepsilon);$$

dacă $\beta < \dfrac{1}{2\omega M}$ şi $\varepsilon < \dfrac{l}{2\,\omega M N}$ rezultă $\|\Omega(h)\| < l$, deci $\Omega$ aplică sfera $\|h\| < l$ în ea însăşi.

La fel se vede că

$$|\,\Omega(h_1) - \Omega(h_2)\,| \leqslant \varepsilon\,\omega\,\frac{M}{\varepsilon}\,(\beta\,\|h_1 - h_2\| + N_1\varepsilon\|h_1 - h_2\|)$$

şi dacă $\varepsilon$ e suficient de mic, $\Omega$ este contracţie.

Deducem că pentru $|\varepsilon|$ suficient de mic $\Omega$ admite un punct fix unic, căruia îi corespunde o soluţie periodică de perioadă $\varepsilon\,\omega$, unică, a sistemului (11); această soluţie pentru $\varepsilon \to 0$ tinde către soluţia banală $h = 0$.

Revenind la variabila independentă $t$ deducem existenţa unei soluţii $h(t, \varepsilon)$, periodică de perioadă $\omega$, unică, care pentru $\varepsilon \to 0$ tinde către soluţia banală $h = 0$.

Ţinînd seama de schimbările de variabile făcute deducem existenţa unei soluţii periodice de perioadă $\omega$, $b(t, \varepsilon)$, care pentru $\varepsilon \to 0$ tinde către zero şi deci existenţa unei soluţii periodice $z(t, \varepsilon)$ a sistemului (10) care pentru $\varepsilon \to 0$ tinde către $\zeta^\circ$. În sfîrşit, va rezulta existenţa unei soluţii periodice $x(t, \varepsilon) = x_0(t, z(t, \varepsilon))$, de perioadă $\omega$, a sistemului (6), care pentru $\varepsilon \to 0$ tinde către $x_0(t, \zeta^\circ)$.

În plus, dacă valorile proprii ale matricii $H$ au părţi reale negative se vede ca mai înainte că soluţia $h(\tau, \varepsilon)$ este asimptotic stabilă, deci soluţia $x(t, \varepsilon)$ rezultă asimptotic stabilă. Să observăm în încheiere că cererea ca $H$ să nu aibă valori proprii pur imaginare poate fi înlocuită cu aceea mai slabă ca $\det H \neq 0$, căci dacă $H$ nu are valori proprii nule, pentru $\varepsilon$ suficient de mic, sistemul $\dfrac{dx}{dt} = Hx$ nu poate avea soluţii periodice de perioadă $\varepsilon\,\omega$. Am demonstrat astfel următoarea teoremă.

TEOREMA 3.9. *Dacă soluţia generală $x_0(t,h)$ a sistemului generator* (7) *este periodică de perioadă $\omega$, iar $\zeta^\circ$ este o soluţie a ecuaţiei*

$$Z_0(z, 0) = 0$$

*astfel ca*

$$\det \frac{\partial Z(\zeta^0, 0)}{\partial z} \neq 0,$$

*unde*

$$Z_0(z, 0) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \left(\frac{\partial x_0(t, z)}{\partial z}\right)^{-1} X_1[x_0(t, z), t, 0]\,dt,$$

*atunci pentru $\varepsilon$ suficient de mic există o soluţie periodică unică de perioadă $\omega$ a sistemului* (6) *cu proprietatea* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} x(t, \varepsilon) = x_0(t, \zeta^\circ)$.

*Dacă valorile proprii ale matricii* $\dfrac{\partial Z(\zeta^0, 0)}{\partial z}$ *au părți reale negative, această soluție este asimptotic stabilă.*

*Observație.* Afirmația teoremei, în afară de concluzia asupra stabilității decurge și din teorema 3.8 căci dacă soluția generală a sistemului (7) e periodică, de perioadă $\omega$, atunci sistemul (8) are $n$ soluții periodice de perioadă $\omega$ liniar independente și matricea $W$ coincide cu $\left[\dfrac{\partial x_0}{\partial z}\right]^{-1}$. Interesul metodei luării mediei constă în faptul că ea se poate aplica și la cazuri mult mai generale, în particular la problema soluțiilor aproape-periodice.

Pentru a formula un rezultat relativ la soluțiile aproape-periodice avem nevoie de o lemă datorată lui N. N. Bogoliubov.

LEMĂ. *Fie $f(t, x)$ o funcție definită pentru $t$ real și $x \in E$, unde $E$ este o mulțime compactă dintr-un spațiu metric. Presupunem că în orice punct din $E$ avem*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(t, x)\,\mathrm{d}t = 0$$

*uniform în raport cu $t$, și în plus că există $M$ și $\lambda$ astfel ca*

$$|f(t, x)| < M, \quad |f(t, x') - f(t, x'')| \leqslant \lambda \rho(x', x'');$$

*de aici rezultă că limita e uniformă nu numai în raport cu $t$ ci și cu $(t,x)$. Fie*

$$f_\eta(t, x) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\eta(t-\tau)} f(\tau, x)\,\mathrm{d}\tau.$$

*Atunci*

$$|f_\eta(t, x)| \leqslant \frac{\zeta(\eta)}{\eta} \textit{ pentru } -\infty < t < \infty, \quad x \in E,$$

*unde* $\lim\limits_{\eta \to 0} \zeta(\eta) = 0.$

Condițiile lemei sînt verificate în particular dacă $f(t,x)$ este aproape-periodică în raport cu $t$, uniform în raport cu $x$, și are valoare medie nulă.

*Demonstrație.* Avem

$$f_\eta(t, x) = \int_0^{\infty} e^{-\eta\tau} f(t-\sigma, x)\,\mathrm{d}\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\eta T}\int_{nT}^{(n+1)T} f(t-\sigma, x)\, e^{-\eta(\sigma - nT)}\,\mathrm{d}\sigma.$$

Mai departe

$$|f_\eta(t, x)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\eta T}\int_{nT}^{(n+1)T} \{f(t-\sigma, x)\, e^{-\eta(\sigma-nT)} + \right.$$

$$\left. + f(t-\sigma, x) - f(t-\sigma, x)\}\,\mathrm{d}\sigma\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\eta T}\int_{nT}^{(n+1)T} f(t-\sigma, x)\,\mathrm{d}\sigma - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\eta T}\int_{nT}^{(n+1)T} f(t-\sigma, x)\,(1 - e^{-\eta(\sigma-nT)})\,\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\eta T}\left|\int_{nT}^{(n+1)T} f(t-\sigma, x)\,\mathrm{d}\sigma\right| +$$

$$+ M \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\eta T} \int_{nT}^{(n+1)T} (1 - e^{-\eta(\sigma - nT)})\, d\sigma =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\eta T} \left| \int_{nT}^{(n+1)T} f(t-\sigma, x)\, d\sigma \right| + M \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\eta T} \int_{0}^{T} (1 - e^{-\eta s})\, ds =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\eta T} \left| \int_{nT}^{(n+1)T} f(t-\sigma, x)\, d\sigma \right| + M \frac{1}{1-e^{-\eta T}} \left( T + \frac{1}{\eta} (e^{-\eta T} - 1) \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\eta T} \left| \int_{nT}^{(n+1)T} f(t-\sigma, x)\, d\sigma \right| + \frac{M T}{1 - e^{-\eta T}} - \frac{M}{\eta} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\eta T} \left| \int_{nT}^{(n+1)T} f(t-\sigma, x)\, d\sigma \right| + \frac{\zeta_1(\eta)}{\eta}$$

unde am notat

$$\frac{\zeta_1(\eta)}{\eta} = M \left( \frac{T}{1 - e^{-\eta T}} - \frac{1}{\eta} \right).$$

Avem

$$e^{-\eta T} = 1 - \eta T + o(\eta),$$

deci

$$1 - e^{-\eta T} = \eta T + o(\eta),$$

deci

$$\frac{\zeta_1(\eta)}{\eta} = M \left( \frac{T}{\eta T + o(\eta)} - \frac{1}{\eta} \right) = M \frac{T\eta - \eta T + o(\eta)}{\eta (T\eta - o(\eta))}.$$

Rezultă

$$\zeta_1(\eta) = M \frac{o(\eta)}{\eta T + o(\eta)},$$

deci

$$\lim_{\eta \to 0} \zeta_1(\eta) = 0.$$

Conform ipotezelor,

$$\left| \frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} f(s, x)\, ds \right| \leqslant \varepsilon(T), \quad \lim_{T \to \infty} \varepsilon(T) = 0.$$

Rezultă

$$|f_\eta(t, x)| \leqslant T \varepsilon(T) \frac{1}{1 - e^{-\eta T}} + \frac{\zeta_1(\eta)}{\eta}.$$

Alegem pe $T$ ca funcție de $\eta$ definit de ecuația $1\text{-}e^{-\eta T} = \varepsilon(T)$.

Cînd $\eta \to 0$, se capătă $\eta T(\eta) \to 0$; într-adevăr, dacă $T$ este mărginit, relația e evidentă, iar dacă $T \to \infty$ rezultă $\varepsilon(T) \to 0$, deci $\eta T \to 0$. Notăm $\eta T(\eta) = \zeta_2(\eta)$ și deducem

$$|f_\eta(t, x)| \leqslant \frac{\zeta_2(\eta)}{\eta} + \frac{\zeta_1(\eta)}{\eta},$$

unde $\zeta_2(\eta) \to 0$ și $\zeta_1(\eta) \to 0$.

Lema e demonstrată.

Să considerăm acum sistemul (6) presupunînd că $X_0$ şi $X_1$ sînt aproape-periodice în $t$, uniform în raport cu celelalte argumente. Presupunem de asemenea că soluţia generală $x_0(t,h)$ a sistemului (7) este aproape-periodică în $t$, uniform în raport cu $h$.

Facem din nou schimbarea de variabile $x = x_0(t, z)$ şi obţinem sistemul (10) unde de data aceasta $Z(t,z,\varepsilon)$ este aproape-periodică în $t$, uniform în raport cu celelalte argumente.

Fie

$$Z_0(z, \varepsilon) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T Z(t, z, \varepsilon)\, dt$$

şi $\zeta^\circ$ o soluţie a ecuaţiei $Z_0(z, 0) = 0$. Facem schimbarea de variabile $z = \zeta^\circ + b$. Obţinem sistemul

$$\frac{db}{dt} = \varepsilon B(t, b, \varepsilon),$$

unde $B(t,b,\varepsilon)$ are aceleaşi proprietăţi de regularitate ca şi $Z$ şi e aproape-periodică în $t$, uniform în raport cu celelalte argumente. Fie

$$B_0(b, \varepsilon) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T B(t, b, \varepsilon)\, dt;$$

avem $B_0(0, 0) = 0$. Notînd

$$B^*(t, b, \varepsilon) = B(t, b, \varepsilon) - B_0(b, \varepsilon),$$

rezultă

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T B^*(t, b, \varepsilon)\, dt = 0.$$

Pe baza lemei deducem $| B_\eta^* | \leqslant \frac{\zeta(\eta)}{\eta}$.

Facem schimbarea de variabile $b = h + \varepsilon B_\eta^*$ şi obţinem, alegînd $\eta = \varepsilon$, sistemul

$$\frac{dh}{dt} = \varepsilon Hh + \varepsilon B_1(h) + \varepsilon \Gamma(t, h, \varepsilon), \tag{12}$$

unde $\Gamma$ e aproape-periodică în $t$, uniform în raport cu celelalte argumente şi $|\Gamma| < \gamma(\varepsilon)$, $\left|\frac{\partial \Gamma}{\partial h}\right| < \gamma(\varepsilon)$ cu $\lim_{\varepsilon\to 0} \gamma(\varepsilon) = 0$.

Vom presupune că valorile proprii ale matricii $H$ sînt cu părţi reale negative şi vom demonstra că pentru $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ sistemul (12) are o soluţie aproape-periodică unică, care pentru $\varepsilon \to 0$ tinde către zero. Considerăm sistemul

$$\frac{dy}{dt} = Hy$$

şi formăm funcţia

$$V(y) = \int_0^\infty |y(t, y)|^2 \,\mathrm{d}t + \frac{1}{\varepsilon} \sup_{\sigma \geqslant 0} |y(\sigma, y)|^2$$

Avem

$$\frac{1}{\varepsilon} |y|^2 \leqslant V(y) \leqslant \frac{K_1}{\varepsilon} |y|^2,$$

căci

$$|y(t, y| \leqslant K \mathrm{e}^{-\varepsilon\alpha t},$$

$$|V(y_1) - V(y_2)| \leqslant \frac{L_0}{\varepsilon} ( |y_1| + |y_2| ) |y_1 - y_2|$$

$$\lim_{h \to 0+} \sup \frac{V[y(t+h, y_0)] - V[y(t, y_0)]}{h} \leqslant -|y(t, y_0)|^2.$$

Folosind această funcţie, deducem ca în demonstraţia teoremei 3.4 că sistemul

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \varepsilon Hh + f(t)$$

admite pentru orice $f$ aproape-periodică o soluţie aproape-periodică unică, $h_0(t)$, pentru care are loc evaluarea

$$|h_0(t)| \leqslant \frac{L}{\varepsilon} \sup |f|.$$

Fie $h_0(t)$ soluţia aproape-periodică a sistemului

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \varepsilon Hh + \varepsilon \Gamma(t, 0, \varepsilon).$$

Avem

$$|h_0(t)| \leqslant \frac{L}{\varepsilon} \varepsilon \gamma(\varepsilon) = L \gamma(\varepsilon).$$

Fie $h_k(t)$ soluţia aproape-periodică a sistemului

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \varepsilon Hh + \varepsilon B_1(h_{k-1}(t)) + \varepsilon \Gamma(t, h_{k-1}(t), \varepsilon).$$

Presupunem prin inducţie $|h_{k-1}(t)| < 2 L \gamma(\varepsilon)$. Atunci

$$|B_1(h_{k-1}(t))| < 4 \mu L^2 \gamma^2(\varepsilon),$$

deci

$$|h_k(t)| < \frac{L}{\varepsilon} \varepsilon \{4 \mu L^2 \gamma^2(\varepsilon) + \gamma(\varepsilon)\} = L \gamma(\varepsilon) [4 \mu L^2 \gamma(\varepsilon) + 1].$$

Pentru $\varepsilon$ suficient de mic rezultă $\gamma(\varepsilon) < \frac{1}{4\mu L^2}$ şi deci

$$|h_k(t)| < 2L\gamma(\varepsilon);$$

pe baza raţionamentului prin inducţie rezultă că pentru toţi $k$ avem evaluarea scrisă. Fie acum

$$l_k(t) = h_k(t) - h_{k-1}(t).$$

Avem

$$\frac{dl_{k+1}(t)}{dt} = \frac{dh_{k+1}}{dt} - \frac{dh_k}{dt} = \varepsilon H h_{k+1}(t) + \varepsilon B_1(h_k(t)) +$$

$$+ \varepsilon \Gamma(t, h_k(t), \varepsilon) - \varepsilon H h_k(t) - \varepsilon B_1(h_{k-1}(t)) - \varepsilon \Gamma(t, h_{k-1}(t), \varepsilon) =$$

$$= \varepsilon H l_{k+1}(t) + \varepsilon [B_1(h_k(t)) - B_1(h_{k-1}(t))] + \varepsilon [\Gamma(t, h_k(t), \varepsilon) - \Gamma(t, h_{k-1}(t), \varepsilon)].$$

Avem

$$|B_1(u) - B_1(v)| \leqslant \mu(|u| + |v|)|u - v|,$$

deci

$$|B_1(h_k(t)) - B_1(h_{k-1}(t))| \leqslant 4\mu L\gamma(\varepsilon) \sup |l_k|.$$

Rezultă

$$|l_{k+1}(t)| \leqslant \frac{L}{\varepsilon} \varepsilon \{4\mu L\gamma(\varepsilon) \sup |l_k| + \gamma(\varepsilon) \sup |l_k|\} \leqslant L_1 \gamma(\varepsilon) \sup |l_k|$$

de unde pentru $\gamma(\varepsilon) < \frac{1}{L_1}$ rezultă convergenţa uniformă a şirului de aproximaţii succesive către o soluţie aproape-periodică a sistemului (12). Ţinînd seama de evaluările aproximaţiilor succesive se deduce că această soluţie tinde către zero cînd $\varepsilon \to 0$. Dar atunci, ţinînd seama de schimbările de variabile efectuate, rezultă existenţa unei soluţii aproape-periodice unice asimptotic stabile, $x(t, \varepsilon)$, cu proprietatea $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} x(t, \varepsilon) = x_0(t, \zeta^\circ)$. Am obţinut următoarea teoremă:

TEOREMA 3.10. *Dacă în sistemul* (6) *funcţiile* $X_0$ *şi* $X_1$ *sînt aproape-periodice în t, uniform în raport cu celelalte argumente, iar soluţia generală* $x_0(t,h)$ *a sistemului* (7) *este aproape periodică în t, uniform în raport cu h, şi* $\zeta^\circ$ *este o soluţie a ecuaţiei* $Z_0(z,0) = 0$ *astfel ca valorile proprii ale matricii* $\frac{\partial Z_0(\zeta^\circ,0)}{\partial z}$ *să aibă părţi reale negative, atunci pentru* $\varepsilon$ *suficient de mic există o soluţie aproape-periodică unică a sistemului* (6) *cu proprietatea*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x(t, \varepsilon) = x_0(t, \zeta^\circ).$$

Aici

$$Z_0(z, 0) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{\partial x_0(t, z)}{\partial z} \right)^{-1} X_1[x_0(t, z)t, 0]\, dt.$$

## § 6. METODE TOPOLOGICE

Folosind unele metode topologice se pot obţine în teoria sistemelor cu parametru mic rezultate puternice, în care condiţiile impuse sistemului generator sînt foarte generale şi au un caracter intrinsec.

TEOREMA 3.11. *Dacă sistemul generator* (7) *admite o soluţie periodică* $x_0(t)$ *asimptotic stabilă, atunci pentru* $|\varepsilon|$ *suficient de mic sistemul* (6) *admite o soluţie periodică* $x(t, \varepsilon)$ *cu proprietatea că*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x(t, \varepsilon) = x_0(t).$$

*Demonstraţie.* Ne sprijinim pe următoarea teoremă a lui F. Browder. Fie $X$ un spaţiu Banach, $S$ şi $S_1$ mulţimi deschise şi convexe din $X$, $S_0$ închisă şi convexă, $S_0 \subset S_1 \subset S$, $f$ o aplicaţie compactă a lui $S$ în $X$; presupunem că există $m$ natural astfel încît $f^m$ este definită pe $S_1$, $f^j(S_0) \subset S_1$ pentru $0 \leqslant j \leqslant m$, $f^m(S_1) \subset S_0$; atunci $f$ are un punct fix în $S_0$. Vom aplica această teoremă în cazul particular cînd $X$ este spaţiul euclidian $n$-dimensional; în acest caz va fi suficient ca $f$ să fie continuă.

Fie $x(t, p, \varepsilon)$ soluţia generală a sistemului (6) cu $x(0, p, \varepsilon) = p$. Considerăm transformarea $f(p,\varepsilon) = x(\omega,p,\varepsilon)$ şi demonstrăm că ea îndeplineşte toate condiţiile din teorema lui Browder, dacă $\varepsilon$ e suficient de mic; va rezulta că pentru $\varepsilon$ suficient de mic există un punct fix, şi din $x(\omega, p, \varepsilon) = p$ rezultă că soluţia corespunzătoare e periodică. Vom face demonstraţia luînd $x_0(t) \equiv 0$ deoarece ajungem la acest caz printr-o simplă schimbare de variabile. Sistemul (7) fiind periodic, stabilitatea asimptotică e uniformă, deci există $\delta_0 > 0$ şi două funcţii $\delta(\eta)$ şi $T(\eta)$ astfel încît $|p| < \delta(\eta)$ implică $|x_0(t,p)| < \eta$ pentru $t \geqslant 0$ şi $|p| < \delta_0$, $t > T(\eta)$ implică $|x_0(t,p)| < \eta$.

Fie $\delta_1 = \delta\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $0 < \eta < \min\left\{\delta_0, \delta\left(\frac{1}{2}\delta_1\right)\right\}$, $T = T\left[\frac{1}{2}\delta\left(\frac{1}{2}\eta\right)\right]$, $m$ cel mai mic număr natural astfel ca $m\omega > T$. Fie $S$ sfera $|p| < \delta_1$. Atunci $|x_0(t,p)| < \frac{\alpha}{2}$ pentru $p \in S$, $t \geqslant 0$. Dacă $|\varepsilon|$ e suficient de mic, rezultă $|x(t,p,\varepsilon)| < \alpha$ pentru $p \in S$, $0 \leqslant t \leqslant m$, pe baza teoremei de continuitate a soluţiei în raport cu parametrul. De aici rezultă că pentru $p \in S$ avem $|f(p,\varepsilon)| < \alpha$. Rezultă tot de aici că soluţiile $x(t, p, \varepsilon)$ sînt prelungibile dacă $p \in S$ deci operatorul $f$ şi iteratele sale $f^j$, $(j=1,\ldots,m)$, sînt definite pe $S$. Fie $S_1$ sfera $|p| < \eta$ şi $S_0$ sfera $|\varphi| < \frac{3}{4}\delta\left(\frac{1}{2}\eta\right)$. Pentru $|p| < \eta$, $t \geqslant 0$ avem $|x_0(t,p)| < \frac{1}{2}\delta_1$ căci $\eta < \delta\left(\frac{1}{2}\delta_1\right)$; pentru $|\varepsilon|$ suficient de mic rezultă $|x(t,p,\varepsilon)| < \delta_1$, pentru $0 \leqslant t \leqslant m\omega$, deci $f^j(S_1) \subset S$, $(j = 1, \ldots, m)$. Pentru $|p| \leqslant \frac{3}{4}\delta\left(\frac{1}{2}\eta\right)$, $t \geqslant 0$ avem $|x_0(t,p)| < \frac{1}{2}\eta$, deci pentru $|\varepsilon|$ suficient de mic $|x(t,p,\varepsilon)| < \eta$ dacă $|p| \leqslant \frac{3}{4}\delta\left(\frac{1}{2}\eta\right)$, $0 \leqslant t \leqslant m\omega$, ceea ce arată că $f^j(S_0) \subset S_1$ pentru $0 \leqslant j \leqslant m$.

Din $\eta < \delta_0$ rezultă că pentru $p \in S_1$, $t > T$, avem $|x_0(t,p)| < \frac{1}{2}\delta\left(\frac{1}{2}\eta\right)$, deci pentru $|\varepsilon|$ suficient de mic rezultă $|x(m\,\omega, p, \varepsilon)| \leqslant \frac{3}{4}\delta\left(\frac{1}{2}\eta\right)$ dacă $p \in S_1$, adică $f^m(S_1) \subset S_0$.

Toate condițiile din teorema lui Browder rezultă verificate, deci este demonstrată existența unui punct fix în $S_0$. Se vede că $S_0$ poate fi aleasă arbitrar de mică, dar atunci $\varepsilon$ trebuie luat mic. Aceasta înseamnă că soluția a cărei existență am demonstrat-o tinde către zero cînd $\varepsilon \to 0$. Teorema este complet demonstrată.

TEOREMA 3.12. *Fie $X_0$ analitică :*

$$X_0(x,t) = X_0^{(m)}(x,t) + X_0^{(m+1)}(x,t) + \ldots, \quad m \geqslant 2$$

*$X_0^{(k)}$ fiind forme de gradul $k$ în coordonatele lui $x$ ; presupunem că $\int_0^\omega X_0^{(m)}(x,t)\,\mathrm{d}t$ are punctul $x = 0$ ca punct singular izolat. Dacă indicele punctului $x = 0$ în cîmpul de vectori $\frac{1}{\omega}\int_0^\omega X_0^{(m)}(x,t)\,\mathrm{d}t$ este diferit de zero, atunci pentru $|\varepsilon|$ suficient de mic sistemul* (6) *admite o soluție periodică de perioadă $\omega$ care pentru $\varepsilon \to 0$ tinde la zero.*

*Demonstrație.* Considerăm sistemul

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X_0^{(m)}(x,t) + X_0^{(m+1)}(x,t) + \ldots$$

Soluția lui generală se scrie

$$x = A_1(t)\,x_0 + A_2(t, x_0) + \ldots + A_k(t, x_0) + \ldots,$$

unde $A_k(t,x_0)$ sînt vectori ale căror coordonate sînt forme de gradul $k$ în raport cu coordonatele lui $x_0$, cu coeficienți funcții de $t$. Înlocuind în sistem se capătă

$$\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t}x_0 + \frac{\partial A_2}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial A_k}{\partial t} + \ldots =$$

$$= X_0^{(m)}(A_1 x_0 + A_2 + \ldots + A_k + \ldots, t) + \ldots .$$

Se obțin relațiile

$$\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t} = 0, \frac{\partial A_2}{\partial t} = 0, \ldots, \frac{\partial A_m}{\partial t} = X_0^{(m)}(A_1 x_0, t), \ldots$$

$$A_1(0) = E, \ A_2(0, x_0) \equiv \ldots \equiv A_m(0, x_0) \equiv 0 .$$

Rezultă de aici

$$A_1 = E, \ A_2 \equiv \ldots A_{m-1} \equiv 0, \quad A_m(t, x_0) = \int_0^t X_0^{(m)}(x_0, t)\,\mathrm{d}t.$$

Deducem că soluția generală a sistemului (7) este de forma

$$x(t) = x_0 + \int_0^t X_0^{(m)}(x_0, t)\, dt + \ldots,$$

unde termenii nescriși sînt de grad superior în coordonatele lui $x_0$.

Considerăm acum cîmpul de vectori

$$u^{*}(x_0) \equiv x(\omega) - x_0 = \int_0^{\omega} X_0^{(m)}(x_0, t)\, dt + \ldots$$

Acest cîmp are punctul $x_0 = 0$ drept punct singular izolat deoarece acest lucru este presupus pentru cîmpul $\int_0^{\omega} X_0^{(m)}(x_0, t)\, dt$. Deoarece indicele punctului $x_0 = 0$ în cîmpul $\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} X_0^{(m)}(x_0, t)\, dt$ este diferit de zero, rezultă că indicele punctului $x_0 = 0$ în cîmpul $u(x_0)$ este diferit de zero. Să considerăm și cîmpul $u_{\varepsilon}(x_0) = x(\omega, x_0, \varepsilon) - x_0$; avem $\lim_{\varepsilon \to 0} x(\omega, x_0, \varepsilon) = x(\omega, x_0, 0)$, deci pentru $|\varepsilon|$ suficient de mic rotația cîmpului $u_{\varepsilon}(x_0)$ pe o sferă care conține originea va fi egală cu aceea a cîmpului $u(x_0)$. Deoarece indicele originii în cîmpul $u(x_0)$ e diferit de zero, rezultă că dacă sfera e suficient de mică atunci rotația cîmpului $u_{\varepsilon}(x_0)$ pe această sferă va fi diferită de zero. Dar atunci cîmpul $u_{\varepsilon}(x_0)$ va avea în domeniul interior sferei un punct singular, deci un punct pentru care $u_{\varepsilon}(x_0) = 0$, adică $x(\omega, x_0, \varepsilon) = x_0$; acest punct corespunde unei soluții periodice. Teorema e demonstrată.

*Observație.* Dacă punctul $x = 0$ este asimptotic stabil pentru sistemul (7), indicele său în cîmpul $x(k\omega) - x_0$ este, pentru $k$ suficient de mare, egal cu $\pm 1$, deci indicele său în cîmpul $\frac{1}{k\omega}\int_0^{k\omega} X_0^{(m)}\, dt$ este diferit de zero.

Dar

$$\frac{1}{k\omega}\int_0^{k\omega} X_0^{(m)}\, dt = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} X_0^{(m)}\, dt$$

și condiția din enunț e verificată. Regăsim astfel un caz particular al teoremei 3.11.

TEOREMA 3.13. *Dacă sistemul* (7) *nu depinde explicit de* $t$, *dacă* $X_0(x)$ *admite în* $x = 0$ *un punct singular izolat care nu este punct de acumulare de soluții periodice cu perioadă* $\omega' \leqslant \omega$ *și dacă indicele punctului* $x = 0$ *în cîmpul* $X_0(x)$ *este diferit de zero, atunci pentru* $|\varepsilon|$ *suficient de mic sistemul* (7) *admite o soluție periodică de perioadă* $\omega$, *care pentru* $\varepsilon \to 0$ *tinde către zero.*

*Demonstrație.* Ca în cazul teoremei precedente vom arăta că rotația cîmpului $u_{\varepsilon}(x_0)$ este diferită de zero pe o sferă suficient de mică cu centrul în origină, arătînd că indicele originii în cîmpul $u(x_0)$ este diferit de zero. Pentru aceasta vom arăta că indicele originii în cîmpul $u(x)$ coincide cu

indicele în cîmpul $X_0(x)$. Definim cîmpul $W(x_0, \tau) \equiv \frac{1}{\omega\tau}[x(\omega\tau, x_0, 0) - x_0]$ pentru $\tau \neq 0$, $W(x_0, 0) = X_0(x_0)$. Deoarece $\frac{d}{dt}x(t, x_0, 0)$ pentru $t = 0$ este chiar $X_0(x_0)$, rezultă că $\lim_{\tau \to 0} W(x_0, \tau) = W(x_0, 0)$, deci cîmpul $W(x_0, \tau)$ depinde continuu de $\tau$. Cîmpul $W(x_0, \tau) \neq 0$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, pe o sferă suficient de mică cu centrul în origină, deoarece am presupus că origina nu e punct de acumulare de soluții periodice cu perioadă $\omega' \leqslant \omega$ și deci $x(\omega\tau, x_0, 0) \neq x_0$ pentru $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Cîmpul $W(x_0, \tau)$ reprezintă o deformație continuă a cîmpului $X_0(x_0)$ în cîmpul $\frac{1}{\omega}u(x_0)$ și deoarece $W(x_0, \tau) \neq 0$ rezultă că indicele originii în cele două cîmpuri este același. Teorema este demonstrată.

## § 7. SISTEME AUTONOME

Problema soluțiilor periodice prezintă anumite particularități în cazul cînd funcțiile $X_0$ și $X_1$ nu depind explicit de $t$, deoarece în acest caz soluțiile periodice ale sistemelor (6) și (7) au în general perioade diferite. În cele ce urmează vom prezenta teoria completă a sistemelor autonome cu parametru mic, urmînd calea geometrică folosită sistematic de M. Urabe.

Considerăm sistemul

$$\frac{dx}{dt} = X(x). \tag{13}$$

Presupunem că acest sistem admite o soluție periodică $x = u(t)$ de perioadă $\omega$. Pe baza teoremei de unicitate rezultă că $X[u(t)] \neq 0$ pentru toți $t$. Notăm $\overline{X} = \frac{X[u(t)]}{|X[u(t)]|}$. Dacă $n \geqslant 3$ și dacă $X$ verifică o condiție Lipschitz locală, curba $x = \overline{X}(t)$ nu acoperă întreaga sferă unitate, deci există un vector unitar $e_1$, astfel încît $\overline{X}(t)$ să nu coincidă cu $-e_1$ pentru nici o valoare a lui $t$. Plecînd de la vectorul constant $e_1$ construim un sistem ortogonal și normat de vectori $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Notăm $\cos\theta_i = (\overline{X}(t), e_i)$ și formăm vectorii $\xi_\nu = e_\nu - \frac{\cos\theta_\nu}{1 + \cos\theta_1}(e_1 + \overline{X})$, $\nu = 2, 3, \ldots, n$. Deoarece $\overline{X}(t)$ nu coincide nicăieri cu $-e_1$, rezultă că $1 + \cos\theta_1 \neq 0$. Vectorii $\xi_\nu$ sînt funcții de $t$, periodice cu perioadă $\omega$ și au aceleași proprietăți de regularitate ca și $\overline{X}(t)$. Vectorii $(\overline{X}(t), \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n)$ formează un sistem ortogonal, normat. Să verificăm aceasta:

$$(\xi_\nu, \overline{X}) = \left(e_\nu - \frac{\cos\theta_\nu}{1 + \cos\theta_1}(e_1 + \overline{X}), \overline{X}\right) = (e_\nu, \overline{X}) - \frac{\cos\theta_\nu}{1 + \cos\theta_1}[(e_1, \overline{X}) +$$

$$+ (\overline{X}, \overline{X})] = \cos\theta_\nu - \frac{\cos\theta_\nu}{1 + \cos\theta_1}(\cos\theta_1 + 1) = 0,$$

$$(\xi_\nu, \xi_\mu) = \left(e_\nu - \frac{\cos\theta_\nu}{1+\cos\theta_1} e_1 - \frac{\cos\theta_\nu}{1+\cos\theta_1}\bar{X}, \xi_\mu\right) =$$

$$= \left(e_\nu - \frac{\cos\theta_\nu}{1+\cos\theta_1} e_1, \xi_\mu\right) = \left(e_\nu - \frac{\cos\theta_\nu}{1+\cos\theta_1} e_1, e_\mu - \frac{\cos\theta_\mu}{1+\cos\theta_1} e_1 - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos\theta_\mu}{1+\cos\theta_1} \bar{X}\right) = \delta_{\mu\nu} - \frac{\cos\theta_\mu \cos\theta_\nu}{1+\cos\theta_1} + \frac{\cos\theta_\nu \cos\theta_\mu}{(1+\cos\theta_1)^2} +$$

$$+ \frac{\cos\theta_\nu \cos\theta_\mu \cos\theta_1}{(1+\cos\theta_1)^2} = \delta_{\mu\nu}.$$

În cazul $n = 2$, fie $\bar{X} = \begin{pmatrix}\bar{X}^1\\ \bar{X}^2\end{pmatrix}$ ; luăm $\xi_2 = \begin{pmatrix}\bar{X}^2\\ -\bar{X}^1\end{pmatrix}$ și sistemul $(\bar{X}, \xi_2)$ este ortogonal și normat.

În definitiv, rezultă că *soluției periodice $u(t)$ i s-a atașat un sistem de vectori ortogonal și normat, avînd drept unul din vectori pe $\bar{X}$ (vectorul unitar al tangentei la curba $x = u(t)$) format din vectori periodici de perioadă $\omega$, cu aceleași proprietăți de regularitate ca și $\bar{X}(t)$.*

Cu ajutorul acestui sistem ortogonal normat facem schimbarea de variabile dată de relația

$$x = u(\theta) + S(\theta)\, y,$$

$S(\theta)$ fiind matricea ale cărei coloane sînt vectorii $\xi_\nu(\theta)$; $\theta$ este un scalar, iar $y$ un vector de dimensiune $n-1$. Verificăm că relațiile care definesc schimbarea de variabile sînt inversabile în vecinătatea curbei $x = u(t)$. Avem

$$\left.\frac{\partial (x^1, x^2, \ldots, x^n)}{\partial (y^1, \ldots, y^{n-1}, \theta)}\right|_{y=0} = \det (S(\theta), X[u(\theta)]),$$

unde am notat cu $(S, X)$ matricea ale cărei prime $n-1$ coloane sînt formate din coloanele matricii $S$, iar ultima coloană este $X$.

Mai departe,

$$\det (S(\theta), X[u(\theta)]) = \det (S(\theta), |X[u(\theta)]|\, \bar{X}[u(\theta)]) =$$

$$= |X[u(\theta)]| \det (S(\theta), \bar{X}[u(\theta)]) = |X[u(\theta)]| \neq 0.$$

Am folosit faptul că sistemul $(\xi_2, \ldots, \xi_n, \bar{X})$ este ortogonal și normat, deci determinantul matricii $(S(\theta), \bar{X}(\theta))$ este 1. Rezultă $\frac{\partial (x^1, \ldots, x^n)}{\partial (y^1, \ldots, y^{n-1}, \theta)} \neq 0$ și transformarea este inversabilă local. Prin această schimbare de variabile curba $x = u(t)$ devine $y = 0$, $\theta = t$. Să vedem ce formă capătă în noile variabile sistemul (13). Avem

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du(\theta)}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{dS(\theta)}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\, y + S(\theta)\frac{dy}{dt} = X[u(\theta) + S(\theta)\, y]$$

deci

$$X[u(\theta)]\frac{d\theta}{dt}+\frac{d\theta}{dt}\frac{dS(\theta)}{d\theta}y+S(\theta)\frac{dy}{dt}=X[u(\theta)+S(\theta)y]. \tag{14}$$

Înmulțind această relație cu $X^*[u(\theta)]$ și ținînd seama de faptul că $X^*S=0$, obținem

$$\frac{d\theta}{dt}\left(|X[u(\theta)]^2|+X^*[u(\theta)]\frac{dS(\theta)}{d\theta}y\right)=X^*[u(\theta)]X[u(\theta)+S(\theta)y].$$

Pentru $|y|$ suficient de mic coeficientul lui $\frac{d\theta}{dt}$ nu se anulează, deci în vecinătatea curbei $x=u(t)$ obținem

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{X^*[u(\theta)]X[u(\theta)+S(\theta)y]}{|X[u(\theta)]|^2+X^*[u(\theta)]\frac{dS(\theta)}{d\theta}y}.$$

Înmulțind relația (14) cu $\xi_\mu^*(\theta)$ și ținînd seama de proprietățile de ortogonalitate, obținem

$$\frac{d\theta}{dt}\xi_\mu^*\frac{dS}{d\theta}y+\frac{dy^\mu}{dt}=\xi_\mu^*X[u(\theta)+S(\theta)y]$$

deci

$$\frac{dy^\mu}{dt}=\xi_\mu^*(\theta)X[u(\theta)+S(\theta)y]-$$

$$-\frac{X^*[u(\theta)]X[u(\theta)+S(\theta)y]}{|X[u(\theta)]|^2+X^*[u(\theta)]\frac{dS(\theta)}{d\theta}y}\xi_\mu^*(\theta)\frac{dS(\theta)}{d\theta}y$$

În definitiv sistemul (13) se înlocuiește cu un sistem de forma

$$\frac{dy}{dt}=Y(\theta,y),\quad \frac{d\theta}{dt}=\Theta(\theta,y),$$

unde se vede imediat că $Y$ și $\Theta$ sînt periodice în $\theta$ cu perioada $\omega$, verifică relațiile $\Theta(\theta,0)\equiv 1$, $Y(\theta,0)\equiv 0$ și au aceleași proprietăți de regularitate ca și $X(x)$.

Formăm acum sistemul

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{1}{\Theta(\theta,y)}Y(\theta,y). \tag{15}$$

Funcția $\frac{Y(\theta,y)}{\Theta(\theta,y)}$ este periodică în $\theta$ cu perioada $\omega$ și are pentru $|y|$ suficient de mic aceleași proprietăți de regularitate ca și $X$ deoarece din

$\Theta(\theta, 0) \equiv 1$ rezultă că pentru $|y|$ suficient de mic $\Theta(\theta, y) \neq 0$. Să punem în evidenţă prima aproximaţie liniară în acest sistem. Avem

$$X[u(\theta) + S(\theta) y] = X[u(\theta)] + \frac{\partial X[u(\theta)]}{\partial x} S(\theta) y + O(|y|^2),$$

deci

$$X^*[u(\theta)] X[u(\theta) + S(\theta) y] = |X[u(\theta)]|^2 + X^*[u(\theta)] A(\theta) S(\theta) y + O(|y|^2),$$

unde am notat $A(\theta) = \dfrac{\partial X[u(\theta)]}{\partial x}\cdot$ Rezultă

$$\frac{1}{X^*[u(\theta)] X[u(\theta) + S(\theta) y]} =$$

$$= \frac{1}{|X[u(\theta)]|^2} \frac{1}{1 + \dfrac{X^*[u(\theta)] A(\theta) S(\theta) y}{|X[u(\theta)]|^2} + o(|y|)}$$

$$= \frac{1}{|X[u(\theta)]|^2} \left\{ 1 - \frac{X^*[u(\theta)] A(\theta) S(\theta) y}{|X[u(\theta)]|^2} + o(|y|) \right\}\cdot$$

Mai departe,

$$\frac{1}{\Theta(\theta, y)} = \left\{ |X[u(\theta)]|^2 + X^*[u(\theta)] \frac{dS(\theta)}{d\theta} y \right\}\cdot$$

$$\cdot \frac{1}{|X[u(\theta)]|^2} \left\{ 1 - \frac{X^*[u(\theta)] A(\theta) S(\theta) y}{|X([u(\theta)]|^2} + o(|y|) \right\} = 1 + O(|y|),$$

$$Y^\mu(\theta, y) = \xi_\mu^*(\theta) X[u(\theta) + S(\theta) y] - \Theta(\theta, y) \xi_\mu^*(\theta) \frac{dS(\theta)}{d\theta} y$$

deci

$$\frac{1}{\Theta(\theta, y)} Y^\mu(\theta, y) = \frac{1}{\Theta(\theta, y)} \xi_\mu^*(\theta) \{X[u(\theta)] + A(\theta) S(\theta) y + o(|y|)\} -$$

$$- \xi_\mu^*(\theta) \frac{dS(\theta)}{d\theta} y = \{1 + O(|y|)\}\{\xi_\mu^*(\theta) A(\theta) S(\theta) y + o(|y|)\} - \xi_\mu^*(\theta) \frac{dS(\theta)}{d\theta} y.$$

Rezultă

$$\frac{dy^\mu}{d\theta} = \xi_\mu^*(\theta) \left( A(\theta) S(\theta) - \frac{dS(\theta)}{d\theta} \right) y + o(|y|).$$

Sistemul (15) se scrie deci

$$\frac{dy}{d\theta} = B(\theta) y + o(|y|),$$

unde elementele $b_{\mu\nu}$ ale matricii $B(\theta)$sînt date de

$$b_{\mu\nu}(\theta)=\xi_{\mu}^{*}(\theta)\left(A(\theta)\xi_{\nu}(\theta)-\frac{d\xi_{\nu}}{d\theta}\right)$$

și sînt funcții periodice de $\theta$ cu perioadă $\omega$.

Vom numi sistemul

$$\frac{dy}{d\theta}=B(\theta)y$$

*sistemul în variații normale.* Să considerăm sistemul

$$\frac{dv}{d\theta}=A(\theta)v,$$

adică sistemul în variații corespunzător soluției $u(\theta)$. Scriem vectorul $v$ în sistemul ortogonal normal $(\overline{X},\xi_2,\ldots,\xi_n)$:

$$v(\theta)=p(\theta)X[u(\theta)]+\sum_{\nu=2}^{n}p^{\nu}(\theta)\,\xi_{\nu}(\theta).$$

Căutăm ecuațiile pe care le verifică $p^{\mu}(\theta)$. Avem

$$\frac{dv}{d\theta}=\frac{dp}{d\theta}X[u(\theta)]+p\,A(\theta)\frac{du}{d\theta}+\sum_{\nu=2}^{n}p^{\nu}\frac{d\xi_{\nu}}{d\theta}+\frac{dp^{\nu}}{d\theta}\xi_{\nu}(\theta)=$$

$$=A\,p\,X[u(\theta)]+\sum_{\nu=2}^{n}p^{\nu}(\theta)\,A(\theta)\,\xi_{\nu}(\theta).$$

Cum

$$\frac{du}{d\theta}=X[u(\theta)],$$

rezultă

$$\frac{dp}{d\theta}X[u(\theta)]+\sum_{\nu=2}^{n}p^{\nu}\frac{d\xi_{\nu}}{d\theta}+\frac{dp^{\nu}}{d\theta}\xi_{\nu}=\sum_{\nu=2}^{n}p^{\nu}A(\theta)\xi_{\nu}.$$

Înmulțind cu $\xi_{\mu}^{*}$ căpătăm

$$\frac{dp^{\mu}}{d\theta}=\xi_{\mu}^{*}\sum_{\nu=2}^{n}\left(A(\theta)\,\xi_{\nu}(\theta)-\frac{d\xi_{\nu}(\theta)}{d\theta}\right)p^{\nu}=\sum_{\nu=2}^{n}b_{\mu\nu}(\theta)\,p^{\nu}.$$

Am ajuns astfel la concluzia: *componentele normale $p^{\nu}$ ale variațiilor $v$ verifică sistemul în variații normale.*

Să observăm că din

$$\frac{du}{d\theta}=X[u(\theta)]$$

rezultă

$$\frac{d}{dt}\frac{du}{d\theta} = A(\theta)\frac{du}{d\theta}$$

deci

$$\frac{du}{d\theta} = X[u(\theta)]$$

este o soluţie a sistemului în variaţii.

Fie $\Phi(\theta)$ o matrice fundamentală de soluţii pentru sistemul în variaţii, a cărei primă coloană e formată de soluţia $X[u(\theta)]$. Avem

$$\Phi(\theta) = U(\theta)C,$$

unde $U(\theta)$ este matricea de soluţii cu $U(0) = E$. De aici

$$\Phi(\theta + \omega) = U(\theta + \omega)C = U(\theta)U(\omega)C = U(\theta)CC^{-1}U(\omega)C = \Phi(\theta)K,$$

unde $K = C^{-1}U(\omega)C$; deoarece $K$ este asemenea cu matricea de monodromie $U(\omega)$, valorile ei proprii sînt tocmai multiplicatorii sistemului în variaţii. Fie $v_2, \ldots, v_n$ soluţiile diferite de $X[u(\theta)]$ care formează matricea $\Phi$. Scriem aceste soluţii în sistemul ortogonal normat $(\bar{X}, \xi_2, \ldots, \xi_n)$;

$$v_\nu = p_\nu X[u(\theta)] + \sum_\mu p_\nu^\mu \xi_\mu .$$

Relaţia

$$\Phi(\theta + \omega) = \Phi(\theta)K$$

devine

$$X[u(\theta + \omega)] = X[u(\theta)]k_1^1 + \sum_{\mu=2}^{n} v_\mu(\theta)k_1^\mu,$$

$$v_\nu(\theta + \omega) = X[u(\theta)]k_\nu^1 + \sum_{\mu=2}^{n} v_\mu(\theta)k_\nu^\mu \cdot$$

Luînd $\theta = 0$ şi trecînd la baza $(\bar{X}, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ se capătă

$$p_\nu(\omega)X[u(\omega)] + \sum_\mu p_\nu^\mu(\omega)\xi_\mu(\omega) = X[u(0)]k_\nu^1 +$$

$$+ \sum_{\mu=2}^{n}[p_\mu(0)X[u(0)] + \sum_k p_\mu^k(0)\xi_k(0)]k_\nu^\mu \cdot$$

Dar

$$u(\omega) = u(0), \quad \xi_\mu(\omega) = \xi_\mu(0),$$

deci

$$p_\nu(\omega)X[(u(0)] + \sum_\mu p_\nu^\mu(\omega)\xi_\mu(0) = X[u(0)]k_\nu^1 + \sum_{\mu=2}^{n}\Big[p_\mu(0)X[u(0)] +$$

$$+ \sum_k p_\mu^k(0)\xi_k(0)\Big]k_\nu^\mu ,$$

$$X[u(0)] = X[u(0)]k_1^1 + \sum_{\mu=2}^{n} v_\mu(0)k_1^\mu \cdot$$

Vectorii $X[u(0)]$, $\xi_2(0), \ldots \xi_n(0)$, sînt liniar independenţi; tot liniar independenţi sînt şi $X[u(0)]$, $v_2(0), \ldots, v_n(0)$. Rezultă

$$k_1^1 = 1, \qquad k_1^\mu = 0,$$

$$p_\nu(\omega) = k_\nu^1 + \sum_{\mu=2}^{n} k_\nu^\mu p_\mu(0), \qquad p_\nu^k(\omega) = \sum_\mu k_\nu^\mu p_\mu^k(0)\cdot$$

Avem $\det(p_\nu^\mu(0)) \neq 0$; într-adevăr, dacă determinantul ar fi nul, ar exista constantele $c^\nu$ nu toate nule astfel ca $\sum_\nu c^\nu p_\nu^\mu = 0$, deci

$$\sum_\nu c^\nu v_\nu(0) = \sum_\nu c^\nu p_\nu(0) X[u(0)] + \sum_{\nu,\mu} c^\nu p_\nu^\mu \xi_\mu =$$

$$= \sum_\nu c^\nu p_\nu(0) X[u(0)],$$

deci $c^\nu = 0$, $\sum_\nu c^\nu p_\nu(0) = 0$, ceea ce este contradictoriu.

Funcţiile $v_\nu(\theta)$ sînt soluţii ale sistemului în variaţii, deci după cum am văzut, componentele lor normale $p_\nu^\mu(\theta)$ sînt soluţii ale sistemului în variaţii normale. Deoarece $\det p_\nu^\mu(0) \neq 0$, rezultă că $p_\nu^\mu(\theta)$, $\nu = 2, \ldots, n$, $\mu = 2, \ldots, n$, reprezintă o matrice fundamentală de soluţii pentru sistemul în variaţii normale. Fie $P(\theta)$ această matrice şi să notăm cu $K_2$ matricea $(k_\nu^\mu)_{\substack{\nu=2,\ldots,n \\ \mu=2,\ldots,n}}$. Relaţia $p_\nu^\mu(\omega) = \sum_\lambda p_\lambda^\mu(0)\, k_\nu^\lambda$ se scrie $P(\omega) = P(0) K_2$ şi arată că valorile proprii ale matricii $K_2$ sînt tocmai multiplicatorii sistemului în variaţii normale. Deoarece $k_1^1 = 1$, $k_1^\mu = 0$, rezultă că matricea $K$ are forma

$$K = \begin{pmatrix} 1 & K_1 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix}.$$

Am obţinut următorul rezultat: *multiplicatorii sistemului în variaţii normale se obţin din multiplicatorii sistemului în variaţii eliminînd multiplicatorul egal cu* 1 (care corespunde soluţiei periodice $X[u(\theta)]$).

Acum putem demonstra o teoremă de stabilitate a soluţiei periodice $u(t)$. Această teoremă a fost demonstrată pentru prima dată de Andronov şi Witt.

TEOREMA 3.14. *Dacă $(n-1)$ multiplicatori ai sistemului în variaţii corespunzător soluţiei periodice $x = u(t)$ se află în interiorul cercului unitate, atunci soluţia periodică $x = u(t)$ este orbital stabilă; aceasta înseamnă că dacă $x(t)$ este o altă soluţie a sistemului* (13) *pentru care $x(t_0)$ e suficient de apropiată de curba $x = u(t)$, atunci*

$$\lim_{t \to \infty} [x(t) - u(t + c)] = 0.$$

*Demonstraţie.* Dacă $n - 1$ multiplicatori ai sistemului în variaţii se află în interiorul cercului unitate, rezultă că multiplicatorii sistemului în variaţii normale se află în interiorul cercului unitate, deci soluţia ba-

nală a sistemului în variaţii normale este uniform asimptotic stabilă, deci, pe baza teoremei de stabilitate după prima aproximaţie soluţia banală a sistemului (15) este uniform asimptotic stabilă. Dar atunci, pentru $|y(0)|$ suficient de mic, avem $\lim_{\theta\to\infty} y(\theta) = 0$, deci din relaţia

$$x[t(\theta)] = u(\theta) + S(\theta)\,y(\theta)$$

deducem

$$\lim_{\theta\to\infty} \{x[t(\theta)] - u(\theta)\} = 0.$$

Fie $0 < \theta' < \theta''$; avem

$$[t(\theta'') - \theta''] - [t(\theta') - \theta'] = \int_{\theta'}^{\theta''} \left(\frac{dt}{d\theta} - 1\right) d\theta =$$

$$= \int_{\theta'}^{\theta''} \left(\frac{1}{\Theta(\theta, y)} - 1\right) d\theta = \int_{\theta'}^{\theta''} \{1 + O(|y|) - 1\} d\theta = \int_{\theta'}^{\theta''} O(|y|)\, d\theta.$$

Dar

$$|y(\theta)| \leqslant k\,e^{-\alpha\theta},$$

deci

$$O(|y|) \leqslant M e^{-\alpha\theta};$$

de aici

$$|[t(\theta'') - \theta''] - [t(\theta') - \theta']| \leqslant M \int_{\theta'}^{\theta''} e^{-\alpha\theta}\, d\theta < M \int_{\theta'}^{\infty} e^{-\alpha\theta}\, d\theta = \frac{M}{\alpha} e^{-\alpha\theta'}.$$

Pentru $\theta'$ suficient de mare, $|[t(\theta'') - \theta''] - [t(\theta') - \theta']$ poate fi făcut oricît de mic, deci $\lim_{\theta\to\infty} [t(\theta) - \theta]$ există; fie $\theta_0$ această limită.

Pe de altă parte,

$$x[t(\theta)] - x(\theta + \theta_0) = \int_{\theta+\theta_0}^{t(\theta)} X[x(\alpha)]\, d\alpha,$$

deci

$$|x[t(\theta)] - x(\theta + \theta_0)| \leqslant |t(\theta) - (\theta + \theta_0)| \sup |X[x(\alpha)]|.$$

Dar dacă $|y(0)| < \delta_0$, rezultă $|y(\theta)| < 1$ pentru $\theta \geqslant 0$, din cauza stabilităţii soluţiei banale a sistemului (15), deci $|x[t(\theta)]|$ e mărginită, deci $|X[x(\theta)]|$ e mărginită. Cum

$$\lim_{\theta\to\infty} [t(\theta) - (\theta + \theta_0)] = \lim_{\theta\to\infty} [t(\theta) - \theta - \theta_0] = 0$$

rezultă

$$\lim_{\theta\to\infty} \{x[t(\theta)] - x(\theta + \theta_0)\} = 0.$$

Deoarece avem şi

$$\lim_{\theta\to\infty} \{x[t(\theta)] - u(\theta)\} = 0$$

rezultă

$$\lim_{\theta\to\infty} \{x(\theta + \theta_0) - u(\theta)\} = 0.$$

Notînd $\theta + \theta_0 = t$, $c = -\theta_0$, rezultatul obţinut se scrie

$$\lim_{t\to\infty} \{x(t) - u(t + c)\} = 0$$

şi teorema este demonstrată.

## § 8. SISTEME AUTONOME CU PARAMETRU MIC

Să considerăm acum sistemul perturbat

$$\frac{dx}{dt} = Z(x, \varepsilon), \tag{16}$$

unde $Z$ e continuu diferenţiabilă şi $Z(x, 0) = X(x)$.

Presupunem ca mai sus că sistemul (13) admite o soluţie periodică $x = u(t)$ de perioadă $\omega$. Considerăm sistemul de vectori $\bar{X}(t)$, $\xi_2(t), \ldots, \xi_n(t)$ şi facem în sistemul (16) schimbarea de variabile $x = u(\theta) + S(\theta)y$. Obţinem un sistem de forma

$$\frac{dy}{dt} = Y[\theta, y, \varepsilon], \quad \frac{d\theta}{dt} = \Theta(\theta, y, \varepsilon), \quad Y(\theta,0,0) \equiv 0, \quad \Theta(\theta,0,0) \equiv 1.$$

Formăm sistemul

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{1}{\Theta(\theta, y, \varepsilon)} Y(\theta, y, \varepsilon) .$$

Avem, cu aceleaşi calcule ca în paragraful precedent

$$\Theta(\theta, y, \varepsilon) = \frac{X^*[u(\theta)]\, Z[u(\theta) + S(\theta)y, \varepsilon]}{|X[u(\theta)]|^2 + X^*[u(\theta)]\, \dfrac{dS(\theta)}{d\theta} y},$$

$$Y^\mu(\theta, y, \varepsilon) = \xi_\mu^*(\theta) Z[u(\theta) + S(\theta)y, \varepsilon] - \Theta(\theta, y, \varepsilon)\xi_\mu^*(\theta)\frac{dS(\theta)}{d\theta} y.$$

Mai departe

$$Z[u(\theta) + S(\theta)y, \varepsilon] = Z[u(\theta),0] + \frac{\partial Z[u(\theta),0]}{\partial x} S(\theta)y + \varepsilon\frac{\partial Z[u(\theta),0]}{\partial \varepsilon} +$$

$$+ o(|y| + |\varepsilon|) = X[u(\theta)] + A(\theta)S(\theta)y + \varepsilon\frac{\partial Z[u(\theta),0]}{\partial \varepsilon} + o(|y| + |\varepsilon|).$$

Rezultă

$$\xi^*_\mu(\theta)Z[u(\theta) + S(\theta)y,\varepsilon] = \xi^*_\mu(\theta)A(\theta)S(\theta)y + \varepsilon\,\xi^*_\mu(\theta)\frac{\partial Z[u(\theta),0]}{\partial \varepsilon} + $$
$$+ o(|y| + |\varepsilon|)$$

Ţinînd seama de faptul că

$$\Theta(\theta,y,\varepsilon) = 1 + O(|y|) + O(|\varepsilon|),$$

rezultă

$$\frac{dy^\mu}{d\theta} = \xi^*_\mu(\theta)\left[A(\theta)S(\theta) - \frac{dS(\theta)}{d\theta}\right]y + \varepsilon\,\xi^*_\mu(\theta)\frac{\partial Z[u(\theta),0]}{\partial \varepsilon} + o(|y|) + |\varepsilon|).$$

În definitiv

$$\frac{dy}{d\theta} = B(\theta)y + \varepsilon\eta(\theta) + o(|y| + |\varepsilon|), \tag{17}$$

unde

$$\eta^\mu(\theta) = \xi^*_\mu(\theta)\frac{\partial Z[u(\theta),0]}{\partial \varepsilon}.$$

TEOREMA 3.15. *Dacă sistemul (13) admite o soluţie periodică $x = u(t)$ de perioadă $\omega$, astfel încît sistemul în variaţii corespunzător admite un singur multiplicator egal cu 1, atunci pentru $|\varepsilon|$ suficient de mic sistemul (16) admite o soluţie periodică unică $x = x(t,\varepsilon)$, de perioadă $\omega + O(\varepsilon)$, cu proprietatea $\lim_{\varepsilon\to 0} x(t,\varepsilon) = u(t)$. Dacă în plus nici unul din multiplicatori, cu excepţia celui egal cu 1, nu este rădăcină a unităţii, sistemul* (16) *nu admite în vecinătatea soluţiei $u(t)$ soluţii de perioadă $p\omega + O(\varepsilon)$. Dacă multiplicatorii diferiţi de 1 se află în interiorul cercului unitate, atunci soluţia periodică a sistemului (16) este orbital stabilă.*

*Demonstraţie.* Fie $y(\theta,c,\varepsilon)$ soluţia sistemului (17) cu $y(0,c,\varepsilon) = c$. Funcţia $y(\theta,c,\varepsilon)$ este continuu diferenţiabilă în raport cu $c$ şi $\varepsilon$; cum $y(\theta,0,0) = 0$, putem scrie

$$y(\theta,c,\varepsilon) = G(\theta)c + r(\theta)\varepsilon + o(|c| + |\varepsilon|).$$

Înlocuind în sistemul (17) obţinem

$$\frac{dG(\theta)}{d\theta}c + \frac{dr(\theta)}{d\theta}\varepsilon + o(|c| + |\varepsilon|) = B(\theta)[G(\theta)c + r(\theta)\varepsilon +$$
$$+ o(|c| + |\varepsilon|)] + \varepsilon\eta(\theta) + o(|c| + |\varepsilon|).$$

Rezultă

$$\frac{dG(\theta)}{d\theta} = B(\theta)G(\theta), \qquad \frac{dr(\theta)}{d\theta} = B(\theta)r(\theta) + \eta(\theta),$$

$$G(0) = E, \qquad r(0) = 0.$$

Prin urmare, $G(\theta)$ e o matrice fundamentală a sistemului în variații normale, iar $r(\theta)$ este o soluție a sistemului neomogen, dată de formula

$$r(\theta) = G(\theta)\int_0^{\theta} G^{-1}(s)\eta(s)\mathrm{d}s.$$

Soluția $y(\theta,c,\varepsilon)$ este periodică de perioadă $p\omega$ dacă și numai dacă

$$y = (p\omega, c, \varepsilon) = y(0, c, \varepsilon) = c.$$

Dar

$$y(p\omega,c,\varepsilon) = G(p\omega)c + r(p\omega)\varepsilon + o(|c| + |\varepsilon|).$$

Rezultă că putem scrie condiția de periodicitate sub forma

$$[G(p\omega) - E]c + r(p\omega)\varepsilon + o(|c| + |\varepsilon|) = 0.$$

Dacă

$$\det[G(p\omega) - E] \neq 0$$

există pentru $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ o funcție $c(\varepsilon)$ continuu diferențiabilă, cu $c(0) = 0$ și astfel ca

$$[G(p\omega) - E]c(\varepsilon) + r(p\omega)\varepsilon + o(|c(\varepsilon)| + |\varepsilon|) \equiv 0.$$

Soluția $y(\theta,c(\varepsilon),\varepsilon)$ este o soluție periodică de perioadă $p\omega$ a sistemului (17), care pentru $\varepsilon \to 0$ tinde către zero.

Acestei soluții periodice îi corespunde o soluție

$$x[t(\theta)] = u(\theta) + S(\theta)y(\theta, c(\varepsilon), \varepsilon)$$

a sistemului (16); curba $x = x[t(\theta)]$ este curbă închisă vecină cu $x = u(\theta)$ și pentru $\varepsilon \to 0$ tinde către aceasta. Perioada $\omega_p'$ a soluției $x(t)$ va fi dată de

$$t(p\omega) - t(0) = \int_0^{p\omega} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{p\omega} \frac{\mathrm{d}\theta}{\Theta(\theta,y,\varepsilon)} = \int_0^{p\omega} \{1 + O(|y|) + O(|\varepsilon|)\}\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= p\omega + O(|y| + |\varepsilon|) = p\omega + O(|\varepsilon|)$$

deoarece

$$|y| = O(|\varepsilon|).$$

Deoarece $G(\theta)$ este o matrice fundamentală a sistemului în variații normale, avem $G(p\omega) = G^p(\omega)$, deci dacă $G(\omega)$ are o valoare proprie egală cu 1, atunci $G(p\omega)$ are o valoare proprie egală cu 1, deci dacă $\det(G(\omega) - E) = 0$, atunci $\det(G(p\omega) - E) = 0$. Rezultă de aici că dacă $\det[G(p\omega) - E] \neq 0$, atunci avem și $\det[G(\omega) - E] \neq 0$, deci există în vecinătatea soluției $u(\theta)$ o soluție periodică de perioadă $\omega + O(|\varepsilon|)$ a sistemului (16). Dar dacă $\det[G(p\omega) - E] \neq 0$, soluția periodică $y(\theta,c(\varepsilon),\varepsilon)$ este unică de perioadă $p\omega$ și deci coincide cu cea de perioadă $\omega$. Dacă $\det[G(\omega) - E] \neq 0$ dar există $p$ astfel ca $\det[G(p\omega) - E] = 0$, atunci pentru acest $p$ pot exista soluții $y(\theta,c(\varepsilon),\varepsilon)$ de perioadă $p\omega$ care nu admit și perioada $\omega$. Condiția $\det[G(\omega) - E] \neq 0$ înseamnă condiția ca multipli-

catorii sistemului în variaţii normale să nu fie egali cu 1, deci condiţia ca sistemul în variaţii să admită un singur multiplicator egal cu 1.

Rămîne să demonstrăm afirmaţia relativă la stabilitatea soluţiei. Avem

$$A(t,\varepsilon) = \frac{\partial Z[x(t,\varepsilon),\varepsilon]}{\partial x} = \frac{\partial Z[u(t) + O(\varepsilon),\varepsilon]}{\partial x} = \frac{\partial Z[u(t),0]}{\partial x} + O(\varepsilon) =$$

$$= \frac{\partial [Xu(t)]}{\partial x} + O(\varepsilon) = A(t) + O(\varepsilon).$$

Conform ipotezei, sistemul

$$\frac{dv}{dt} = A(t)v$$

are multiplicatorii în interiorul cercului unitate, cu excepţia celui egal cu 1. Deoarece multiplicatorii depind continuu de matricea de monodromie, iar aceasta depinde continuu de coeficienţii sistemului, rezultă că pentru $|\varepsilon|$ suficient de mic multiplicatorii sistemului

$$\frac{dv}{dt} = A(t, \varepsilon)v,$$

cu excepţia celui egal cu 1, se vor găsi în interiorul cercului unitate. Stabilitatea orbitală a soluţiei periodice $x(t,\varepsilon)$ rezultă acum pe baza teoremei 3.14. Teorema este complet demonstrată.

Considerăm acum cazul cînd sistemul (13) admite o soluţie periodică $x = u(t)$ de perioadă $\omega_0$, astfel încît toate soluţiile vecine cu ea să fie tot periodice; în cazul $n \geqslant 3$ vom presupune că perioadele acestor soluţii sînt mărginite. Fie $x_0$ un punct de pe curba închisă $C_0$ dată de $x = u(t)$, şi $\Pi$ hiperplanul normal la $C_0$ în $x_0$. Conform ipotezei, orice traiectorie care taie pe $\Pi$ într-un punct vecin cu $x_0$ este închisă şi reciproc, orice traiectorie închisă din vecinătatea lui $C_0$ taie pe $\Pi$ într-un punct vecin cu $x_0$. Fie $\omega(x)$ perioada unei astfel de traiectorii, $\omega(x_0) = \omega_0$. Demonstrăm că putem alege perioadele astfel încît funcţia $\tilde{\omega}(x)$, care pentru orice $x$ vecin cu $x_0$ este o perioadă a traiectoriei care trece prin $x$, să fie continuă în $x_0$. Traiectoriile considerate sînt date de soluţiile sistemului (15).

Conform ipotezei, soluţiile acestui sistem, pentru $|y|$ suficient de mic, vor fi funcţii periodice de $\theta$ cu perioada $p\omega_0$; într-adevăr, orice astfel de soluţie corespunde unei soluţii a sistemului (13) situată în vecinătatea curbei $x = u(t)$, periodică cu perioada

$$t(p\omega_0) - t(0) = \int_0^{p\omega_0} \frac{d\theta}{\Theta(\theta,y)}$$

şi reciproc, dacă soluţia $x(t)$ e periodică cu perioada $\omega$, înseamnă că pentru această soluţie,

$$\theta(t + \omega) = \theta(t) + p\,\omega_0, \quad y(t + \omega) = y(t),$$

ceea ce arată că $\boldsymbol{y}(\theta)$ e periodică cu perioada $p\omega_0$. Avem

$$t(p\omega_0)-t[(p-1)\omega_0]-\omega_0=\int_{(p-1)\omega_0}^{p\omega_0}\left[\frac{1}{\Theta(\theta,y)}-1\right]\mathrm{d}\theta=\int_{(p-1)\omega_0}^{p\omega_0}O(|y|)\mathrm{d}\theta.$$

De aici rezultă că pentru $H>0$ suficient de mic există $R>0$ astfel încît dacă $|y|<H$ să avem

$$|t(p\omega_0)-t((p-1)\omega_0)-\omega_0|\leqslant R\max|y|.$$

Dacă $n=2$, din proprietățile generale ale sistemelor în plan rezultă că singurul caz posibil este $p=1$, deci $\omega(x)=t(\omega_0)-t(0)$; rezultă

$$|\omega(x)-\omega_0|\leqslant R\max|y|$$

și deci $\omega(x)$ e continuă pentru $x=x_0$. Fie acum $n\geqslant 3$, $\omega(x)=t(p\omega_0)-t(0)$. Avem

$$\omega(x)-p\omega_0=[t(p\omega_0)-t((p-1)\omega_0)-\omega_0]+[t((p-1)\omega_0)-t((p-2)\omega_0)-$$
$$-\omega_0]+\ldots+\ldots+[t(\omega_0)-t(0)-\omega_0].$$

Rezultă

$$|\omega(x)-p\omega_0|\leqslant pR\max|y|,$$

deci

$$\omega(x)-p\omega_0\geqslant -pR\max|y|,\quad \omega(x)\geqslant p[\omega_0-R\max|y|].$$

Pentru $|y|$ suficient de mic,

$$\omega_0-R\max|y|>0.$$

Deoarece am presupus că perioadele $\omega(x)$ sînt mărginite, rezultă de aici

$$p<\frac{M}{\omega_0-R\max|y|}$$

deci mulțimea întregilor $p$ este mărginită. Fie $S_p$ mulțimea punctelor $x$ situate în hiperplanul $\Pi$ în vecinătatea lui $x$ și astfel încît perioada soluției care trece prin $x$ să fie apropiată de $p\omega_0$ și fie $L$ cel mai mic multiplu comun al numerelor $p$. Pentru $x\in S_p$ vom lua

$$\tilde{\omega}(x)=\frac{L}{p}\omega(x);$$

evident, $\tilde{\omega}(x)$ continuă să fie perioadă pentru soluția care trece prin $x$. Avem

$$|\tilde{\omega}(x)-L\omega_0|=\frac{L}{p}|\omega(x)-p\omega_0|<\frac{L}{p}\bar{\varepsilon};$$

pentru $\varepsilon>0$ arbitrar, alegem pe $\bar{\varepsilon}$ astfel ca $\frac{L}{p}\bar{\varepsilon}<\varepsilon$ și apoi alegem veci-

nătatea lui $x_0$ suficient de mică pentru ca $|\omega(x) - p\omega_0| < \bar{\varepsilon}$. Ţinînd seama că $\omega(x_0) = x_0$, deci că $x_0 \in S_1$, rezultă

$$\tilde{\omega}(x_0) = L\omega_0 = L\omega(x_0),$$

deci

$$|\tilde{\omega}(x) - \tilde{\omega}(x_0)| < \varepsilon$$

dacă $x$ este într-o vecinătate suficient de mică a lui $x_0$, ceea ce arată că $\tilde{\omega}$ e continuă în punctul $x_0$. Vom numi perioada $\tilde{\omega}(x)$ *perioada universală*. În cele ce urmează vom lucra numai cu perioadele universale.

Fie $y(\theta,\alpha)$ soluţia sistemului (15) cu $y(0,\alpha) = \alpha$; dacă $\omega_0$ e perioadă universală a lui $C_0$, pentru $|\alpha|$ suficient de mic soluţiile $y(\theta,\alpha)$ sînt toate periodice cu perioada $\omega_0$, deci $y(\omega_0,\alpha) = \alpha$. Curbele închise din vecinătatea curbei $C_0$ se pot scrie

$$x(t) = u(\theta) + S(\theta)\,y(\theta,\alpha);$$

notăm cu $C_\alpha$ curba corespunzătoare soluţiei $y(\theta,\alpha)$. Presupunînd $t(0) = 0$ avem

$$t(\theta,\alpha) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\Theta[\theta, y(\theta,\alpha)]}$$

iar perioada universală $\omega_\alpha$ este dată de

$$\omega_\alpha = t(\omega_0, \alpha).$$

Dacă scriem sistemul (15) sub forma

$$\frac{dy}{d\theta} = W(\theta, y), \tag{18}$$

sistemul (17) se scrie

$$\frac{dy}{d\theta} = W(\theta,y) + \varepsilon\, W_1(\theta, y, \varepsilon). \tag{19}$$

Soluţia generală $y(\theta,\alpha)$ a sistemului (18) este pentru $|\alpha|$ suficient de mic, periodică în $\theta$ cu perioada $\omega_0$. Pentru studiul soluţiilor periodice de perioadă $\omega_0$ ale sistemului (19) putem folosi teorema 3.9.

În cazul cînd soluţia $u(t)$ a sistemului (13) face parte dintr-o familie de soluţii periodice depinzînd de $k + 1$ parametri, presupunînd din nou că perioadele sînt mărginite va rezulta existenţa unei perioade universale. Sistemul (18) va avea o familie de soluţii periodice de perioadă $\omega_0$, depinzînd de $k$ parametri şi pentru studiul soluţiilor periodice de perioadă $\omega_0$ ale sistemului (19) se poate folosi teorema 3.8.

*Aplicaţii.* 1°. Presupunem $n = 2$ şi considerăm sistemul

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x, y),$$

$x$, $y$ fiind scalari. Fie $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ o soluţie periodică a acestui si-

tem. Sistemul ortogonal normat legat de această curbă e format din vectorii

$$\begin{pmatrix} \dfrac{X[\varphi(t), \psi(t)]}{R} \\ \dfrac{Y[\varphi(t), \psi(t)]}{R} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\dfrac{Y[\varphi(t), \psi(t)]}{R} \\ \dfrac{X[\varphi(t), \psi(t)]}{R} \end{pmatrix}, \quad R = \sqrt{X^2[\varphi, \psi] + Y^2[\varphi, \psi]}.$$

Matricea $A(\theta)$ a coeficienților sistemului în variații este

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X[\varphi(\theta), \psi(\theta)]}{\partial x} & \dfrac{\partial X[\varphi(\theta), \psi(\theta)]}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Y[\varphi(\theta), \varphi(\theta)]}{\partial x} & \dfrac{\partial Y[\varphi(\theta), \psi(\theta)]}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

De aici

$$A(\theta) \begin{pmatrix} -\dfrac{Y}{R} \\ \dfrac{X}{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial x} & \dfrac{\partial X}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} & \dfrac{\partial Y}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{Y}{R} \\ \dfrac{X}{R} \end{pmatrix} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial X}{\partial x} Y + \dfrac{\partial X}{\partial y} X \\ -\dfrac{\partial Y}{\partial x} Y + \dfrac{\partial Y}{\partial y} X \end{pmatrix}.$$

Produsul scalar dintre vectorul $\begin{pmatrix} -\dfrac{Y}{R} \\ \dfrac{X}{R} \end{pmatrix}$ și vectorul $A(\theta) \begin{pmatrix} -\dfrac{Y}{R} \\ \dfrac{X}{R} \end{pmatrix}$ este egal cu $\dfrac{1}{R^2}\left(\dfrac{\partial X}{\partial x} Y^2 - \dfrac{\partial X}{\partial y} XY - \dfrac{\partial Y}{\partial x} XY + \dfrac{\partial Y}{\partial y} X^2\right)$, iar produsul scalar dintre vectorul unitar $\begin{pmatrix} -\dfrac{Y}{R} \\ \dfrac{X}{R} \end{pmatrix}$ și derivata lui este nul, deci

$$b(\theta) = \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial X}{\partial x} Y^2 - \frac{\partial X}{\partial y} XY - \frac{\partial Y}{\partial x} XY + \frac{\partial Y}{\partial y} X^2\right).$$

Avem mai departe

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \ln R = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \ln R^2 = \frac{1}{2} \frac{\dfrac{\mathrm{d}R^2}{\mathrm{d}\theta}}{R^2} = \frac{1}{R^2}(X\dot{X} + Y\dot{Y}).$$

Dar

$$\dot{X} = \frac{\partial X}{\partial x} X + \frac{\partial X}{\partial y} Y, \quad \dot{Y} = \frac{\partial Y}{\partial x} X + \frac{\partial Y}{\partial y} Y,$$

deci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln R = \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial X}{\partial x}X^2 + \frac{\partial X}{\partial y}XY + \frac{\partial Y}{\partial x}XY + \frac{\partial Y}{\partial y}Y^2\right).$$

Rezultă

$$b(\theta) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln R = \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial X}{\partial x}(Y^2 + X^2) + \frac{\partial Y}{\partial y}(X^2 + Y^2)\right) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y},$$

deci

$$b(\theta) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln\sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Sistemul în variații normale se reduce la ecuația

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta} = b(\theta)\,v$$

și soluția ei cu $v(0) = 1$ este

$$v(\theta) = \mathrm{e}^{\int_0^\theta\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\mathrm{d}\theta - \int_0^\theta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln\sqrt{X^2+Y^2}\,\mathrm{d}\theta} = \frac{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}}{\sqrt{X^2 + Y^2}}\,\mathrm{e}^{h(\theta)}$$

unde

$$h(\theta) = \int_0^\theta\left[\frac{\partial X[\varphi(t), \psi(t)]}{\partial x} + \frac{\partial Y[\varphi(t), \psi(t)]}{\partial y}\right]\mathrm{d}t.$$

Condiția de stabilitate orbitală este dată de $h(\omega) < 0$. Dacă $h(\omega) \neq 0$, în vecinătatea soluției periodice considerate apare o soluție periodică a sistemului perturbat.

2°. Considerăm cazul cînd $X(x) = Ax$, $A$ fiind o matrice constantă care are două valori proprii pur imaginare. Vom presupune că matricea $A$ este de ordinul al treilea și că are valorile proprii $i$, $-i$, $a$. Printr-o transformare liniară cu coeficienți constanți, $A$ se poate aduce la forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vom presupune de la început că are această formă. Sistemul (13) se va scrie, în acest caz,

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t} = ax^1, \quad \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} = -x^3, \quad \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}t} = x^2$$

și admite matricea fundamentală de soluții

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{at} & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Fie

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Considerăm soluţia

$$u(t, \alpha) = \alpha(\cos t\, e_2 + \sin t\, e_3).$$

Avem

$$X[u(t, \alpha)] = \dot{u}(t, \alpha) = \alpha(-\sin t\, e_2 + \cos t\, e_3), \quad |X[u(t, \alpha)]| = |\alpha|,$$

$$\overline{X}[u(t, \alpha)] = -\sin t\, e_2 + \cos t\, e_3,$$

$$\cos\theta_1 = 0, \qquad \cos\theta_2 = -\sin t, \qquad \cos\theta_3 = \cos t,$$

$$\xi_2 = e_2 + \sin t(e_1 - \sin t\, e_2 + \cos t\, e_3) = \sin t\, e_1 + \cos^2 t\, e_2 + \sin t \cos t\, e_3,$$

$$\xi_3 = e_3 - \cos t(e_1 - \sin t\, e_2 + \cos t\, e_3) = -\cos t\, e_1 + \sin t \cos t\, e_2 + \sin^2 t\, e_3.$$

Fie

$$Z(x, \varepsilon) = Ax + \varepsilon X(x, \varepsilon).$$

Vom avea

$$\Theta(\theta, y, \varepsilon) = \frac{X^*[u(\theta)]\cdot Z[u(\theta) + S(\theta)y, \varepsilon]}{|X[u(\theta)]|^2 + X^*[u(\theta)]\dfrac{dS(\theta)}{d\theta}y} =$$

$$= \frac{X^*[u(\theta)](X[u(\theta)+S(\theta)y] + \varepsilon X[u(\theta) + S(\theta)y, \varepsilon])}{|X[u(\theta)]|^2 + X^*[u(\theta)]\dfrac{dS(\theta)}{d\theta}y}.$$

Dar

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix},$$

$$\frac{dS(\theta)}{d\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin\theta \\ -2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$X^*[u(\theta)]\frac{dS(\theta)}{d\theta} = (0 \quad -\alpha\sin\theta \quad \alpha\cos\theta)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= (\alpha\sin\theta\sin 2\theta + \alpha\cos\theta\cos 2\theta, -\alpha\sin\theta\cos 2\theta + \alpha\cos\theta\sin 2\theta) =$$

$$= (\alpha\cos\theta \quad \alpha\sin\theta) = \alpha(\cos\theta \quad \sin\theta),$$

deci numitorul în expresia lui $\Theta(\theta, y, \varepsilon)$ este $\alpha^2 + \alpha(y_2 \cos\theta + y_3 \sin\theta)$. Numărătorul este de forma

$$X^*[u(\theta)]\,(Au(\theta) + AS(\theta)y + \varepsilon X[u(\theta) + S(\theta)y, 0] + o(\varepsilon)) =$$

$$= |X[u(\theta)]|^2 + X^*[u(\theta)]AS(\theta)y + \varepsilon X^*[u(\theta)]X[u(\theta)+S(\theta)y, 0] + o(\varepsilon).$$

Avem

$$X^*[u(\theta)]A = (0 \quad -\alpha\sin\theta \quad \alpha\cos\theta)\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0 \quad \alpha\cos\theta \quad \alpha\sin\theta),$$

$$X^*[u(\theta)]AS(\theta) = (0 \quad \alpha\cos\theta \quad \alpha\sin\theta)\begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix} =$$

$$= (\alpha\cos\theta \quad \alpha\sin\theta),$$

$$X^*[u(\theta)]AS(\theta)y = \alpha(y_2\cos\theta + y_3\sin\theta).$$

Rezultă

$$\Theta(\theta, y, \varepsilon) = \frac{\alpha^2 + \alpha(y_2\cos\theta + y_3\sin\theta) + \varepsilon X^*[u(\theta)]X[u(\theta)+S(\theta)y, 0] + o(\varepsilon)}{\alpha^2 + \alpha(y_2\cos\theta + y_3\sin\theta)} =$$

$$= 1 + \varepsilon\frac{X^*[u(\theta)]X[u(\theta) + S(\theta)y, 0]}{\alpha^2 + \alpha(y_2\cos\theta + y_3\sin\theta)} + o(\varepsilon).$$

Mai departe

$$Y^\mu(\theta, y, \varepsilon) = \xi_\mu^*(\theta)Z[u(\theta) + S(\theta)y, \varepsilon] - \Theta(\theta, y, \varepsilon)\,\xi_\mu^*(\theta)\frac{dS(\theta)}{d\theta}y,$$

deci

$$\frac{Y^\mu(\theta, y, \varepsilon)}{\Theta(\theta, y, \varepsilon)} = \frac{\xi_\mu^*(\theta)[X[u(\theta)] + AS(\theta)y + \varepsilon X[u(\theta) + S(\theta), 0] + o(\varepsilon)]}{\Theta(\theta, y, \varepsilon)} -$$

$$- \xi_\mu^*(\theta)\frac{dS(\theta)}{d\theta}y = \frac{\xi_\mu^*(\theta)AS(\theta)y + \varepsilon\xi_\mu^*(\theta)X[u(\theta) + S(\theta)y, 0] + o(\varepsilon)}{\Theta(\theta, y, \varepsilon)} -$$

$$- \xi_\mu^*(\theta)\frac{dS(\theta)}{d\theta}y.$$

Avem

$$AS(\theta) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\sin\theta & -a\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta \\ \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\xi_2^*(\theta)AS(\theta) = (\sin\theta \quad \cos^2\theta \quad \sin\theta\cos\theta)\begin{pmatrix} a\sin\theta & -a\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta \\ \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= (a\sin^2\theta \quad -a\sin\theta\cos\theta),$$

$$\xi_3^*(\theta)\, AS(\theta) = (-\cos\theta \quad \sin\theta\cos\theta \quad \sin^2\theta)\begin{pmatrix} a\sin\theta & -a\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta \\ \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= (-a\sin\theta\cos\theta \quad a\cos^2\theta),$$

$$\xi_2^*(\theta)\,\frac{dS(\theta)}{d\theta} = (\sin\theta \quad \cos^2\theta \quad \sin\theta\cos\theta)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \\ \cos 2\theta & \sin 2\theta \end{pmatrix} = (0 \quad 1),$$

$$\xi_3^*(\theta)\,\frac{dS(\theta)}{d\theta} = (-\cos\theta \quad \sin\theta\cos\theta \quad \sin^2\theta)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \\ \cos 2\theta & \sin 2\theta \end{pmatrix} = (-1 \quad 0).$$

Rezultă

$$\frac{Y^2(\theta, y, \varepsilon)}{\Theta(\theta, y, \varepsilon)} = y_3 +$$

$$+ \frac{a\sin\theta(y_2\sin\theta - y_3\cos\theta) + \varepsilon\xi_2^*(\theta)X[u(\theta) + S(\theta)y, 0] + o(\varepsilon)}{1 + \varepsilon\dfrac{X^*[u(\theta)]X[u(\theta) + S(\theta)y, 0]}{\alpha^2 + \alpha(y_2\cos\theta + y_3\sin\theta)} + o(\varepsilon)}$$

$$\frac{Y^3(\theta, y, \varepsilon)}{\Theta(\theta, y, \varepsilon)} = -y_2 +$$

$$+ \frac{a\cos\theta(-y_2\sin\theta + y_3\cos\theta) + \varepsilon\xi_3^*(\theta)X[u(\theta) + S(\theta)y, 0] + o(\varepsilon)}{1 + \varepsilon\dfrac{X^*[u(\theta)]X[u(\theta) + S(\theta)y, 0]}{\alpha^2 + \alpha(y_2\cos\theta + y_3\sin\theta)}}.$$

De aici

$$\frac{Y^2(\theta, y, \varepsilon)}{\Theta(\theta, y, \varepsilon)} = y_3 + [a\sin\theta(y_2\sin\theta - y_3\cos\theta) + \varepsilon\xi_2^*(\theta)X[u(\theta) +$$

$$+ S(\theta)y, 0] + o(\varepsilon)]\left[1 - \varepsilon\frac{X^*[u(\theta)]X[u(\theta) + S(\theta)y, 0]}{\alpha^2 + \alpha(y_2\cos\theta + y_3\sin\theta)} + o(\varepsilon)\right] =$$

$$= y_3 + a\sin\theta(y_2\sin\theta - y_3\cos\theta) + \varepsilon\xi_2^*(\theta)X[u(\theta) + S(\theta)y, 0] -$$

$$- \varepsilon\frac{a\sin\theta(y_2\sin\theta - y_3\cos\theta)}{\alpha^2 + \alpha(y_2\cos\theta + y_3\sin\theta)}X^*[u(\theta)]X[u(\theta) + S(\theta)y, 0] + o(\varepsilon),$$

$$\frac{Y^2(\theta, y, \varepsilon)}{\Theta(\theta, y, \varepsilon)} = y_2\, a\sin^2\theta + y_3(1 - a\sin\theta\cos\theta) +$$

$$+ \varepsilon\left[[\xi_2^*(\theta) - \frac{a\sin\theta(y_2\sin\theta - y_3\cos\theta)}{\alpha^2 + \alpha(y_2\cos\theta + y_3\sin\theta)}X^*[u(\theta)]\right]X[u(\theta) + S(\theta)y, 0] + o(\varepsilon)$$

$$\frac{Y^3(\theta, y, \varepsilon)}{\Theta(\theta, y, \varepsilon)} = -y_2 + a\cos\theta(-y_2\sin\theta + y_3\cos\theta) + \varepsilon\xi_3^*(\theta)X[u(\theta) +$$

$$+ S(\theta)y, 0] - \varepsilon\frac{a\cos\theta(-y_2\sin\theta + y_3\cos\theta)}{\alpha^2 + \alpha(y_2\cos\theta + y_3\sin\theta)}X^*[u(\theta)]X[u(\theta) +$$

$$+ S(\theta)y, 0] + o(\varepsilon) = -y_2(1 + a\sin\theta\cos\theta) + y_3 a\cos^2\theta + \varepsilon\Big[\xi_3^*(\theta) -$$

$$- \frac{a\cos\theta(-y_2\sin\theta + y_3\cos\theta)}{\alpha^2 + \alpha(y_2\cos\theta + y_3\sin\theta)}X^*[u(\theta)]\Big]X[u(\theta) + S(\theta)y, 0] + o(\varepsilon).$$

Avem

$$\left[\xi_2^*(\theta) - \frac{a\sin\theta(y_2\sin\theta - y_3\cos\theta)}{\alpha^2 + \alpha(y_2\cos\theta + y_3\sin\theta)}X^*[u(\theta)]\right]X[u(\theta) + S(\theta)y, 0] =$$

$$= X_1[u(\theta) + S(\theta)y, 0]\sin\theta + X_2[u(\theta) + S(\theta)y, 0]\Big[\cos^2\theta +$$

$$+ \frac{a\sin\theta(y_2\sin\theta - y_3\cos\theta)}{\alpha^2 + \alpha(y_2\cos\theta + y_3\sin\theta)}\alpha\sin\theta\Big] + X_3[u(\theta) +$$

$$+ S(\theta)y, 0]\left[\sin\theta\cos\theta - \frac{a\sin\theta(y_2\sin\theta - y_3\cos\theta)}{\alpha^2 + \alpha(y_2\cos\theta + y_3\sin\theta)}\alpha\cos\theta\right] =$$

$$= X_1[u(\theta) + S(\theta)y, 0]\sin\theta + X_2[u(\theta) +$$

$$+ S(\theta)y, 0]\frac{\alpha\cos^2\theta + y_2\cos^3\theta + y_3\cos^2\theta\sin\theta + ay_2\sin^3\theta - ay_3\sin^2\theta\cos\theta}{\alpha + y_2\cos\theta + y_3\sin\theta} +$$

$$+ X_3[u(\theta) + S(\theta)y, 0]\cdot$$

$$\cdot\frac{\alpha\sin\theta\cos\theta + y_2\sin\theta\cos^2\theta + y_3\sin^2\theta\cos\theta - ay_2\sin^2\theta\cos\theta + ay_3\sin\theta\cos^2\theta}{\alpha + y_2\cos\theta + y_3\sin\theta} =$$

$$= X_1[u(\theta) + S(\theta)y, 0]\sin\theta + X_2[u(\theta) +$$

$$+ S(\theta)y, 0]\frac{\alpha\cos^2\theta + y_2(\cos^3\theta + a\sin^3\theta) + y_3\sin\theta\cos\theta(\cos\theta - a\sin\theta)}{\alpha + y_2\cos\theta + y_3\sin\theta} +$$

$$+ X_3[u(\theta) +$$

$$+ S(\theta)y, 0]\frac{\alpha\sin\theta\cos\theta + y_2\sin\theta\cos\theta(\cos\theta - a\sin\theta) + y_3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta + a\cos\theta)}{\alpha + y_2\cos\theta + y_3\sin\theta}.$$

La fel

$$\left[\xi_3^*(\theta) - \frac{a\cos\theta(-y_2\sin\theta + y_3\cos\theta)}{\alpha^2 + \alpha(y_2\cos\theta + y_3\sin\theta)}X^*[u(\theta)]\right]X[u(\theta) + S(\theta)y, 0] =$$

$$= -X_1[u(\theta)+S(\theta)y,0]\cos\theta + X_2[u(\theta)+S(\theta)y,0]\Bigg[\sin\theta\cos\theta +$$

$$+\frac{a\cos\theta(-y_2\sin\theta+y_3\cos\theta)}{\alpha^2+\alpha(y_2\cos\theta+y_3\sin\theta)}\alpha\sin\theta\Bigg] + X_3[u(\theta)+S(\theta)y,0]\Bigg[\sin^2\theta -$$

$$-\frac{a\cos\theta(-y_2\sin\theta+y_3\cos\theta)}{\alpha^2+\alpha(y_2\cos\theta+y_3\sin\theta)}\alpha\cos\theta\Bigg] = -X_1[u(\theta)+S(\theta)y,0]\cos\theta +$$

$$+X_2[u(\theta)+$$

$$+S(\theta)y,0]\frac{\alpha\sin\theta\cos\theta+y_2\sin\theta\cos\theta(\cos\theta-a\sin\theta)+y_3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+a\cos\theta)}{\alpha+y_2\cos\theta+y_3\sin\theta}+$$

$$+X_3[u(\theta)+$$

$$+S(\theta)y,0]\frac{\alpha\sin^2\theta+y_2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+a\cos\theta)+y_3(\sin^3\theta-a\cos^3\theta)}{\alpha+y_2\cos\theta+y_3\sin\theta}.$$

Rezultă

$$\frac{dy_2}{dt} = y_2 a\sin^2\theta + y_3(1-a\sin\theta\cos\theta) + \varepsilon\Bigg\{X_1[u(\theta)+S(\theta)y,0]\sin\theta +$$

$$+X_2[u(\theta)+$$

$$+S(\theta)y,0]\frac{\alpha\cos^2\theta+y_2(\cos^3\theta+a\sin^3\theta)+y_3\sin\theta\cos\theta(\cos\theta-a\sin\theta)}{\alpha+y_2\cos\theta+y_3\sin\theta}+$$

$$+X_3[u(\theta)+$$

$$S(\theta)y,0]\frac{\alpha\sin\theta\cos\theta+y_2\sin\theta\cos\theta(\cos\theta-a\sin\theta)+y_3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+a\cos\theta)}{\alpha+y_2\cos\theta+y_3\sin\theta}\Bigg\} + o($$

$$\frac{dy_3}{dt} = -y_2(1+a\sin\theta\cos\theta) + y_3 a\cos^2\theta + \varepsilon\Bigg\{-X_1[u(\theta)+$$

$$+S(\theta)y,0]\cos\theta + X_2[u(\theta)+$$

$$+S(\theta)y,0]\frac{\alpha\sin\theta\cos\theta+y_2\sin\theta\cos\theta(\cos\theta-a\sin\theta)+y_3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+a\cos\theta)}{\alpha+y_2\cos\theta+y_3\sin\theta}+$$

$$+X_3[u(\theta)+$$

$$+S(\theta)y,0]\frac{\alpha\sin^2\theta+y_2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+a\cos\theta)+y_3(\sin^3\theta-a\cos^3\theta)}{\alpha+y_2\cos\theta+y_3\sin\theta}\Bigg\} + o(\varepsilon).$$

Am obținut astfel forma explicită a sistemului (19). Sistemul (18) este în acest caz

$$\frac{dy_2}{d\theta} = y_2 a\sin^2\theta + y_3(1-a\sin\theta\cos\theta),$$

$$\frac{dy_3}{d\theta} = -y_2(1+a\sin\theta\cos\theta) + y_3 a\cos^2\theta.$$

Pentru a obţine o matrice fundamentală de soluţii a acestui sistem să observăm că el coincide cu sistemul în variaţii normale, deci soluţiile lui vor fi componentele normale ale soluţiilor sistemului în variaţii, care în acest caz este $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax$. Descompunem deci soluţiile acestui sistem după vectorii $(\overline{X}, \xi_2, \xi_3)$. Avem

$$e^{a\theta} e_1 = p_1^1 \overline{X} + p_1^2 \xi_2 + p_1^3 \xi_3,$$

$$\cos\theta\, e_2 + \sin\theta\, e_3 = p_2^1 \overline{X} + p_2^2 \xi_2 + p_2^3 \xi_3,$$

$$-\sin\theta\, e_2 + \cos\theta\, e_3 = p_3^1 \overline{X} + p_3^2 \xi_2 + p_3^3 \xi_3.$$

Din ultima relaţie obţinem

$$-\sin\theta = -p_3^1 \sin\theta + p_3^2 \cos^2\theta + p_3^3 \sin\theta\cos\theta,$$

$$\cos\theta = p_3^1 \cos\theta + p_3^2 \sin\theta\cos\theta + p_3^3 \sin^2\theta,$$

$$0 = p_3^2 \sin\theta - p_3^3 \cos\theta.$$

Rezultă

$$p_3^1 = \frac{\begin{vmatrix} -\sin\theta & \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{vmatrix}} = 1, \; p_3^2 = 0, \; p_3^3 = 0.$$

Celelalte relaţii dau

$$\mathrm{e}^{a\theta} = p_1^2 \sin\theta - p_1^3 \cos\theta,$$
$$0 = -p_1^1 \sin\theta + p_1^2 \cos^2\theta + p_1^3 \sin\theta\cos\theta$$
$$0 = p_1^1 \cos\theta + p_1^2 \sin\theta\cos\theta + p_1^3 \sin^2\theta$$
$$\cos\theta = -p_2^1 \sin\theta + p_2^2 \cos^2\theta + p_2^3 \sin\theta\cos\theta,$$
$$\sin\theta = p_2^1 \cos\theta + p_2^2 \sin\theta\cos\theta + p_2^3 \sin^2\theta.$$
$$0 = p_2^2 \sin\theta - p_2^3 \cos\theta,$$

Aceste două sisteme au acelaşi determinant (acelaşi cu determinantul sistemului precedent); coloanele acestui determinant sînt componentele vectorilor $\overline{X}$, $\xi_2$, $\xi_3$ în baza $e_1$, $e_2$, $e_3$ şi cum aceşti vectori formează un sistem ortogonal şi normat, determinantul este egal cu 1. Rezultă

$$p_1^2 = \mathrm{e}^{a\theta}\sin\theta, \; p_1^3 = -\mathrm{e}^{a\theta}\cos\theta, \; p_2^2 = \cos\theta, \; p_2^3 = \sin\theta,$$

deci sistemul (18) admite matricea fundamentală de soluţii

$$G(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{e}^{a\theta}\sin\theta \\ \sin\theta & \mathrm{e}^{a\theta}\cos\theta \end{pmatrix}$$

şi deci familia de soluţii periodice de perioadă $2\pi$,

$$y_2 = \beta \cos \theta, \quad y_3 = \beta \sin \theta.$$

Sistemul adjunct are ca matrice fundamentală pe

$$G^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -e^{-a\theta} \sin \theta & e^{-a\theta} \cos \theta \end{pmatrix}$$

şi soluţia periodică de aceeaşi formă.

Vom aplica teorema 3.8 la sistemul (19). Avem de calculat pe $P(\gamma)$. Avem

$$S(\theta) y = \begin{pmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \cos \theta \\ \\ \beta \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \cos \theta \\ \beta \sin \theta \end{pmatrix},$$

$$u(\theta) + S(\theta) y = (\alpha + \beta) \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix},$$

$$y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta = \beta,$$

$$y_2 \sin \theta \cos \theta (\cos \theta - a \sin \theta) + y_3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + a \cos \theta) =$$
$$= \beta \sin \theta \cos^2 \theta (\cos \theta - a \sin \theta) + \beta \sin^2 \theta \cos \theta (\sin \theta + a \cos \theta) =$$
$$= \beta \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - a \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta + a \sin \theta \cos \theta) = \beta \sin \theta \cos \theta,$$

$$y_2 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + a \cos \theta) + y_3 (\sin^3 \theta - a \cos^3 \theta) =$$
$$= \beta \sin \theta \cos^2 \theta (\sin \theta + a \cos \theta) + \beta \sin \theta (\sin^3 \theta - a \cos^3 \theta) =$$
$$= \beta (\sin^2 \theta \cos^2 \theta + a \sin \theta \cos^3 \theta + \sin^4 \theta - a \sin \theta \cos^3 \theta) = \beta \sin^2 \theta,$$

$$y_2 (\cos^3 \theta + a \sin^3 \theta) + y_3 \sin \theta \cos \theta (\cos \theta - a \sin \theta) =$$
$$= \beta \cos \theta (\cos^3 \theta + a \sin^3 \theta) + \beta \sin^2 \theta \cos \theta (\cos \theta - a \sin \theta) =$$
$$= \beta (\cos^4 \theta + a \cos \theta \sin^3 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta - a \sin^3 \theta \cos \theta) = \beta \cos^2 \theta,$$

$$y_2 \sin \theta \cos \theta (\cos \theta - a \sin \theta) + y_3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + a \cos \theta) =$$
$$= \beta \sin \theta \cos^2 \theta (\cos \theta - a \sin \theta) + \beta \sin^2 \theta \cos \theta (\sin \theta + a \cos \theta) =$$
$$= \beta \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - a \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta + a \sin \theta \cos \theta) = \beta \sin \theta \cos \theta.$$

Rezultă că în sistemul (19) termenii în $\varepsilon$, scrişi pentru soluţia generatoare $y_2 = \beta \cos \theta$, $y_3 = \beta \sin \theta$, devin

$$X_1(0, \gamma \cos \theta, \gamma \sin \theta, 0) \sin \theta + X_2(0, \gamma \cos \theta, \gamma \sin \theta, 0) \cos^2 \theta +$$
$$+ X_3(0, \gamma \cos \theta, \gamma \sin \theta, 0) \sin \theta \cos \theta - X_1(0, \gamma \cos \theta, \gamma \sin \theta, 0) \cos \theta +$$
$$+ X_2(0, \gamma \cos \theta, \gamma \sin \theta, 0) \sin \theta \cos \theta + X_3(0, \gamma \cos \theta, \gamma \sin \theta, 0) \sin^2 \theta.$$

Rezultă

$$P(\gamma) \equiv \int_0^{2\pi} \{(X_1 \sin\theta + X_2 \cos^2\theta + X_3 \sin\theta\cos\theta)\cos\theta + (-X_1\cos\theta +$$

$$+ X_2 \sin\theta\cos\theta + X_3 \sin^2\theta)\sin\theta\}\, d\theta \equiv$$

$$\equiv \int_0^{2\pi} \{X_2[0,\ \gamma\cos\theta,\ \gamma\sin\theta,\ 0]\cos\theta + X_3[0,\ \gamma\cos\theta,\ \gamma\sin\theta,\ 0]\sin\theta\}\, d\theta.$$

Cu aceasta, teorema 3.8 permite rezolvarea completă a problemei. Aplicaţia considerată putea fi tratată mai simplu *), dar am ţinut să dăm un exemplu de calcul efectiv pe baza metodei prezentată teoretic.

## § 9. SOLUŢII PERIODICE DE SPEŢA A DOUA

În studiul unor sisteme electromecanice, de exemplu al motoarelor sincrone, al generatorului de curent alternativ, care lucrează în reţeaua comună în paralel cu alte maşini etc. după unele ipoteze simplificatoare se ajunge la aceeaşi problemă matematică, care apare în studiul pendulului cu frecare liniară, aflat sub acţiunea unui moment constant. Ecuaţia de mişcare are forma

$$I\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + b\frac{d\vartheta}{dt} + mg\,a\sin\vartheta = M_0$$

şi intră în tipul general $\left(\text{dacă notăm } \frac{d\vartheta}{dt} = z\right)$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \Phi(\vartheta, z), \qquad \frac{dz}{dt} = F(\vartheta, z),$$

unde funcţiile $\Phi$ şi $F$ sînt periodice în raport cu $\vartheta$ cu perioada $2\pi$.

În studiul acestor sisteme un rol însemnat îl joacă soluţiile de forma

$$z(t) = \varphi(t), \quad \vartheta(t) = \omega t + \psi(t),$$

unde $\varphi$, $\psi$ sînt periodice cu perioada $T = \frac{2N\pi}{\omega}$.

Într-adevăr, să observăm că

$$z(t+T) = z(t), \quad \vartheta(t+T) = \omega\left(t + \frac{2N\pi}{\omega}\right) + \psi(t+T) = \vartheta(t) + 2N\pi.$$

Datorită caracterului unghiular al variabilei $\vartheta$, starea sistemului nu se schimbă atunci cînd $\vartheta$ se înlocuieşte cu $\vartheta + 2N\pi$, deci putem considera

*) O tratare a unor sisteme generale conţinînd pe cel de mai sus drept caz particular există într-o lucrare a lui E. A. Coddington şi N. Levinson.

că $z(t+T)$, $\vartheta(t+T)$ corespund aceleiaşi stări a sistemului ca şi $z(t)$, $\vartheta(t)$. Aceasta justifică faptul că soluţiile de forma considerată sînt asimilate cu soluţiile periodice ale sistemului şi se numesc *soluţii periodice de speţa a doua*.

Semnificaţia geometrică a acestor fapte este următoarea:

Punînd în corespondenţă biunivocă stările sistemului cu punctele unui spaţiu al fazelor, se vede că pentru sistemele considerate, din cauza periodicităţii în raport cu $\vartheta$, spaţiul fazelor corespunzător este un cilindru. Soluţiile periodice de speţa a doua corespund unor curbe închise situate pe acest cilindru, care înconjoară cilindrul; curbele sînt închise deoarece cînd $t$ variază cu $T$, punctul $(\vartheta(t), z(t))$ se întoarce în acelaşi punct de pe cilindru şi înconjoară cilindrul deoarece cînd $t$ variază cu T, $\vartheta$ variază cu un multiplu de $2\pi$.

În cele ce urmează vom considera sisteme de formă generală, care conţin drept cazuri particulare pe cele de mai sus şi vom pune în evidenţă o teoremă de stabilitate a soluţiilor periodice de speţa a doua, analogă cu teorema lui Andronov-Witt, precum şi o teorie a sistemelor cu parametru mic.

Considerăm un sistem autonom de forma

$$\dot{x} = f(x)$$

unde $f(x + 2\pi p) = f(x)$, $p$ fiind un vector cu unele componente egale cu 1 şi cu celelalte componente nule.

Aceasta înseamnă că $f$ este periodică de perioadă $2\pi$ în raport cu o parte a componentelor vectorului $x$.

Presupunem că sistemul admite o soluţie periodică de speţa a doua

$$u(t) = \omega t p + \psi(t),$$

unde $\psi$ este periodică de perioadă $T = \dfrac{2\pi N}{\omega}$; aceasta înseamnă că

$$u(t+T) = \left(t + \frac{2\pi N}{\omega}\right)p + \psi(t+T) = u(t) + 2\pi N p,$$

deci acele componente ale lui $u$ în raport cu care $f$ este periodică variază cu un multiplu de $2\pi$, iar celelalte rămîn neschimbate. Rezultă de aici că $f[u(t)]$ este periodică în $t$ cu perioadă $T$:

$$f[u(t+T)] = f[u(t) + 2\pi N p] = f[u(t)].$$

Cu ajutorul formulelor lui M. Urabe formăm sistemul ortogonal normat legat de curba $u(t)$; fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ vectorii acestui sistem, unde am notat $\xi_1 = \dfrac{f[u(t)]}{|f[u(t)]|}$.

Ţinînd seama de modul în care a fost efectuată construcţia, toţi vectorii $\xi_k$ rezultă periodici de perioadă $T$.

Ca şi în studiul soluţiilor periodice ale sistemelor autonome facem schimbarea de variabile $x = u(\theta) + S(\theta)y$ şi obţinem un sistem de forma

$$\frac{dy}{dt} = Y(\theta, y), \quad \frac{d\theta}{dt} = \Theta(\theta, y),$$

unde

$$\Theta = \frac{(f[u(\theta) + S(\theta)y],\ f[u(\theta)])}{|f[u(\theta)]|^2 + \sum_{\nu=2}^{n}\left(f[u(\theta)], \frac{d\xi_\nu}{d\theta}\right)y^\nu},$$

$$Y_\mu = (\xi_\mu, f[u(\theta) + S(\theta)y]) - \sum_{\nu=2}^{n}\left(\xi_\nu, \frac{d\xi_\nu}{d\theta}y^\nu\right)\Theta.$$

Din aceste formule se vede că $Y$ şi $\Theta$ sînt periodice în $\theta$ cu perioadă $T$, deci sistemul în variaţii normale este un sistem liniar cu coeficienţi periodici de perioadă $T$.

Sistemul în variaţii corespunzător soluţiei $u(t)$ are matricea $A(t) = f'_x[u(t)]$ şi deoarece $f'_x$ are aceleaşi proprietăţi de periodicitate parţială ca şi $f$, rezultă că şi $A(t)$ este periodică în $t$ cu perioadă $T$. Sistemul în variaţii

$$\frac{dv}{dt} = A(t)v$$

admite soluţia

$$v = \frac{du}{dt} = \omega p + \frac{d\psi}{dt}$$

periodică în $t$ cu perioadă $T$, deci admite în orice caz un multiplicator egal cu 1. Repetînd calculele efectuate în cazul cînd $u(t)$ era periodică, deducem că ceilalţi multiplicatori ai sistemului în variaţii coincid cu multiplicatorii sistemului în variaţii normale.

Deducem astfel

TEOREMA 3.14′. *Dacă $n-1$ multiplicatori ai sistemului în variaţii corespunzător soluţiei periodice de speţa a doua $u(t)$ se află în interiorul cercului unitate, această soluţie este orbital stabilă; aceasta înseamnă că dacă $x(t_0)$ este suficient de aproape de curba $x = u(t)$, atunci există $c$ astfel încît*

$$\lim_{t\to\infty}[x(t) - u(t + c)] = 0.$$

Această teoremă a fost stabilită de O. Vejvoda.

Să considerăm acum un sistem de parametru mic de forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \varepsilon), \quad f(x + 2\pi p, \varepsilon) = f(x, \varepsilon),$$

şi să presupunem că pentru $\varepsilon = 0$ sistemul admite o soluţie periodică

de speţa a doua $u(t)$. Considerînd din nou sistemul de vectori $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ legat de această soluţie şi efectuînd schimbarea de variabile

$$x = u(\theta) + S(\theta) y$$

se obţine un sistem de forma

$$\frac{dy}{dt} = Y(\theta, y, \varepsilon), \quad \frac{d\theta}{dt} = \Theta(\theta, y, \varepsilon).$$

Ca în cazul cînd $u$ este periodică se trece la sistemul

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{Y(\theta, y, \varepsilon)}{\Theta(\theta, y, \varepsilon)} = B(\theta) y + \varepsilon\eta(\theta) + o(|y| + |\varepsilon|)$$

şi cu metodele obişnuite se vede că dacă sistemul în variaţii corespunzător soluţiei $u(t)$ are $n-1$ multiplicatori diferiţi de 1, există o soluţie $y(\theta, \varepsilon)$ periodică în $\theta$ cu perioadă $T$ cu

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(\theta, \varepsilon) = 0.$$

Acestei soluţii îi corespunde o soluţie a sistemului iniţial, de forma

$$x(t, \varepsilon) = u[\theta(t, \varepsilon)] + S[\theta(t, \varepsilon)]\, y[\theta(t, \varepsilon), \varepsilon].$$

Din

$$\frac{d\theta}{dt} = \Theta(\theta, y, \varepsilon) = 1 + O(|\varepsilon| + |y|)$$

rezultă

$$t(T) - t(0) = \int_0^T \frac{dt}{d\theta} d\theta = \int_0^T \{1 + O(|\varepsilon| + |y|) d\theta = T + \varepsilon\widetilde{T}(\varepsilon)\}$$

căci $y(\theta, \varepsilon) = O(\varepsilon)$.

Deducem de aici că dacă $t$ variază cu $T + \varepsilon\widetilde{T}(\varepsilon)$, $\theta$ variază cu $T$ şi deci

$$x[t + T + \varepsilon\widetilde{T}(\varepsilon), \varepsilon] = u[\theta(t, \varepsilon) + T] + S[\theta(t, \varepsilon) + T]\, y[\theta(t, \varepsilon) + T, \varepsilon] =$$

$$= u[\theta(t, \varepsilon)] + 2\pi N p + S[\theta(t, \varepsilon)]\, y[\theta(t, \varepsilon), \varepsilon] = x[\theta(t, \varepsilon)] + 2\pi N p.$$

Din faptul că soluţia $x(t, \varepsilon)$ obţinută verifică relaţia

$$x(t + T^*(\varepsilon), \varepsilon) = x(t, \varepsilon) + 2\pi N p$$

rezultă că

$$x(t, \varepsilon) = \frac{2\pi N}{T^*(\varepsilon)} p t + \psi(t, \varepsilon)$$

cu

$$\psi(t + T^*(\varepsilon), \varepsilon) = \psi(t, \varepsilon).$$

Pentru aceasta este suficient să verificăm că diferenţa

$$x(t, \varepsilon) - \frac{2\pi N}{T^*(\varepsilon)} p t \text{ este periodică, cu perioadă } T^*(\varepsilon).$$

Avem

$$x(t+T^*,\varepsilon)-\frac{2\pi N}{T^*(\varepsilon)}p(t+T^*)=x(t,\varepsilon)+2\pi Np-\frac{2\pi N}{T^*}p\varepsilon-2\pi Np=$$
$$=x(t,\varepsilon)-\frac{2\pi N}{T^*}pt$$

şi proprietatea e demonstrată. Am obţinut astfel

TEOREMA 3.15′. *Dacă pentru* $\varepsilon=0$ *sistemul* $\dot{x}=f(x,\varepsilon)$ *admite o soluţie periodică de speţa a doua* $u(t)$ *astfel încît sistemul în variaţii corespunzător are un singur multiplicator egal cu 1, atunci pentru* $|\varepsilon|$ *suficient de mic sistemul admite o soluţie periodică de speţa a doua unică* $x(t,\varepsilon)$, *cu proprietatea*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x(t,\varepsilon)=u(t).$$

*Dacă în plus nici unul din multiplicatori, cu excepţia celui egal cu 1, nu este rădăcină a unităţii, sistemul nu admite în vecinătatea curbei* $x=u(t)$ *alte soluţii care să fie curbe închise în spaţiul fazelor, afară de* $x(t,\varepsilon)$. *Dacă multiplicatorii diferiţi de 1 se alfă în interiorul cercului unitate, soluţia periodică de speţa a doua* $x(t,\varepsilon)$ *este orbital stabilă.*

În acelaşi fel se studiază mai departe şi cazurile cînd sistemul în variaţii are mai mulţi multiplicatori egali cu 1, de exemplu cazurile cînd există o familie de soluţii periodice de speţa a doua. Totul revine la studiul soluţiilor periodice ale sistemului

$$\frac{dy}{d\theta}=B(\theta)y+\varepsilon\eta(\theta)+o(|y|+|\varepsilon|)$$

care se efectuează cu metodele obişnuite.

## § 10. O METODĂ DE APROXIMAŢII SUCCESIVE

9. În cele ce urmează vom prezenta o metodă de studiu a unor cazuri dificile din teoria sistemelor neliniare cu parametru mic, elaborată de L. Cesari şi reprezentînd sinteza unui întreg ciclu de lucrări ale lui L. Cesari şi ale elevilor şi colaboratorilor săi. Se consideră un sistem de ecuaţii diferenţiale de forma

$$\frac{dy}{dt}=A(\varepsilon)y+\varepsilon q(y,t,\varepsilon) \qquad (20)$$

şi se presupun îndeplinite condiţiile :

α) Există numerele $\omega>0$, $\delta>0$, $\varepsilon_0>0$ şi întregii $0\leqslant\nu\leqslant n$, $a_j$, $b_j$, cu $b_j>0$, $j=1,\dots\nu$, astfel încît cele $n$ valori proprii $\rho_j(\varepsilon)$ ale matricii $A$ sînt funcţii continue de $\varepsilon$ pentru $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ şi verifică relaţiile

$$\rho_j(0)=i\frac{a_j}{b_j}\omega, \qquad (j=1.\dots,\nu)$$

$$\left|\rho_j(0) - \frac{i m \omega}{b_0}\right| > \delta > 0 \text{ pentru } j = \nu + 1, \ldots, n, \quad m = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots$$

$b_0$ fiind un multiplu comun al numerelor $b_1, \ldots, b_\nu$.

În plus, se va presupune că $A(\varepsilon)$ este o matrice diagonală.

(K). Există $R > 0$ și o funcție $\psi(t) > 0$ integrabilă în orice interval finit, astfel ca $|y_l| \leqslant R, \ -\infty < t < \infty$ să implice

$$|q_j(y, t, \varepsilon)| \leqslant \psi_j(t), \qquad j = 1, \ldots, n$$

și pentru $\zeta > 0$ există $\xi > 0$ astfel încît $|y_l'|, |y_l''| \leqslant R, \ 0 \leqslant \varepsilon' \leqslant \varepsilon'' \leqslant \varepsilon_0$, $|y_l' - y_l''| \leqslant \xi, \ |\varepsilon' - \varepsilon''| \leqslant \xi$ să implice

$$|q_j(y', t, \varepsilon') - q_j(y'', t, \varepsilon'')| \leqslant \zeta \psi(t).$$

În plus, $q(t, y, \varepsilon)$ este periodică în $t$ de perioadă $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

(L). $|q_j(y', t, \varepsilon) - q_j(y'', t, \varepsilon)| \leqslant \psi(t) \sum\limits_{l=1}^{n} |y_l' - y_l''|, \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$

Rezultatele obținute se vor aplica la sistemele de forma

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 u_j}{dt^2} + 2\alpha_j \frac{du_j}{dt} + \sigma_j^2 u_j = \varepsilon f_j\left(u, v, \frac{du}{dt}, t, \varepsilon\right), \qquad (j = 1, \ldots, \mu) \\ &\frac{dv_j}{dt} + \beta_j v_j = \varepsilon f_j\left(u, v, \frac{du}{dt}, t, \varepsilon\right), \qquad (j = \mu + 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{21}$$

Presupunem $\alpha_j^2 < \sigma_j^2, \ j = 1, 2, \ldots, \mu$; punem $\gamma_j = \sqrt{\sigma_j^2 - \alpha_j^2}$ și $\rho_{j1}(\varepsilon) = -\alpha_j + i\gamma_j, \quad \rho_{j2}(\varepsilon) = -\alpha_j - i\gamma_j$.

Ordonăm primele $\mu$ ecuații astfel ca pentru un $\omega > 0$ să avem

$$\alpha_j(0) = 0, \quad \sigma_j(0) = \frac{a_j}{b_j}\omega, \quad a_j > 0, \quad b_j > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \lambda$$

și

$$\rho_{j1}(0) \neq \frac{i m \omega}{b_0}, \ \rho_{j2}(0) \neq \frac{i m \omega}{b_0}, \ j = \lambda + 1, \ldots, \mu, \quad m = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots$$

Ultimele $n - \mu$ ecuații vor fi ordonate astfel încît $\beta_j(0) \neq 0$ pentru $j = \mu + 1, \ldots, r$ și $\beta_j(0) = 0$ pentru $j = r + 1, \ldots, n$, $\mu \leqslant r \leqslant n$. Să presupunem că funcțiile $f_j$ verifică condițiile (K) și (L) în raport cu variabilele $\left(u, v \dfrac{du}{dt}\right)$.

Introducem noile variabile $y_1, \ldots, y_N$, $N = n + \mu$ punînd

$$y_{2j-1} = -\rho_{j2} u_j + \frac{du_j}{dt}, \qquad (j = 1, \ldots, \mu)$$

$$y_{2j} = \rho_{j1} u_j - \frac{du_j}{dt}, \qquad (j = 1, \ldots, \mu)$$

$$y_{\mu+j} = v_j, \qquad (j = \mu + 1, \ldots, n).$$

Rezultă

$$u_j = \frac{1}{2i\gamma_j}(y_{2j-1} + y_{2j}), \quad \frac{du_j}{dt} = \frac{1}{2i\gamma_j}(\rho_{j1} y_{2j-1} + \rho_{j2} y_{2j}), \qquad (j = 1, \ldots, \mu)$$

$$\frac{dy_{2j-1}}{dt} = -\rho_{j2}\frac{du_j}{dt} + \frac{d^2u_j}{dt^2} = -\rho_{j2}\frac{du_j}{dt} - 2\alpha_j\frac{du_j}{dt} - \sigma_j^2 u_j + \varepsilon q_{2j-1}(y, t, \varepsilon) =$$

$$= \rho_{j1}\frac{du_j}{dt} - \sigma_j^2 u_j + \varepsilon q_{2j-1}(y, t, \varepsilon) = \rho_{j1} y_{2j-1} + (\rho_{j2}\rho_{j1} - \sigma_j^2) u_j + \varepsilon q_{2j-1}$$

deci

$$\frac{dy_{2j-1}}{dt} = \rho_{j1} y_{2j-1} + \varepsilon q_{2j-1}(y, t, \varepsilon).$$

Mai departe,

$$\frac{dy_{2j}}{dt} = \rho_{j1}\frac{du_j}{dt} - \frac{d^2u_j}{dt^2} = \rho_{j1}\frac{du_j}{dt} + 2\alpha_j\frac{du_j}{dt} + \sigma_j^2 u_j - \varepsilon f_j =$$

$$= -\rho_{j2}\frac{du_j}{dt} + \sigma_j^2 u_j + \varepsilon q_{2j} = \rho_{j2}(y_{2j} - \rho_{j1} u_j) + \sigma_j^2 u_j + \varepsilon q_{2j} =$$

$$= \rho_{j2} y_{2j} + \varepsilon q_{2j}(y, t, \varepsilon),$$

$$\frac{dy_{\mu+j}}{dt} = -\beta_j y_{\mu+j} + \varepsilon q_{\mu+j}.$$

Sistemul (21) apare astfel transformat într-un sistem de forma (20). Primelor $\nu$ ecuaţii din sistemul (20) le corespund primele $2\lambda$ şi ultimele $n-r$ ecuaţii ale sistemului transformat. Numerele $\rho_j(0)$, $j = 1, \ldots, \nu$, sînt aici $i\tau_1, -i\tau_1, \ldots, i\tau_\lambda, -i\tau_\lambda, 0, \ldots, 0$, unde 0 este repetat de $n - r$ ori, iar $\tau_j = \frac{a_j}{b_j}\omega$.

Să observăm că pentru $\varepsilon = 0$, sistemul (20) admite familia de soluţii depinzînd de $\nu$ parametri

$$y_j = c_j e^{\rho_j(0)t}, \; j = 1, \ldots \nu, \quad y_j = 0, \quad j = \nu + 1, \ldots, n.$$

Dar

$$e^{\rho_j(0)t} = e^{i\frac{a_j}{b_j}\omega t}$$

este o funcţie periodică de $t$ cu perioada $\frac{2\pi b_j}{\omega}$, deci soluţiile considerate sînt funcţii periodice de $t$ cu perioada $\frac{2\pi b_0}{\omega}$, $b_0$ fiind, ca mai sus, cel mai mic multiplu comun al numerelor $b_j$, $j = 1, \ldots, \nu$.

Sîntem astfel în condiţiile din teorema 3.8. Condiţiile de existenţă a unei soluţii periodice de perioadă $\frac{2\pi b_0}{\omega}$ se pot obţine cu ajutorul acestei teoreme generale. Această problemă o vom studia însă independent de teorema 3.8, cu ajutorul metodei lui L. Cesari, metodă care este susceptibilă de aplicaţii şi în alte cazuri. De asemenea, această metodă furnizează şi un procedeu de calcul aproximativ, prin aproximaţii succesive, al soluţiei periodice.

Vom începe cu unele noţiuni pregătitoare. Se consideră familia $C_\omega$ a funcţiilor $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, care sînt sume finite de funcţii de forma $e^{\sigma t}\varphi(t)$, $\sigma$ fiind un număr complex, iar $\varphi$ o funcţie cu valori complexe, periodică în $t$ cu perioadă $T = \frac{2\pi}{\omega}$ integrabilă în $[0, T]$. Evident, $C_\omega$ este o clasă aditivă. Dacă $\varphi$ are seria Fourier

$$\varphi(t) \sim \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{im\omega t},$$

atunci seria

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{(im\omega+\sigma)t}$$

se numeşte seria asociată funcţiei $f$.

Valoarea medie $\mathfrak{M}[f]$ se defineşte prin $\mathfrak{M}[f] = c_m$ dacă $im\omega + \sigma = 0$ şi $\mathfrak{M}[f] = 0$ dacă nu există $m$ cu $im\omega + \sigma = 0$. Pentru orice $f \in C_\omega$, $\mathfrak{M}[f]$ este definită şi reprezintă o funcţională liniară pe $C_\omega$. Pentru funcţii vectoriale, $\mathfrak{M}[f]$ este vectorul cu componentele $\mathfrak{M}[f_i]$.

*Dacă $f \in C_\omega$, o primitivă $F$ a lui $f$ aparţine lui $C_\omega$ dacă şi numai dacă $\mathfrak{M}[f] = 0$; dacă $\mathfrak{M}[f] = 0$, există o primitivă $F$ unică aparţinînd lui $C_\omega$ şi astfel ca $\mathfrak{M}[F] = 0$. Această primitivă va fi notată $\int f(t)\mathrm{d}t$.*

Dacă $f = e^{(\alpha+i\beta)t}\varphi$ şi $\mathfrak{M}[f] = 0$, $\varphi \sim c_m e^{im\omega t}$, atunci

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = e^{(\alpha+i\beta)t}\Phi, \quad \Phi = \sum \frac{c_m}{\alpha + i\beta + im\omega} e^{im\omega t}.$$

Pentru orice constantă $V \geqslant T$, există $N(\sigma, T, V)$ astfel ca

$$|F(t)| \leqslant N \int_0^T |\varphi(u)|\,\mathrm{d}u, \quad 0 \leqslant t \leqslant V.$$

Pentru $\sigma \not\equiv 0 \pmod{\omega i}$,

$$F(t) = \frac{1}{e^{\sigma T} - 1} \int_t^{t+T} f(u)\, du,$$

iar pentru $\sigma \equiv 0 \pmod{\omega i}$, $F(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} uf(u)\, du$.

Dacă $\sigma + im\omega \neq 0$ pentru $m = 0, \pm 1, \ldots$, şi $0 < \delta \leqslant \min |\sigma + im\omega|$, $0 < \delta \leqslant \omega$, fie $\sigma'$ astfel ca $|\sigma - \sigma'| \leqslant \frac{\delta}{2}$, $f = e^{\sigma t}\varphi$, $f' = e^{\sigma' t}\varphi$, $V \geqslant T$. Atunci primitivele unice $F$, $F'$ cu valoare medie nulă verifică relaţia

$$|F(t) - F'(t)| \leqslant |\sigma - \sigma'| N' \int_0^T |\varphi(u)|\, du, \quad 0 \leqslant t \leqslant V.$$

Într-adevăr, avem

$$F(t) = \frac{1}{e^{\sigma T} - 1} \int_t^{t+T} e^{\sigma u} \varphi(u)\, du, \quad F'(t) = \frac{1}{e^{\sigma' T} - 1} \int_t^{t+T} e^{\sigma' u} \varphi(u)\, du,$$

deci

$$F(t) - F'(t) = \int_t^{t+T} \left[ \frac{e^{\sigma u}}{e^{\sigma T} - 1} - \frac{e^{\sigma' u}}{e^{\sigma' T} - 1} \right] \varphi(u)\, du =$$

$$= \frac{1}{(e^{\sigma T} - 1)(e^{\sigma' T} - 1)} \int_t^{t+T} (e^{\sigma u} e^{\sigma' T} - e^{\sigma' u} e^{\sigma T} - e^{\sigma u} + e^{\sigma' u}) \varphi(u)\, du =$$

$$= \frac{1}{(e^{\sigma T} - 1)(e^{\sigma' T} - 1)} \int_t^{t+T} \{ e^{\sigma' T} [1 - e^{(\sigma' - \sigma)(u - T)}] + (e^{(\sigma' - \sigma) u} - 1) \} e^{\sigma u} \varphi(u)\, du,$$

de unde rezultă imediat evaluarea scrisă mai sus.

LEMĂ. *Dacă $A$ este o matrice constantă cu valorile proprii $\rho_1, \ldots, \rho_n$, şi $f$ e un vector periodic cu perioadă $T = \frac{2\pi}{\omega}$ şi dacă există $\delta > 0$ astfel ca $|\rho_j + im\omega| \geqslant \delta > 0$ pentru orice $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, atunci sistemul*

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f$$

*are o soluţie periodică unică, de perioadă $T$ şi această soluţie verifică evaluarea*

$$|y_j(t)| \leqslant N \sum_{k=1}^{n} \int_0^T |f_k(t)|\, dt.$$

*Demonstraţie.* Se poate presupune că $A$ este triunghiulară, căci există totdeauna o transformare liniară care o aduce la această formă. Ultima ecuaţie a sistemului are atunci forma

$$y_n' = \rho_n y_n + f_n(t)$$

şi admite soluţia periodică unică

$$y_n(t) = e^{\rho_n t} \int e^{-\rho_n u} f_n(u)\, du;$$

avem

$$|y_n(t)| \leqslant MN \int_0^T |f_n(t)|\, dt.$$

Penultima ecuaţie are forma

$$y'_{n-1} = \rho_{n-1} y_{n-1} + a_{n-1,n} y_n(t) + f_{n-1}(t)$$

şi admite soluţia periodică unică dată de formula

$$y_{n-1}(t) = e^{\rho_{n-1} t} \int e^{-\rho_{n-1} u} [a_{n-1,n} y_n(u) + f_{n-1}(u)]\, du.$$

Procedeul se repetă şi lema rezultă demonstrată.

Fiind date numerele $c_j$, $j = 1, \ldots, \nu$, se consideră mulţimea $\Omega$ a funcţiilor vectoriale continue, periodice de perioada $T = \dfrac{2\pi b_0}{\omega}$ ale căror prime $\nu$ componente au forma

$$\varphi_j(t) = e^{i\tau_j t} [c_j + \varphi_j^*(t)], \quad \mathfrak{M}[\varphi_j^*] = 0.$$

Se consideră transformarea definită de relaţiile

$$\psi_j(t) = c_j e^{i\tau_j t} + \varepsilon e^{i\tau_j t} \int e^{-i\tau_j u} \{q_j[\varphi(u), u, \varepsilon] - d_j \varphi_j(u)\}\, du, \quad (j = 1, \ldots, \nu)$$

$$\psi_j(t) = \varepsilon e^{\rho_j t} \int e^{-\rho_j u} q_j[\varphi(u), u, \varepsilon]\, du, \qquad (j = \nu + 1, \ldots, n),$$

unde numerele $d_j$ sînt definite de relaţiile

$$c_j d_j = \mathfrak{M}[e^{-i\tau_j u} q_j(\varphi(u), u, \varepsilon)], \qquad (j = 1, \ldots, \nu)$$

Observăm că $e^{-\rho_j u} q_j[\varphi(u), u, \varepsilon]$, $j = \nu + 1, \ldots, n$, sînt de clasă $C_{\omega'}$, cu $\left| -\rho_j + \dfrac{im\omega}{b_0} \right| > \delta > 0$, $\omega' = \dfrac{\omega}{b_0}$ şi deci au valoare medie nulă.

Se vede imediat că funcţiile $\psi_j$ sînt continue, periodice de perioadă $T$. Ţinînd seama de relaţiile care definesc pe $d_j$ şi de faptul că $\mathfrak{M}[e^{-i\tau_j t} \varphi_j] = c_j$, $j = 1, \ldots, \nu$, se vede că

$$\mathfrak{M}[e^{-i\tau_j u} \{q_j[\varphi(u), u, \varepsilon] - d_j \varphi_j(u)\}] = 0$$

şi se deduce imediat că

$$\mathfrak{M}\,[\psi_j(t)\,e^{-i\tau_j t}] = c_j, \qquad (j = 1,\ldots,\nu).$$

Rezultă că transformarea considerată aplică pe $\Omega$ în ea însăşi.

Introducem în $\Omega$ norma

$$\|\varphi\| = \max\,|\varphi_j(t)|$$

şi $\Omega$ devine un spaţiu metric complet. Fie

$$z(t) = (c_1\,e^{-i\tau_1 t},\ldots,\,c_\nu\,e^{-i\tau_\nu t},\,0,\ldots,0)$$

şi $\Omega_0$ sfera $\|\varphi - z\| \leqslant r$. Fie $R$ numărul care intervine in ipotezele făcute asupra funcţiilor $q_j$, $\psi$ funcţia care intervine tot acolo, $K > 0$ astfel încît $\int_0^T \psi(t)\,dt \leqslant KT$.

Dacă $\max\,|c_j| \leqslant r_2 < R$ şi $r = R - r_2$, pentru $\varphi \in \Omega_0$, avem

$$\|\varphi\| \leqslant \|z\| + r \leqslant r + r_2 = R$$

şi din

$$c_j\,d_j = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-i\tau_j u}\,q_j\,[\varphi(u),\,u,\varepsilon]\,du$$

rezultă evaluarea

$$|d_j| \leqslant \frac{1}{|c_j|\,T}\int_0^T \psi(u)\,du\,;$$

dacă $r_1 \leqslant |c_j|$, rezultă

$$|d_j| \leqslant \frac{K}{r_1}$$

deci

$$|\psi_j(t) - z_j(t)| \leqslant N\varepsilon\int_0^T \{|q_j[\varphi_j(u),\,u,\,\varepsilon]| + |d_j|\,\|\varphi_j(u)\|\}\,du \leqslant$$

$$\leqslant N\varepsilon\left[KT + \frac{TKR}{r_1}\right] \text{ pentru } j = 1,\ldots,\nu.$$

Pentru $j = \nu + 1,\ldots,n$ avem

$$|\psi_j(t) - z_j(t)| = |\psi_j(t)| \leqslant \varepsilon HN\int_0^T |q_j\,[\varphi(u),\,u,\,\varepsilon]|\,du \leqslant \varepsilon\,HNKT,$$

unde $H = e^{\gamma T}$, $\gamma = \max\,|\mathcal{Re}\,\rho_j|$, $j = \nu+1,\ldots,n$.

Rezultă că dacă $\varepsilon$ e suficient de mic, avem $|\psi_j - z_j| < r$, deci transformarea considerată aplică sfera $\Omega_0$ în ea însăşi.

Arătăm că pentru $\varepsilon$ suficient de mic, transformarea este o contracție. Avem

$$|d_j^1 - d_j^2| \leqslant \frac{1}{|c_j| T} \sum_{l=1}^{n} \int_0^T \psi(u) \, |\varphi_l^1(u) - \varphi_l^2(u)| \, du \leqslant \frac{nK}{r_1} \|\varphi^1 - \varphi^2\|,$$

$$|\psi_j^1 - \psi_j^2| \leqslant N\varepsilon \int_0^T \{|q_j[\varphi^1(u), u, \varepsilon] - q_j[\varphi^2(u), u, \varepsilon]| +$$

$$+ |d_j^1| |\varphi_j^1(u) - \varphi_j^2(u)| + |d_j^1 - d_j^2| |\varphi_j^2(u)|\} \, du \leqslant$$

$$\leqslant N\varepsilon \int_0^T \{\psi(t) \sum_{l=1}^{n} |\varphi_l^1(u) - \varphi_l^2(u)| + |d_j^1| \, |\varphi_j^1(u) - \varphi_j^2(u)| +$$

$$+ R \frac{nK}{r_1} \|\varphi^1 - \varphi^2\|\} du \leqslant \varepsilon N \{KTn \|\varphi^1 - \varphi^2\| + \frac{KT}{r_1} \|\varphi^1 - \varphi^2\| +$$

$$+ \frac{nKRT}{r_1} \|\varphi^1 - \varphi^2\|\} \leqslant \varepsilon NM \|\varphi^1 - \varphi^2\| \text{ pentru } j = 1, \ldots, \nu,$$

$$|\psi_j^1 - \psi_j^2| \leqslant \varepsilon \, NHnKT \|\varphi^1 - \varphi^2\|, \qquad (j = \nu+1, \ldots n).$$

Se vede de aici că dacă $\varepsilon$ e suficient de mic, transformarea este o contracție. Ea admite un punct fix în $\Omega_0$. Fie $y_j(t)$ acest punct fix. Avem

$$y_j(t) = c_j e^{i\tau_j t} + \varepsilon e^{i\tau_j t} \int e^{-i\tau_j u} \{q_j[y(u), u, \varepsilon] - d_j y_j(u)\} du, \; (j = 1, \ldots, \nu)$$

$$y_j(t) = \varepsilon e^{\rho_j(\varepsilon) t} \int e^{-\rho_j(\varepsilon) u} q_j[y(u), u, \varepsilon] du, \qquad (j = \nu + 1, \ldots, n).$$

Rezultă

$$\frac{dy_j}{dt} = i\tau_j c_j e^{i\tau_j t} + i\tau_j \varepsilon e^{i\tau_j t} \int e^{-i\tau_j u} \{q_j[y(u), u, \varepsilon] - d_j y_j(u)\} du +$$

$$+ \varepsilon e^{i\tau_j t} e^{-i\tau_j t} \{q_j[y(t), t, \varepsilon] - d_j y_j(t)\} =$$

$$= i\tau_j y_j + \varepsilon q_j[y(t), t, \varepsilon] - d_j y_j(t), \qquad (j = 1, \ldots, \nu)$$

$$\frac{dy_j}{dt} = \varepsilon \rho_j(\varepsilon) e^{\rho_j(\varepsilon) t} \int e^{-\rho_j(\varepsilon) u} q_j[y_j(u), u, \varepsilon] du + \varepsilon e^{\rho_j(\varepsilon) t} e^{-\rho_j(\varepsilon) t} q_j[y(t), t, \varepsilon] =$$

$$= \rho_j(\varepsilon) y_j + \varepsilon q_j[y(t), t, \varepsilon], \qquad (j = \nu + 1, \ldots, n).$$

Deducem de aici că funcțiile $y_j$ verifică sistemul (20) dacă sînt îndeplinite condițiile suplimentare

$$\frac{ia_j}{b_j} \omega - \varepsilon d_j = \rho_j(\varepsilon), \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu).(^*)$$

Soluția $y(t)$ a sistemului (20) și ecuațiile (*) pot fi obținute prin următorul procedeu de aproximații succesive

$$y^{(0)}(t) = z(t),$$

$$y_j^{(m)}(t) = z_j(t) + \varepsilon e^{i\tau_j t}\int e^{-i\tau_j u}\{q_j[y^{(m-1)}(u), u, \varepsilon] - d_j^{(m-1)} y^{(m-1)}(u)\}\,du$$

$$y_j^{(m)}(t) = \varepsilon e^{\rho_j(\varepsilon)t}\int e^{-\rho_j(\varepsilon)u} q_j[y^{(m-1)}(u), u, \varepsilon]\,du, \qquad (j = \nu+1, \ldots, n),$$

$$d_j^{(m-1)} c_j = \mathfrak{M}[e^{-i\tau_j u} q_j(y^{(m-1)}(u), u, \varepsilon)], \qquad (j = 1, \ldots, \nu).$$

Relațiile (*) pot fi puse sub o formă mai efectivă.

Într-adevăr, avem

$$y_j = z_j + O(\varepsilon), \quad \rho_j(\varepsilon) = \frac{ia_j}{b_j}\omega + \varepsilon\sigma_j + o(\varepsilon)$$

Relațiile (*) devin

$$\varepsilon\sigma_j + \varepsilon d_j + o(\varepsilon) = 0$$

sau

$$\sigma_j + d_j + O(\varepsilon) = 0.$$

Pe de altă parte,

$$d_j = \frac{1}{c_j T}\int_0^T e^{-i\tau_j u} q_j[y(u), u, \varepsilon]\,du = \frac{1}{c_j T}\int_0^T e^{-i\tau_j u} q_j[z(u), u, 0]\,du + O(\varepsilon),$$

deci relațiile de condiție devin

$$\sigma_j + \frac{1}{c_j T}\int_0^T e^{-i\tau_j u} q_j[z(u), u, 0]\,du + O(\varepsilon) = 0.$$

Fie

$$P_j(c_1, \ldots, c_\nu) \equiv \sigma_j + \frac{1}{c_j T}\int_0^T e^{-i\tau_j u} q_j[z(u), u, 0]\,du$$

$$z_j(u) = c_j e^{i\tau_j u}, \qquad j = 1, \ldots, \nu, \quad z_j(u) = 0, \qquad j = \nu+1, \ldots, n.$$

Dacă $P_j(c_1^0, \ldots, c_\nu^0) = 0$ și $\dfrac{\partial(P_1, \ldots, P_\nu)}{\partial(c_1, \ldots, c_\nu)} \neq 0$ pentru $c_j = c_j^0$, atunci, pe baza teoremei funcțiilor implicite, există $c_j(\varepsilon)$ care verifică relațiile (*), deci există o soluție periodică de perioadă $T = \dfrac{2\pi b_0}{\omega}$ a sistemului (20).

În definitiv, am obținut următoarea teoremă:

TEOREMA 3.16. *Se consideră sistemul* (20) *și se presupun verificate condițiile* ($\alpha$), (K), (L). *Dacă*

$$\rho_j(\varepsilon) = \frac{ia_j}{b_j}\,\omega + \varepsilon\sigma_j + o(\varepsilon), \quad j = 1, \ldots, \nu, \qquad \tau_j = \frac{a_j}{b_j},$$

*și dacă* $c_1^0, \ldots, c_\nu^0$ *verifică condițiile*

$$P_j(c_1^0, \ldots, c_\nu^0) = 0, \quad \frac{\partial(P_1, \ldots, P_\nu)}{\partial(c_1, \ldots, c_\nu)} \neq 0 \text{ pentru } c_j = c_j^0,$$

*unde*

$$P_j(c_1, \ldots, c_\nu) \equiv \sigma_j + \frac{1}{c_j T}\int_0^T e^{-i\tau_j u}\, q_j\,[z(u), u, 0]\,du,$$

$$z_j(u) = c_j e^{i\tau_j u}, \quad j = 1, \ldots, \nu, \quad z_j(u) = 0, \quad j = \nu + 1, \ldots, n,$$

*atunci sistemul* (20) *admite o soluție periodică* $y_j(t, \varepsilon)$ *de perioadă* $T$ *cu proprietatea*

$$y_j(t, \varepsilon) = z_j(t) + O(\varepsilon).$$

Din această teoremă se pot obține diverse condiții pentru sistemele de forma (21).

## § 11. PERTURBAȚII PERIODICE ALE SISTEMELOR AUTONOME

Să considerăm un sistem de forma

$$\frac{dx}{dt} = X_0(x) + \varepsilon X_1(t, x, \varepsilon), \tag{22}$$

unde $X_1$ este periodică în raport cu $t$ de perioadă $T$ și să presupunem că sistemul generator

$$\frac{dx}{dt} = X(x)$$

admite o soluție periodică $x = u(t)$ de perioadă $\omega$, cu proprietatea că sistemul corespunzător în variații admite $(n-1)$ multiplicatori situați în interiorul cercului unitate. Făcînd schimbarea de variabile legată de sistemul ortogonal normat $(\bar{X}_0, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, se obține un sistem de forma

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \Theta_0(\theta, y) + \varepsilon\,\Theta_1(t, \theta, y, \varepsilon), \\ \frac{dy}{dt} &= Y_0(\theta, y) + \varepsilon\,Y_1(t, \theta, y, \varepsilon), \end{aligned} \tag{23}$$

unde $\Theta_0$ și $\Theta_1$, $Y_0$, $Y_1$ sînt periodice în $\theta$ cu perioadă $\omega$, iar $\Theta_1$ și $Y_1$ sînt periodice și în $t$ cu perioadă $T$.

Fie $\alpha(s)$ o funcţie periodică de $s$ cu perioadă $\omega$, admiţînd derivate continue pînă la ordinul al doilea. Considerăm soluţia sistemului (23) care verifică condiţiile

$$\theta(0) = s,\ y(0) = \alpha(s).$$

Notăm această soluţie cu

$$\theta(t; s, \alpha(s), \varepsilon),\ y(t; s, \alpha(s), \varepsilon).$$

TEOREMA 3. 17. *Există pentru* $|\varepsilon|$ *suficient de mic o funcţie* $\alpha_\varepsilon(s)$ *unică astfel încît familia de soluţii*

$$\theta(t, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon),\quad y(t, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon)$$

*a sistemului* (23) *să formeze o varietate* $y = Q(t, \theta, \varepsilon)$, *unde* $Q$ *este periodică în* $t$ *cu perioadă* $T$ *şi periodică în* $\theta$ *cu perioadă* $\omega$. *Sistemul* (22) *admite o familie de soluţii* $x = x(t; s, \varepsilon)$ *care formează o varietate* $x = H(t, \theta, \varepsilon)$, *unde* $H$ *e periodică în* $t$ *cu perioadă* $T$ *şi în* $\theta$ *cu perioadă* $\omega$. *Pentru* $\varepsilon = 0$ *această varietate se reduce la curba* $u(t)$.

*Demonstraţie.* Fie

$$\sigma(s) = \theta(NT, s, \alpha(s), \varepsilon);\ \frac{d\sigma}{ds} = \frac{\partial\theta}{\partial s} + \frac{\partial\theta}{\partial y_0}\frac{d\alpha}{ds}.$$

Scriem

$$\theta(t, s, y_0, \varepsilon) = \theta(t, s, 0, 0,) + \frac{\partial\theta}{\partial y_0}(t, s, 0, 0)\, y_0 + \frac{\partial\theta}{\partial\varepsilon}(t, s, 0, 0)\,\varepsilon + o(|\varepsilon| + |y_0|)$$

$$y(t, s, y_0, \varepsilon) = y(t, s, 0, 0) + \frac{\partial y}{\partial y_0}(t, s, 0, 0)\, y_0 + \frac{\partial y}{\partial\varepsilon}(t, s, 0, 0) + o(|\varepsilon| + |y_0|)$$

şi înlocuind în sistemul (23) avem

$$\frac{d}{dt}\theta(t, s, 0, 0) + \frac{d}{dt}\frac{\partial\theta(t,s,0,0)}{\partial y_0}y_0 + \frac{d}{dt}\frac{\partial\theta(t, s, 0, 0)}{\partial\varepsilon}\varepsilon + o(|\varepsilon| + |y_0|) =$$

$$= \Theta_0[\theta(t, s, 0, 0), y(t, s, 0, 0)] + \frac{\partial\Theta_0[\theta(t, s, 0, 0), y(t, s, 0, 0)]}{\partial\theta}\frac{\partial\theta(t, s, 0, 0)}{\partial y_0}y_0 +$$

$$+ \frac{\partial\Theta_0[\theta(t, s, 0, 0), y(t, s, 0, 0)]}{\partial y}\frac{\partial y(t, s, 0, 0)}{\partial y_0}y_0 +$$

$$+ \frac{\partial\Theta_0[\theta(t, s, 0, 0), y(t, s, 0, 0)]}{\partial\theta}\frac{\partial\theta(t, s, 0, 0)}{\partial\varepsilon}\varepsilon +$$

$$+ \frac{\partial\Theta_0[\theta(t, s, 0, 0), y(t, s, 0, 0)]}{\partial y}\frac{\partial y(t, s, 0, 0)}{\partial\varepsilon}\varepsilon +$$

$$+ \varepsilon\Theta_1[t, \theta(t, s, 0, 0), y(t, s, 0, 0), 0] + o(|\varepsilon| + |y_0|),$$

$$\frac{d}{dt} y(t,s,0,0) + \frac{d}{dt} \frac{\partial y(t,s,0,0)}{\partial y_0} y_0 + \frac{d}{dt} \frac{\partial y(t,s,0,0)}{\partial \varepsilon} \varepsilon +$$

$$+ o(|\varepsilon + |y_0|) = Y_0 [\theta(t,s,0,0), y(t,s,0,0)] +$$

$$+ \frac{\partial Y_0[\theta(t,s,0,0), y(t,s,0,0)]}{\partial \theta} \frac{\partial \theta(t,s,0,0)}{\partial y_0} y_0 +$$

$$+ \frac{\partial Y_0[\theta(t,s,0,0), y(t,s,0,0)]}{\partial y} \frac{\partial y(t,s,0,0)}{\partial y_0} y_0 +$$

$$+ \frac{\partial Y_0[\theta(t,s,0,0), y(t,s,0,0)]}{\partial \theta} \frac{\partial \theta(t,s,0,0)}{\partial \varepsilon} \varepsilon +$$

$$+ \frac{\partial Y_0[\theta(t,s,0,0), y(t,s,0,0)]}{\partial y} \frac{\partial y(t,s,0,0)}{\partial \varepsilon} \varepsilon +$$

$$+ o(|\varepsilon| + |y_0|) + \varepsilon Y_1 [t, \theta(t,s,0,0), y(t,s,0,0)].$$

Rezultă

$$\frac{d}{dt} \theta(t,s,0,0) = \Theta_0 [\theta(t,s,0,0), y(t,s,0,0)], \quad \theta(0,s,0,0) = s$$

$$\frac{d}{dt} y(t,s,0,0) = Y_0 [\theta(t,s,0,0), y(t,s,0,0)], \quad y(0,s,0,0) = 0.$$

Dar $Y_0(\theta, 0) \equiv 0$, $\Theta_0(\theta, 0) \equiv 1$, deci $y(t,s,0,0) \equiv 0$, $\theta(t,s,0,0) = t + s$.

Mai departe,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \theta(t,s,0,0)}{\partial y_0} = \frac{\partial \Theta_0(t+s,0)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta(t,s,0,0)}{\partial y_0} +$$

$$+ \frac{\partial \Theta_0(t+s,0)}{\partial y} \frac{\partial y(t,s,0,0)}{\partial y_0},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial y(t,s,0,0)}{\partial y_0} = \frac{\partial Y_0(t+s,0)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta(t,s,0,0)}{\partial y_0} +$$

$$+ \frac{\partial Y_0(t+s,0)}{\partial y} \frac{\partial y(t,s,0,0)}{\partial y_0},$$

$$\frac{\partial \theta(0,s,0,0)}{\partial y_0} = 0, \quad \frac{\partial y(0,s,0,0)}{\partial y_0} = E.$$

Din $Y_0(\theta, 0) \equiv 0$, rezultă $\frac{\partial Y_0(t+s, 0)}{\partial \theta} \equiv 0$ şi din $\Theta_0(\theta, 0) \equiv 1$ rezultă de asemenea $\frac{\partial \Theta_0(t+s, 0)}{\partial \theta} \equiv 0$. Sistemul se scrie deci

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \theta(t, s, 0, 0)}{\partial y_0} = \frac{\partial \Theta_0(t+s, 0)}{\partial y} \frac{\partial y(t, s, 0, 0)}{\partial y_0}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial y(t, s, 0, 0)}{\partial y_0} = \frac{\partial Y_0(t+s, 0)}{\partial y} \frac{\partial y(t, s, 0, 0)}{\partial y_0}.$$

Rezultă că $\frac{\partial y(t, s, 0, 0)}{\partial y_0}$ este o matrice fundamentală a sistemului în variaţii normale $\frac{dz}{dt} = B(t+s)z$; dacă $G(\theta)$ este matricea fundamentală a sistemului în variaţii normale, avem deci

$$\frac{\partial y(t, s, 0, 0)}{\partial y_0} = G(t+s)G^{-1}(s)$$

şi

$$\frac{\partial \theta(t, s, 0, 0)}{\partial y_0} = \int_0^t \frac{\partial \Theta_0(t+s, 0)}{\partial y} G(t+s)G^{-1}(s)\, dt.$$

Din aceste formule rezultă

$$\frac{\partial \theta(NT, s, 0,0)}{\partial s} = 1, \quad \left| \frac{\partial \theta(NT, s, 0, 0)}{\partial y_0} \right| \leqslant M,$$

deci dacă $|\alpha(s)| + |\varepsilon|$ e suficient de mic, $\frac{\partial \theta(NT, s, \alpha(s), \varepsilon)}{\partial s}$ va fi oricît de aproape de 1, iar $\left| \frac{\partial \theta(NT, s, \alpha(s), \varepsilon)}{\partial y_0} \right|$ va fi mărginită. Rezultă de aici că dacă $|\alpha(s)| + \left|\frac{d\alpha}{ds}\right| + |\varepsilon|$ e suficient de mic, $\frac{d\sigma}{ds}$ va fi oricît de aproape de 1, deci $\frac{d\sigma}{ds} \neq 0$. De aici rezultă că există $s = E(\sigma, \varepsilon)$ definită pentru $0 \leqslant \sigma \leqslant \omega$ şi astfel ca

$$\theta(NT, E(\sigma, \varepsilon), \alpha(E(\sigma, \varepsilon)), \varepsilon) \equiv \sigma.$$

Cînd $s$ se înlocuieşte cu $s + \omega$, $\alpha(s)$ nu se schimbă şi avem

$$\theta(t, s+\omega, \alpha(s+\omega), \varepsilon) = \theta(t, s, \alpha(s), \varepsilon) + \omega$$

$$y(t, s+\omega, \alpha(s+\omega), \varepsilon) = y(t, s, \alpha(s), \varepsilon),$$

deoarece în ambii membri avem soluţii ale sistemului (23) şi aceste soluţii coincid pentru $t = 0$. Rezultă

$$\sigma(s + \omega) = \sigma(s) + \omega.$$

Fie acum

$$\beta(\sigma) = y(NT, E(\sigma, \varepsilon), \alpha(E(\sigma, \varepsilon)), \varepsilon).$$

Avem

$$\beta(\sigma + \omega) = y(NT, E(\sigma + \omega, \varepsilon), \alpha(E(\sigma + \omega, \varepsilon)), \varepsilon) = y(NT, E(\sigma, \varepsilon) + \omega, \alpha(E(\sigma, \varepsilon) + \omega), \varepsilon) = y(NT, E(\sigma, \varepsilon), \alpha(E(\sigma, \varepsilon)), \varepsilon) = \beta(\sigma).$$

În acest fel fiecărei funcţii $\alpha(s)$ definită pentru $0 \leqslant s \leqslant \omega$ şi cu $\alpha(0) = \alpha(\omega)$ îi corespunde o funcţie $\beta(\sigma)$ definită pentru $0 \leqslant \sigma \leqslant \omega$ şi cu $\beta(0) = \beta(\omega)$. Considerăm spaţiul funcţiilor $\alpha(s)$ cu $\alpha(0) = \alpha(\omega)$ şi cu metrica dată de

$$\rho(\alpha_1, \alpha_2) = \sup_{0 \leqslant s \leqslant \omega} |\alpha_1(s) - \alpha_2(s)|;$$

acesta este un spaţiu metric complet. Vom demonstra că operatorul $\beta = U(\alpha)$ este pentru $|\varepsilon|$ suficient de mic o contracţie.

Arătăm mai întîi că există constantele $K$ şi $L$ astfel încît dacă $|\alpha(s)| < K|\varepsilon|$, $\left|\frac{d\alpha}{ds}\right| < L(\varepsilon)$ să rezulte $|\beta(\sigma)| < K|\varepsilon|$, $\left|\frac{d\beta}{d\sigma}\right| < L|\varepsilon|$, deci mulţimea elementelor $\alpha$ cu $|\alpha| < K|\varepsilon|$, $\left|\frac{d\alpha}{ds}\right| < L|\varepsilon|$ este aplicată în ea însăşi.

Avem

$$\left|\frac{y(NT, s, y_0, \varepsilon)}{\partial s}\right| = O(|y_0| + |\varepsilon|),$$

$$\frac{dE}{d\sigma} = \frac{1}{\frac{d\sigma}{ds}} = 1 + O(|y_0| + |\varepsilon|).$$

Din

$$\frac{d\beta}{d\sigma} = \frac{\partial y(NT, E(\sigma, \varepsilon), \alpha(E(\sigma, \varepsilon)), \varepsilon)}{\partial s} \frac{dE(\sigma, \varepsilon)}{d\sigma} + \frac{\partial y(NT, E(\sigma, \varepsilon), \alpha(E(\sigma, \varepsilon)), \varepsilon)}{\partial y_0} \frac{d\alpha(E(\sigma, \varepsilon))}{ds} \frac{dE}{d\sigma}$$

rezultă, ţinînd seama că $|\alpha(E(\sigma, \varepsilon))| = O(|\varepsilon|)$, $\left|\frac{d\alpha}{ds}\right| = O(|\varepsilon|)$,

$$\left|\frac{d\beta}{d\sigma}\right| \leqslant O(|\varepsilon|)(1 + O(|\varepsilon|)) + \left|\frac{\partial_y(NT, E(\sigma, \varepsilon), \alpha(E(\sigma, \varepsilon)), \varepsilon)}{\partial y_0}\right| L|\varepsilon| (1 + O|\varepsilon|)).$$

Dar

$$\frac{\partial y(NT, s, y_0, \varepsilon)}{\partial y_0} = \frac{\partial y(NT, s, 0{,}0)}{\partial y_0} + O(|y_0| + |\varepsilon|) =$$

$$+ G(NT + s)G^{-1}(s) + O(|\varepsilon|).$$

Pentru $N$ destul de mare avem

$$|G(NT + s)G^{-1}(s)| < \frac{1}{2}$$

căci $|G(s)| \leqslant Re^{-\gamma s}$ din cauza ipotezei asupra multiplicatorilor. Rezultă

$$\left|\frac{d\beta}{d\sigma}\right| \leqslant \left(K_1 + \frac{1}{2}L + \varepsilon K_2\right)|\varepsilon|,$$

de unde se vede că pentru $|\varepsilon|$ suficient de mic avem

$$\left|\frac{d\beta}{d\sigma}\right| < L|\varepsilon|.$$

Mai departe

$$|\beta| \leqslant |G(NT + s)G^{-1}(s)||\alpha(E(\sigma, \varepsilon))| + K_3|\varepsilon| +$$

$$+ o(|\alpha| + |\varepsilon|) \leqslant \frac{1}{2}K\ |\varepsilon|\ K_3|\varepsilon| + o(|\varepsilon|)$$

şi se vede că pentru $|\varepsilon|$ suficient de mic rezultă

$$|\beta(\sigma)| < K|\varepsilon|.$$

Avem

$$\beta_1 - \beta_2 = y(NT, E_1(\sigma, \varepsilon), \alpha_1(E_1(\sigma, \varepsilon)), \varepsilon) - y(NT, E_2(\sigma, \varepsilon), \alpha_2(E_2(\sigma, \varepsilon)), \varepsilon) =$$

$$= \frac{\partial y}{\partial s}(NT, E_1, \alpha_1, \varepsilon)(E_1 - E_2) + \frac{\partial y(NT, E_1, \alpha_1, \varepsilon)}{\partial y_0}(\alpha_1(E_1) - \alpha_2(E_2)) +$$

$$+ o(|E_1 - E_2| + |\alpha_1(E_1) - \alpha_2(E_2)|),$$

$$\alpha_1(E_1) - \alpha_2(E_2) = \alpha_1(E_1) - \alpha_1(E_2) + \alpha_1(E_2) - \alpha_2(E_2) =$$

$$= \frac{d\alpha_1(E_2)}{ds}(E_1 - E_2) + \alpha_1(E_2) - \alpha_2(E_2) + o(|E_1 - E_2|).$$

Fie $E_1(\sigma, \varepsilon) = s_1$, $E_2(\sigma, \varepsilon) = s_2$; avem

$$\sigma = \theta(NT, s_1, \alpha_1(s_1), \varepsilon) = \theta(NT, s_2, \alpha_2(s_2), \varepsilon),$$

deci

$$\theta(NT, s_1, \alpha_1(s_1), \varepsilon) - \theta(NT, s_2, \alpha_2(s_2), \varepsilon) = 0.$$

De aici

$$\frac{\partial \theta (NT, s_1, \alpha_1 (s_1), \varepsilon)}{\partial s} (s_1 - s_2) + \frac{\partial \theta (NT, s_1, \alpha_1 (s_1), \varepsilon)}{\partial y_0} (\alpha_1 (s_1) - \alpha_2 (s_2)) +$$
$$+ o (| \alpha_1 - \alpha_2 | + | s_1 - s_2 |) = 0.$$

Rezultă

$$\left| \frac{\partial \theta (NT, s_1, \alpha_1 (s_1), \varepsilon)}{\partial s} \right| | s_1 - s_2 | \leqslant \left| \frac{\partial \theta (NT, s_1, \alpha_1 (s_1), \varepsilon)}{\partial y_0} \right| |\alpha_1 (s_1) - \alpha_2 (s_2)| +$$
$$+ o ( |\alpha_1 - \alpha_2 | + | s_1 - s_2 |).$$

Dar

$$\frac{\partial \theta (NT, s_1, \alpha_1 (s_1), \varepsilon)}{\partial s} = 1 + O(| \varepsilon |)$$

căci

$$| \alpha_1 (s_1) | = O (| \varepsilon |).$$

$$\left| \frac{\partial \theta (NT, s_1, \alpha_1 (s_1), \varepsilon)}{\partial y_0} \right| < K_5, \quad |\alpha_1 (s_1) - \alpha_2 (s_2) | =$$
$$= | \alpha_1 (s_1) - \alpha_1 (s_2) + \alpha_1 (s_2) - \alpha_2 (s_2) | \leqslant$$
$$\left| \frac{d\alpha_1 (s_1)}{ds} \right| |s_1 - s_2 | + |\alpha_1 (s_2) - \alpha_2 (s_2) | \leqslant L | \varepsilon | |s_1 - s_2 | + \rho (\alpha_1, \alpha_2),$$

deci

$$(1 + K_6 | \varepsilon |) | s_1 - s_2 | \leqslant K_5 (L | \varepsilon | | s_1 - s_2 | + \rho (\alpha_1, \alpha_2)).$$

Rezultă

$$| s_1 - s_2 | < 2 K_7 \rho (\alpha_1, \alpha_2)$$

deci

$$| E_1 - E_2 | < 2 K_7 \rho (\alpha_1, \alpha_2).$$

Cum

$$|\alpha_1 (E_2) - \alpha_2 (E_2) | \leqslant \rho (\alpha_1, \alpha_2)$$

rezultă

$$| \alpha_1 (E_1) - \alpha_2 (E_2) | < L | \varepsilon | 2 K_7 \rho (\alpha_1, \alpha_2) + \rho (\alpha_1, \alpha_2).$$

Pe de altă parte,

$$\left| \frac{\partial y (NT, E_1, \alpha_1, \varepsilon)}{\partial y_0} \right| \leqslant \frac{1}{2} + K_8 | \varepsilon |.$$

Rezultă

$$|\beta_1 - \beta_2 | \leqslant K_9 | \varepsilon | 2 K_7 \rho (\alpha_1, \alpha_2) + \left( \frac{1}{2} + K_8 |\varepsilon| \right) (L |\varepsilon| 2 K_7 \rho (\alpha_1, \alpha_2) +$$
$$+ \rho (\alpha_1, \alpha_2)) + K_{10} | \varepsilon | (2 K_7 \rho (\alpha_1, \alpha_2) + L | \varepsilon | 2 K_7 \rho (\alpha_1, \alpha_2) + \rho (\alpha_1, \alpha_2)),$$

deci în definitiv

$$|\beta_1 - \beta_2| \leqslant \frac{1}{2} \rho(\alpha_1, \alpha_2) + K_{11} |\varepsilon| \rho(\alpha_1, \alpha_2),$$

ceea ce arată că pentru $|\varepsilon|$ suficient de mic operatorul $\beta(\alpha)$ este o contracție.

Rezultă de aici că există o funcție $\alpha_\varepsilon(s)$ cu $|\alpha_\varepsilon(s)| < K|\varepsilon|$, $\left|\frac{d\alpha_\varepsilon(s)}{ds}\right| < L|\varepsilon|$ astfel ca

$$\alpha_\varepsilon(\sigma) \equiv y(NT, E(\sigma, \varepsilon), \alpha_\varepsilon(E(\sigma, \varepsilon)), \varepsilon).$$

Considerăm soluția $\theta(t, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon)$, $y(t, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon)$; din

$$\theta(t, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon) = t + s + O(\varepsilon)$$

rezultă că putem rezolva în raport cu $s$ și $s = \varphi(t, \theta, \varepsilon)$. Familia de soluții considerată va forma varietatea

$$y = Q(t, \theta, \varepsilon) \equiv y(t, \varphi(t, \theta, \varepsilon), \alpha_\varepsilon(\varphi(t, \theta, \varepsilon)), \varepsilon).$$

Pentru ca teorema să fie complet demonstrată, rămîne de arătat că funcția $Q(t, \theta, \varepsilon)$ este periodică în $t$ cu perioada $T$ și periodică în $\theta$ cu perioada $\omega$. Avem

$$Q(0, \theta, \varepsilon) = \alpha_\varepsilon(\varphi(0, \theta, \varepsilon)) = \alpha_\varepsilon(\theta),$$

$$Q(NT, \theta, \varepsilon) = y(NT, \varphi(NT, \theta, \varepsilon), \alpha_\varepsilon(\varphi(NT, \theta, \varepsilon), \varepsilon) =$$
$$= y(NT, E(\theta, \varepsilon), \alpha_\varepsilon(E(\theta, \varepsilon)), \varepsilon) = \alpha_\varepsilon(\theta).$$

Rezultă

$$Q(NT, \theta, \varepsilon) = Q(0, \theta, \varepsilon).$$

Deoarece sistemul (23) este periodic în $t$, cu perioada $T$, avem

$$y(t, \theta(T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), y(T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), \varepsilon) = y(t + T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon),$$

$$\theta(t, \theta(T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), y(T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), \varepsilon) = \theta(t + T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon).$$

Pentru $t = NT$ se capătă

$$y(NT, \theta(T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), y(T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), \varepsilon) = y(NT + T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon)$$

$$\theta(NT, \theta(T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), y(T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), \varepsilon) = \theta(NT + T, s, \alpha_\varepsilon(\varepsilon), \varepsilon)$$

deci

$$Q(NT + T, \theta, \varepsilon) = y(NT, E(\theta, \varepsilon), Q(T, E(\theta, \varepsilon) \varepsilon), \varepsilon).$$

Avem

$$Q(NT + T, \theta, \varepsilon) = y(NT + T, \varphi(NT + T, \theta, \varepsilon), \alpha_\varepsilon(\varphi(NT + T, \theta, \varepsilon)), \varepsilon).$$

Dar

$$y(NT + T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon) = y(T, \theta(NT, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), y(NT, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), \varepsilon),$$

$$\theta(NT + T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon) = \theta(T, \theta(NT, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), y(NT, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), \varepsilon).$$

Pentru $s = E\,(\sigma, \varepsilon)$ avem

$$\theta(NT, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon) \equiv \sigma$$

şi

$$y(NT, E(\sigma, \varepsilon), \alpha_\varepsilon(E(\sigma, \varepsilon)), \varepsilon) \equiv \alpha_\varepsilon(\sigma),$$

deci

$$y(NT + T, E(\sigma, \varepsilon), \alpha_\varepsilon(E(\sigma, \varepsilon)), \varepsilon) = y\,(T, \sigma, \alpha_\varepsilon(\sigma), \varepsilon),$$

$$\theta(NT + T, E(\sigma, \varepsilon), \alpha_\varepsilon(E(\sigma, \varepsilon)), \varepsilon) = \theta(T, \sigma, \alpha_\varepsilon(\sigma), \varepsilon).$$

Aceste relaţii dau

$$Q(NT + T, \theta, \varepsilon) = Q(T, \theta, \varepsilon).$$

Rezultă

$$y(NT, E(\theta, \varepsilon), Q(T, E(\theta, \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon) = Q(T, \theta, \varepsilon),$$

deci $Q(T, \theta, \varepsilon)$ este punct fix al operatorului $U$ şi cum acest punct fix e unic, rezultă

$$Q(T, \theta, \varepsilon) = \alpha_\varepsilon(\theta)$$

deci

$$Q(T, \theta, \varepsilon) = Q(0, \theta, \varepsilon).$$

Putem acum verifica periodicitatea lui $Q$ în raport cu $t$. Fie $t$ arbitrar. Avem

$$y(t + T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon) = y(t, \theta(T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), y(T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), \varepsilon), =$$

$$= y(t, \theta, Q(T, \theta, \varepsilon), \varepsilon) = y(t, \theta, Q(0, \theta, \varepsilon), \varepsilon) = y(t, \theta, \alpha_\varepsilon(\theta), \varepsilon),$$

$$\theta(t + T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon) = \theta(t, \theta(T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), y(T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), \varepsilon) =$$

$$= \theta(t, Q(T, \theta, \varepsilon), \varepsilon) = \theta(t, \theta, Q(0, \theta, \varepsilon), \varepsilon) = \theta(t, \theta, \alpha_\varepsilon(\theta), \varepsilon).$$

De aici rezultă

$$Q(t + T, \theta, \varepsilon) = Q(t, \theta, \varepsilon).$$

Pentru a verifica periodicitatea lui $Q$ în raport cu $\theta$ observăm că

$$\theta(t, s + \omega, \alpha_\varepsilon(s + \omega, \varepsilon) = \theta(t, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon) + \omega,$$

deci

$$\varphi(t, \theta + \omega, \varepsilon) = \varphi(t, \theta, \varepsilon) + \omega.$$

Rezultă

$$Q(t, \theta + \omega, \varepsilon) = y(t, \varphi(t, \theta + \omega, \varepsilon), \alpha_\varepsilon(\varphi(t, \theta + \omega, \varepsilon), \varepsilon) =$$

$$= y(t, \varphi\,(t, \theta, \varepsilon) + \omega, \alpha_\varepsilon(\varphi(t, \theta, \varepsilon) + \omega), \varepsilon) =$$

$$= y(t, \varphi(t, \theta, \varepsilon), \alpha\,(\varphi(t, \theta, \varepsilon)), \varepsilon) = Q(t, \theta, \varepsilon).$$

Teorema este acum complet demonstrată.

Dacă în prima ecuaţie a sistemului (23) înlocuim pe $y$ cu $Q(t, \theta, \varepsilon)$ se capătă o ecuaţie

$$\frac{d\theta}{dt} = f(t, \theta, \varepsilon),$$

unde $f$ este continuă şi periodică în $t$ cu perioada $T$ şi în $\theta$ cu perioada $\omega$. Această ecuaţie permite să se studieze proprietăţile soluţiilor situate pe varietatea $y = Q(t, \theta, \varepsilon)$.

## § 12. PERTURBAŢII SINGULARE

Vom studia acum unele probleme relative la sistemele care conţin parametrii pe lîngă derivate. Asemenea probleme se vor numi probleme de *perturbaţii singulare*.

Fie sistemul

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y, \varepsilon),$$
$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = g(t, x, y, \varepsilon). \tag{24}$$

Vom presupune că $f$ şi $g$ sînt în raport cu $t$ periodice, respectiv aproape-periodice. Vom admite de asemenea ipotezele obişnuite de regularitate.

Pentru $\varepsilon = 0$ se obţine sistemul

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y, 0),$$
$$g[t, x, y, 0] = 0. \tag{25}$$

Presupunem că sistemul (25) admite o soluţie $[u(t), v(t)]$ periodică, respectiv aproape-periodică, astfel ca matricea $g'_v[t, u(t), v(t), 0]$ să fie nesingulară pentru orice $t$. Notăm

$$U(t) = (g'_y[t, u(t), v(t), 0])^{-1} g'_x[t, u(t), v(t), 0].$$

În cele ce urmează $f'_x$, $f'_y$, $f'_\varepsilon$ vor fi derivatele funcţiei $f$ în punctul $[t, u(t), v(t), 0]$, iar $g'_y$, $g'_x$ derivatele funcţiei $g$ în acelaşi punct.

Se face în sistemul (24) schimbarea de variabile

$$\xi = x - u(t), \quad \eta = y - v(t) + U(t)\,\xi.$$

Obţinem

$$\frac{d\xi}{dt} = f[t, \ \xi + u(t), \ \eta + v(t) - U(t)\xi, \ \varepsilon] - f[t, \ u(t), \ v(t), \ 0],$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} g[t, \ \xi + u(t), \ \eta + v(t) - U(t)\xi, \varepsilon] - \frac{dv(t)}{dt} + \frac{dU(t)}{dt}\xi + \\ + U(t)\frac{d\xi}{dt}.$$

De aici

$$\frac{d\xi}{dt} = f'_x \ \xi(t) + f'_y [\eta - U(t) \ \xi] + \varepsilon f'_\varepsilon + F[t, \ \xi, \ \eta, \ \varepsilon]$$

$$\varepsilon \frac{d\eta}{dt} = g'_x \ \xi + g'_y \ [\eta - U(t)\xi] + \varepsilon \left[g'_\varepsilon - \frac{dy}{dt}\right] + G[t, \ \xi, \eta, \ \varepsilon].$$

Notăm

$$A_1(t) = f'_x - f'_y U, \quad A_2(t) = f'_y, \quad Q(t) = g'_y.$$

Sistemul obţinut se scrie

$$\frac{d\xi}{dt} = A_1 \ \xi + A_2 \ \eta + \varepsilon f'_\varepsilon + F(t, \ \xi, \ \eta, \ \varepsilon), \tag{26}$$

$$\varepsilon \frac{d\eta}{dt} = Q\eta + \varepsilon \left(g'_\varepsilon - \frac{dv}{dt}\right) + G(t, \ \xi, \ \eta, \ \varepsilon),$$

unde

$$|F| = O \ (|\xi|^2 + |\eta|^2 + \varepsilon^2), \ |G| = O(|\xi|^2 + |\eta|^2 + \varepsilon^2)$$

şi în plus $F$ şi $G$ sînt lipschitziene cu o constantă oricît de mică dacă $|\xi|$, $|\eta|$, $|\varepsilon|$ sînt suficient de mici.

Vom presupune că $\frac{Q + Q^*}{2} \leqslant -\mu E$, $\mu > 0$; aceasta implică în particular ipoteza formulată anterior asupra nesingularităţii matricii $Q$. În plus, $Q^{-1}$ rezultă mărginită. Coeficienţii $A_1, A_2$, $Q$ şi funcţiile $f'_\varepsilon$, $g'_\varepsilon - \frac{dv}{dt}$, $F$, $G$ sînt periodice respectiv aproape-periodice.

Vom admite în sfîrşit că sistemul liniar

$$\frac{d\xi}{dt} = A_1 \xi \tag{27}$$

are soluţia banală uniform asimptotic stabilă.

În aceste condiţii demonstrăm că sistemul (26) admite o soluţie periodică, respectiv aproape-periodică, unică, care pentru $\varepsilon \to 0$ tinde către zero.

Pentru aceasta considerăm operatorul care ataşează funcţiilor $\alpha(t)$, $\beta(t)$ periodice, respectiv aproape-periodice, soluţia periodică, respectiv aproape-periodică, unică, a sistemului

$$\frac{d\xi}{dt} = A_1 \xi + A_2 \eta + \varepsilon f'_\varepsilon + F[t, \alpha(t), \beta(t), \varepsilon],$$

$$\varepsilon \frac{d\eta}{dt} = Q\eta + \varepsilon\left[g'_\varepsilon - \frac{dv}{dt}\right] + G[t, \alpha(t), \beta(t), \varepsilon]. \qquad (*)$$

Din a doua ecuaţie (*) se determină mai întîi soluţia periodică, respectiv aproape-periodică $\eta(t)$, care se înlocuieşte în prima ecuaţie.

Condiţiile impuse matricii $Q$ asigură existenţa acestei soluţii, iar condiţia impusă sistemului (27) asigură existenţa unei soluţii periodice, respectiv aproape-periodice, care verifică evaluarea

$$|\xi| \leqslant K_1(K_2 \sup|\eta| + K_3|\varepsilon| + O(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \varepsilon^2)), \text{ (teorema 3.4).}$$

Fie $\|\alpha\| \leqslant K|\varepsilon|$, $\|\beta\| \leqslant K'|\varepsilon|$. Rezultă

$$|G[t, \alpha(t), \beta(t), \varepsilon]| \leqslant L\varepsilon^2.$$

Avem

$$\varepsilon\left(\eta, \frac{d\eta}{dt}\right) = (\eta, Q\eta) + \varepsilon\left(\eta, g'_\varepsilon - \frac{dv}{dt}\right) + (\eta, G)$$

deci, presupunînd $\varepsilon > 0$,

$$\varepsilon \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\eta|^2 \leqslant -\mu|\eta|^2 + \varepsilon|\eta| M + |\eta| L\varepsilon^2.$$

Notînd $|\eta|^2 = v^2$, deducem

$$v\frac{dv}{dt} \leqslant -\frac{\mu}{\varepsilon}v^2 + vM + vL\varepsilon,$$

sau

$$\frac{dv}{dt} \leqslant -\frac{\mu}{\varepsilon}v + M + \varepsilon L.$$

De aici obţinem evaluarea

$$v \leqslant \frac{\varepsilon}{\mu}(M + \varepsilon L)$$

deci

$$|\eta| \leqslant \frac{\varepsilon}{\mu}(M + \varepsilon L)$$

Alegînd pe $K'$ destul de mare şi pe $\varepsilon$ destul de mic, deducem

$$|\eta| \leqslant K' \varepsilon.$$

Mai departe, din prima ecuaţie (*) deducem

$$|\xi| \leqslant K_1(K_2 K' \varepsilon + K_3 \varepsilon + L_1 \varepsilon^2).$$

Alegînd pe $K$ destul de mare şi pe $\varepsilon$ suficient de mic, deducem

$$|\xi| \leqslant K|\varepsilon|.$$

Prin urmare, operatorul aplică mulţimea $\|\alpha\| \leqslant K\varepsilon$, $\|\beta\| \leqslant K'\varepsilon$ în ea însăşi. Să arătăm că în această mulţime el este, pentru $\varepsilon$ suficient de mic, o contracţie.

Fie $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ date, $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ imaginile corespunzătoare, $\gamma = \xi_1 - \xi_2$, $\delta = \eta_1 - \eta_2$. Avem

$$\frac{d\gamma}{dt} = A_1 \gamma + A_2 \delta + F[t, \alpha_1(t), \beta_1(t), \varepsilon] - F[t, \alpha_2(t), \beta_2(t), \varepsilon]$$

$$\varepsilon \frac{d\delta}{dt} = Q\delta + G[t, \alpha_1(t), \beta_1(t), \varepsilon] - G[t, \alpha_2(t), \beta_2(t), \varepsilon].$$

Rezultă, ca mai sus,

$$\|\delta\| \leqslant L_2 \varepsilon(\|\alpha_1 - \alpha_2\| + \|\beta_1 - \beta_2\|)$$

şi apoi

$$\|\gamma\| \leqslant L_3 \varepsilon(\|\alpha_1 - \alpha_2\| + \|\beta_1 - \beta_2\|),$$

ceea ce arată că operatorul este, pentru $\varepsilon$ suficient de mic, o contracţie.

Deducem existenţa unui punct fix unic în regiunea $\|\alpha\| \leqslant K\varepsilon$, $\|\beta\| \leqslant K'\varepsilon$, deci a unei soluţii periodice respectiv aproape-periodice, a sistemului (26), de forma

$$\xi(t) = \varepsilon\, \xi^*(t, \varepsilon), \quad \eta(t) = \varepsilon\, \eta^*(t, \varepsilon).$$

Am obţinut în definitiv;

TEOREMA 3.18. *Dacă sistemul* (25) *admite o soluţie periodică, respectiv aproape-periodică* $[u(t), v(t)]$ *astfel ca* $\frac{Q + Q^*}{2} \leqslant -\mu E$ *şi dacă soluţia banală a sistemului* (27) *este uniform asimptotic stabilă, sistemul* (24) *admite pentru* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *o soluţie periodică, respectiv aproape-periodică unică* $[x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)]$ de forma

$$x(t, \varepsilon) = u(t) + \varepsilon\, \xi^*(t, \varepsilon),$$

$$y(t, \varepsilon) = v(t) + \varepsilon\, \eta^*(t, \varepsilon) - \varepsilon\, U(t)\, \xi^*(t, \varepsilon).$$

*Observaţie.* În cazul soluţiilor periodice, condiţia impusă sistemului (27) poate fi slăbită, cerînd numai ca el să nu admită soluţii periodice de perioada considerată, diferite de soluţia banală.

De asemenea, condiţia impusă matricii $Q$ poate fi slăbită, cerînd de exemplu ca pentru orice $t$ să admită valori proprii cu părţi reale nega-

tive $\leqslant -\alpha$. Această condiție poate fi încă slăbită, dar conduce la cereri cu totul neefective.

Vom considera acum numai cazul periodic și vom presupune că sistemul obținut pentru $\varepsilon = 0$ admite o familie de soluții periodice depinzînd de parametrii $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

Vom nota cu $c$ vectorul $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ al parametrilor.

În acest caz sistemul (27) admite soluții periodice. Într-adevăr, din

$$\frac{du(t, c)}{dt} = f[t, u(t, c), v(t, c), 0].$$

$$g[t, u(t, c), v(t, c), 0] \equiv 0.$$

rezultă

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial u(t, c)}{\partial c} = f'_x \frac{\partial u(t, c)}{\partial c} + f'_y \frac{\partial v(t, c)}{\partial c}$$

$$g'_x \frac{\partial u(t, c)}{\partial c} + g'_y \frac{\partial v(t, c)}{\partial c} \equiv 0,$$

deci

$$\frac{\partial v(t, c)}{\partial c} = -U(t)\frac{\partial u(t, c)}{\partial c}.$$

Rezultă

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial u(t, c)}{\partial c} = [f'_x - f'_y U(t)]\frac{\partial u(t, c)}{\partial c} = A_1(t)\frac{\partial u(t, c)}{\partial c}.$$

Prin urmare funcțiile periodice $\frac{\partial u(t, c)}{\partial c}$ sînt soluții ale sistemului (27). Conform teoremei 3.2 sistemul adjunct sistemului (27) admite același număr de soluții periodice independente, pe care le vom nota $q_1(t, c), \ldots, q_k(t, c)$. Să presupunem că pentru o valoare $c_0$ a parametrului, sistemul (26) admite o soluție periodică de forma

$$\xi(t, \varepsilon) = \varepsilon\, \xi^*(t, \varepsilon), \quad \eta(t, \varepsilon) = \varepsilon\, \eta^*(t, \varepsilon).$$

Atunci $\xi^*$, $\eta^*$ verifică sistemul

$$\frac{d\xi^*(t, \varepsilon)}{dt} = A_1(t)\,\xi^*(t, \varepsilon) + A_2(t)\,\eta^*(t, \varepsilon) + f'_\varepsilon + \varepsilon F^*,$$

$$\varepsilon\frac{d\eta^*(t, \varepsilon)}{dt} = Q(t)\,\eta^*(t, \varepsilon) + g'_\varepsilon - \frac{dv}{dt} + \varepsilon G^*,$$

Ținînd seama de teorema 3.2 avem

$$\int_0^\omega q_j(t, c_0)\{A_2(t)\,\eta^*(t, \varepsilon) + f'_\varepsilon + \varepsilon F^*\}\,dt = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots k).$$

Fie $\eta^{**}(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \eta^*(t, \varepsilon)$.

Rezultă

$$\int_0^{\omega} q_j(t,\ c_0)\{A_2(t)\eta^{**}(t)+f_{\varepsilon}'\}\,\mathrm{d}t=0, \qquad (j=1,\ 2,\ldots,\ k).$$

Pentru a calcula pe $\eta^{**}$ să considerăm sistemul

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}=Q(t)\,\eta.$$

Fie $U(t,\ s,\ \varepsilon)$ matricea fundamentală a acestui sistem. Din ipoteza $\frac{Q+Q^*}{2}\leqslant$ $\leqslant-\mu\,E$ rezultă evaluarea

$$\|U(t,\ s,\ \varepsilon)\|\leqslant Be^{-\frac{\mu}{\varepsilon}(t-s)}.$$

Soluția periodică $\eta^*\ (t,\ \varepsilon)$ se scrie sub forma

$$\eta^*(t,\ \varepsilon)=\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\varepsilon}U(t,\ s,\ \varepsilon)\left[g_{\varepsilon}'-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}+\varepsilon G^*\right]\mathrm{d}s.$$

Avem

$$\left|\int_{-\infty}^{t}U(t,\ s,\ \varepsilon)\ G^*\ \mathrm{d}s\right|\leqslant M\int_{-\infty}^{t}e^{-\frac{\mu}{\varepsilon}(t-s)}\mathrm{d}s=M\frac{\varepsilon}{\mu},$$

deci

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\infty}^{t}U(\ t,\ s,\ \varepsilon)G^*\,\mathrm{d}s=0.$$

Rezultă că

$$\eta^{**}(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t}U(t,\ s,\ \varepsilon)\left(g_{\varepsilon}'-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s.$$

Mai departe,

$$\frac{1}{\varepsilon}\left|\int_{-\infty}^{t-\sqrt{\varepsilon}}U(t,\ s,\ \varepsilon)\left(g_{\varepsilon}'-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s\right|\leqslant\frac{M_1}{\varepsilon}e^{-\frac{\mu}{\varepsilon}t}\frac{\varepsilon}{\mu}e^{\frac{\mu}{\varepsilon}s}\Big|_{-\infty}^{t-\sqrt{\varepsilon}}=\frac{M_1}{\mu}e^{-\frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon}}}$$

deci

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t-\sqrt{\varepsilon}}U(t,\ s,\ \varepsilon)\left(g_{\varepsilon}'-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s=0.$$

Prin urmare avem

$$\eta^{**}(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\sqrt{\varepsilon}}^{t}U(t,\ s,\ \varepsilon)\left(g_{\varepsilon}'-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s,$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\sqrt{\varepsilon}}^{t} U(t, s, \varepsilon)\left(g'_\varepsilon - \frac{dv}{ds}\right)ds = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\sqrt{\varepsilon}}^{t} - U(t, s, \varepsilon)Q(s)Q^{-1}(s)\left(g'_\varepsilon - \frac{dv}{ds}\right)ds = -\int_{t-\sqrt{\varepsilon}}^{t}\left(\frac{d}{ds}U(t, s, \varepsilon)Q^{-1}(s)\left(g'_\varepsilon - \frac{dv}{ds}\right)\right)ds =$$

$$= - U(t, s, \varepsilon)Q^{-1}(s)\left(g'_\varepsilon - \frac{dv}{ds}\right)\Bigg|_{t-\sqrt{\varepsilon}}^{t} + \int_{t-\sqrt{\varepsilon}}^{t} U(t, s, \varepsilon)\left(\frac{d}{ds}Q^{-1}(s)\left(g'_\varepsilon - \frac{dv}{ds}\right)\right)ds = - Q^{-1}(t)\left(g'_\varepsilon - \frac{dv}{dt}\right) + U(t, t-\sqrt{\varepsilon}, \varepsilon)Q^{-1}(t-\sqrt{\varepsilon})\left(g'_\varepsilon - \frac{dv}{ds}\right)\Bigg|_{t-\sqrt{\varepsilon}} + \int_{t-\sqrt{\varepsilon}}^{t} U(t, s, \varepsilon)\frac{d}{ds}Q^{-1}(s)\left(g'_\varepsilon - \frac{dv}{ds}\right)ds.$$

Pentru $\varepsilon \to 0$, ultima integrală tinde evident către zero. Deoarece

$$| U(t, t-\sqrt{\varepsilon}, \varepsilon) | \leqslant Be^{-\frac{\mu}{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon}}$$

rezultă că şi al doilea termen tinde către zero. Rezultă în definitiv

$$\eta^{**}(t) = - Q^{-1}(t)\left[g'_\varepsilon - \frac{dv}{dt}\right].$$

TEOREMA 3.19. *Presupunem că sistemul* (25) *admite o familie de soluţii periodice de perioadă* $\omega$, $[u(t, c), v(t, c)]$, *şi că pentru soluţia corespunzătoare valorii* $c = c_0$, *avem* $\frac{Q + Q^*}{2} \leqslant - \mu E$. *Dacă sistemul* (24) *admite o soluţie periodică de perioadă* $\omega$ *de forma*

$$x(t, \varepsilon) = u(t, c_0) + \varepsilon\,\xi^*(t, \varepsilon),\ \ y(t, \varepsilon) = v(t, c_0) + \varepsilon\,\eta^*(t, \varepsilon) - \varepsilon\,U(t)\,\xi^*(t, \varepsilon),$$

*atunci*

$$\int_0^\omega q_j(t, c_0)\left\{A_2(t, c_0)Q^{-1}(t, c_0)\left[g'_\varepsilon - \frac{dv(t, c_0)}{dt}\right] - f'_\varepsilon\right\}dt = 0, (j = 1,2,\ldots k),$$

*pentru toate soluţiile periodice* $q_j(t, c_0)$ *de perioadă* $\omega$ *ale sistemului adjunct sistemului* (27).

Studiem acum problema perturbaţiilor singulare ale sistemelor autonome de forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, \varepsilon),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = g(x, y, \varepsilon). \tag{28}$$

Pentru $\varepsilon = 0$ se obține sistemul

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, 0),$$

$$g(x, y, 0) = 0.$$

Presupunem că pentru $x \in D$ există $\varphi(x)$ astfel ca

$$g(x, \varphi(x), 0) \equiv 0.$$

Considerăm sistemul

$$\frac{dx}{dt} = f[x, \varphi(x), 0], \ x \in D. \tag{29}$$

Presupunem că acest sistem admite în $D$ o soluție periodică, respectiv aproape-periodică, $u(t)$.

Considerăm sistemul ortogonal normal $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_l$, legat de această soluție, unde

$$\xi_1 = \frac{f[u(t), \varphi(u(t)), 0]}{|f[u(t), \varphi(u(t)), 0]|}.$$

Din construcția vectorilor $\xi_1, \ldots, \xi_l$ rezultă că aceștia sînt periodici, respectiv aproape-periodici în $t$.

Facem în sistemul (28) schimbarea de variabile

$$x = u(\theta) + S(\theta)z,$$

noile variabile fiind $\theta$ și $z$, iar $S$ fiind matricea care are drept coloane vectorii $\xi_2, \ldots, \xi_l$.

Se obține un sistem de forma

$$\frac{d\theta}{dt} = \Theta(\theta, z, y, \varepsilon),$$

$$\frac{dz}{dt} = Z(\theta, z, y, \varepsilon),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = g[u(\theta) + S(\theta)z, y, \varepsilon].$$

Pentru $\varepsilon = 0$, $z = 0$, $y = \varphi[u(\theta)]$ avem $\Theta = 1$ deci pentru $y$ în vecinătatea lui $\varphi[u(\theta)]$, iar $z$ și $\varepsilon$ mici, avem $\Theta \neq 0$.

Putem deci lua pe $\theta$ ca variabilă independentă și obținem

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{Z(\theta, z, y, \varepsilon)}{\Theta(\theta, z, y, \varepsilon)}, \ \varepsilon\frac{dy}{d\theta} = \frac{g[u(\theta) + S(\theta)z, y]}{\Theta(\theta, z, y, \varepsilon)}.$$

Am obținut astfel un sistem periodic, respectiv aproape-periodic de forma

$$\frac{dz}{d\theta} = F(\theta, z, y, \varepsilon), \quad \varepsilon\frac{dy}{d\theta} = Y(\theta, z, y, \varepsilon)$$

ca în teorema 3.18.

Pentru $\varepsilon = 0$ se capătă

$$g[u(\theta) + S(\theta)z, y, 0] = 0$$

care admite soluția

$$z = 0, \quad y = \varphi[u(\theta)]$$

căci

$$g[u(\theta), \varphi[u(\theta)], 0] \equiv 0,$$

și

$$Z[\theta, 0, \varphi[u(\theta)], 0] \equiv 0.$$

Avem mai departe,

$$Y'_z(\theta, 0, \varphi[u(\theta)], 0) = \left.\frac{g'_x S(\theta)\Theta - g\,\Theta'_z}{\Theta^2}\right|_{\substack{z=0\\ y=\varphi[u(\theta)]\\ \varepsilon=0}} =$$

$$= g'_x[u(\theta), \varphi[u(\theta)], 0]S(\theta),$$

$$Y'_y(\theta, 0, \varphi[u(\theta)], 0) = \left.\frac{g'_y\Theta - g\,\Theta'_y}{\Theta^2}\right|_{\substack{z=0\\ y=\varphi[u(\theta)]\\ y=0}} = g'_y[u(\theta), \varphi[u(\theta)], 0].$$

Rezultă că

$$U(\theta) = (g'_y[u(\theta), \varphi[u(\theta)], 0])^{-1} g'_x[u(\theta), \varphi[u(\theta)], 0]S(\theta),$$

$$Q(\theta) = g'_y[u(\theta), \varphi[u(\theta)], 0].$$

Calculăm pe :

$$A_1(\theta) = F'_z[\theta, 0, \varphi[u(\theta)], 0] - F'_y[\theta, 0, \varphi[u(\theta)], 0]\,U(\theta),$$

$$F'_z[\theta, 0, \varphi[u(\theta)], 0] = \left.\frac{Z'_z\Theta - Z\,\Theta'_z}{\Theta^2}\right|_{\substack{z=0\\ y=\varphi[u(\theta)]\\ \varepsilon=0}} = Z'_z - Z\,\Theta'_z\Big|_{\substack{z=0\\ y=\varphi[u(\theta)]\\ \varepsilon=0}},$$

$$F'_y[\theta, 0, \varphi[u(\theta)], 0] = \left.\frac{Z'_y\Theta - Z\,\Theta'_y}{\Theta^2}\right|_{\substack{z=0\\ y=\varphi[u(\theta)]\\ \varepsilon=0}} = Z'_y - Z\,\Theta'_y\Big|_{\substack{z=0\\ y=\varphi[u(\theta)]\\ \varepsilon=0}}.$$

Sistemul (29) se scrie în noile variabile

$$\frac{d\theta}{dt} = \Theta[\theta, z, \varphi[u(\theta) + S(\theta)z], 0]$$

$$\frac{dz}{dt} = Z[\theta, z, \varphi[u(\theta) + S(\theta)z], 0]$$

deci

$$\frac{dz}{d\theta}=\frac{Z[\theta,z,\varphi[u(\theta)+S(\theta)z],0]}{\Theta[\theta,z,\varphi[u(\theta)+S(\theta)z],0]}.$$

Matricea sistemului în variaţii normale se obţine luînd derivata în raport cu $z$ în punctul $z = 0$. Deducem

$$B(\theta)=\left.\frac{[Z'_z+Z'_y\varphi'_x S(\theta)]\Theta-Z(\Theta'_z+\Theta'_y\varphi'_x S(\theta))}{\Theta^2}\right|_{z=0}=$$

$$=Z'_z-Z'_y(g'_y)^{-1}g'_x S(\theta)-Z\Theta'_z+Z\Theta'_y(g'_y)^{-1}g'_x S(\theta)|_{z=0}=$$

$$=(Z'_z-Z\Theta'_z)_{z=0}-(Z'_y-Z\Theta'_y)_{z=0}U=F'_z-F'_yU,$$

deci

$$B(\theta)=A_1(\theta).$$

Dacă presupunem că soluţia sistemului în variaţii normale este uniform asimptotic stabilă (ceea ce în cazul periodic înseamnă că sistemul în variaţii corespunzător soluţiei $u(t)$ are toţi mutiplicatorii afară de unul în interiorul cercului unitate), rezultă îndeplinite condiţiile din teorema 3.18.

TEOREMA 3.20. *Dacă sistemul* (29) *admite o soluţie periodică, respectiv aproape-periodică,* $u(t)$, *situată în* $D$ *astfel ca* $\frac{Q+Q^*}{2}\leqslant-\mu E$, *unde* $Q=g'_y[u(t),\varphi[u(t)],0]$ *şi în plus dacă soluţia banală a sistemului în variaţii normale corespunzător este uniform asimptotic stabilă, atunci pentru* $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ *sistemul* (28) *admite o soluţie periodică, respectiv aproape-periodică unică, care pentru* $\varepsilon=0$ *se reduce la* $(u(t),\varphi[u(t)])$.

Este suficient să observăm că în ipotezele teoremei, pe baza teoremei 3.18, rezultă existenţa unei soluţii $[z(\theta,\varepsilon), y(\theta,\varepsilon)]$ de forma

$$z(\theta,\varepsilon)=\varepsilon\xi^*(\theta,\varepsilon),\quad y(\theta,\varepsilon)=\varphi[u(\theta)]+O(\varepsilon)$$

care conduce la o soluţie de forma

$$x=u(\theta)+\varepsilon S(\theta)\xi^*(\theta,\varepsilon),\quad y(\theta,\varepsilon)=\varphi[u(\theta)]+O(\varepsilon).$$

## COMENTARII BIBLIOGRAFICE

Demonstraţia teoremei 3.3 este reprodusă după [47]. Teorema 3.4 a fost dată pentru prima oară în [48]. Demonstraţia din text este adaptată după cea dată pentru sistemele cu argument întîrziat în [49]. Rezultate mai generale în această direcţie se găsesc în [50]. Rezultatele relative la sistemele cvasiliniare au fost publicate în [51]. Teoria sistemelor cu parametru mic cu numeroase aplicaţii se găseşte expusă în monografia [52] (vezi şi [4], [5]). Metoda luării mediei, în forma ei cea mai generală, a fost fundată de N. N. Bogoliubov în [53]. O expunere amănunţită a

metodei se găseşte în [54]. Rezultatele din § 6 sînt publicate în [55], [56]. Teorema lui F. Browder este dată în [57]. Teoria sistemelor autonome este expusă după [58]. Rezultatul lui E.A. Coddington şi N. Levinson pomenit în § 8 se găseşte în [4]. Teorema lui Andronov şi Witt pentru soluţii periodice de speţa a doua a fost dată în [59]. Expunerea din text e nouă. Metoda lui L. Cesari a fost prezentată după [60]. Rezultatele din § 11 se găsesc în [61]. Teorema 3.18 a fost dată într-o formulare ceva mai generală pentru cazul soluţiilor periodice în [62], iar pentru cazul soluţiilor aproape-periodice în [63]. Teorema 3.19 este nouă. Teorema 3.20 pentru cazul aproape-periodic este nouă. Pentru cazul periodic demonstraţia e nouă, iar rezultatul a fost dat în [64].

CAPITOLUL IV

# SISTEME CU ARGUMENT ÎNTÎRZIAT

Într-o serie de împrejurări nu se poate neglija durata de transmitere a acțiunii, ceea ce face ca forțele care intervin în sistem să depindă în fiecare moment de starea sistemului nu numai în momentul considerat, ci și în momentele anterioare. Astfel apar sistemele de ecuații diferențiale cu argument întîrziat. În cele ce urmează vom schița unele probleme calitative în teoria sistemelor cu argument întîrziat.

## § 1. TEOREMA DE EXISTENȚĂ. PROPRIETĂȚI GENERALE

Să considerăm un sistem de forma

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = f[t, x(t), x(t-\tau)], \tag{1}$$

unde $\tau > 0$; presupunem că $f$ este continuă în raport cu ansamblul argumentelor.

Pentru un asemenea sistem soluția se construiește, prin „metoda pașilor", în felul următor : fie dată o funcție $\varphi_0(t)$ continuă pe segmentul $[t_0 - \tau,\ t_0]$. Formăm sistemul

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f[t, x, \varphi_0(t-\tau)], \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau$$

și considerăm o soluție a acestui sistem determinată de condiția inițială $x(t_0) = \varphi(t_0)$. Fie $\varphi_1(t)$ această soluție, care există pe baza ipotezelor de continuitate făcute. Dacă această soluție este prelungibilă pe tot segmentul $[t_0,\ t_0 + \tau]$, formăm noul sistem

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f[t, x, \varphi_1(t-\tau)], \quad t_0 + \tau \leqslant t \leqslant t_0 + 2\tau$$

şi considerăm o soluţie a acestui sistem determinată de condiţia iniţială $x(t_0+\tau)=\varphi_1(t_0+\tau)$. Fie $\varphi_2(t)$ această soluţie. În general, presupunînd că $\varphi_{k-1}(t)$ este prelungibilă pe intervalul $[t_0+(k-2)\tau,\ t_0+(k-1)\tau]$, se formează sistemul

$$\frac{dx}{dt}=f[t,x,\varphi_{k-1}(t-\tau)], \qquad t_0+(k-1)\tau\leqslant t\leqslant t_0+k\tau$$

şi se consideră o soluţie a lui cu

$$x(t_0+(k-1)\tau)=\varphi_{k-1}[t_0+(k-1)\tau]$$

care se notează $\varphi_k(t)$. O soluţie a sistemului (1), $x(t)$, definită de funcţia iniţială $\varphi_0(t)$ va fi dată de relaţiile $x(t)=\varphi_k(t)$ pentru $t\in[t_0+(k-1)\tau,\ t_0+k\tau]$, $k=0,1,\ldots$ Funcţia $x(t)$ este evident continuă; prin însăşi construcţia ei, funcţia $x(t)$ este derivabilă în punctele interioare ale intervalelor $[t_0+(k-1)\tau,\ t_0+k\tau]$, $k\geqslant 1$. Se vede de asemenea că $x(t)$ e derivabilă şi are derivată continuă şi în punctele $t_0+k\tau$, $k\geqslant 1$. În punctul $t_0$ există numai derivata la dreapta.

Dacă $f(t,x,y)$ verifică condiţia Lipschitz în raport cu $x$, oricare ar fi $y$, atunci există o singură soluţie care pe $[t_0-\tau,t_0]$ coincide cu $\varphi_0$, deoarece funcţiile $\varphi_k(t)$ rezultă determinate unic şi orice soluţie trebuie să coincidă cu $\varphi_k(t)$ în $[t_0+(k-1)\tau,\ t_0+k\tau]$.

Sistemul (1) reprezintă tipul cel mai simplu de sistem cu argument întîrziat. Sînt posibile situaţii în care să apară valorile funcţiei $x(t)$ cu diferite întîrzieri, şi în sfîrşit aceste întîrzieri pot să depindă de $t$. Putem considera astfel sisteme de forma

$$\frac{dx(t)}{dt}=f[t,x(t),x(t-\tau_1(t)),x(t-\tau_2(t)),\ldots,x(t-\tau_m(t))].$$

Pentru asemenea sisteme se presupune că $\tau_j(t)\geqslant 0$ şi se consideră mulţimea $E_{t_0}$ formată din valorile $t-\tau_j(t)$, $t\geqslant t_0$ care sînt mai mici sau egale cu $t_0$. Funcţia iniţială $\varphi_0$ se dă pe mulţimea $E_{t_0}$.

Mai general, putem considera sisteme de forma

$$\frac{dx(t)}{dt}=f[t,x(t+s)], \tag{2}$$

unde pentru fiecare $t$ fixat componentele vectorului $f$ sînt funcţionale definite pe mulţimea funcţiilor continue date pe $[-\tau,0]$, $\tau>0$. Funcţia $f$ depinde astfel de întreaga comportare a funcţiei $x$ anterioară momentului $t$. Vom presupune dată funcţia iniţială $\varphi$ continuă pe $[t_0-\tau,\ t_0]$. Considerăm spaţiul funcţiilor continue, date pe $[t_0-\tau,\ t_0+h]$ cu $h>0$ suficient de mic, cu norma obişnuită a convergenţei uniforme, $\|u\|=\sup\limits_{t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0+h}|u(t)|$; submulţimea funcţiilor din acest spaţiu care pe $[t_0-\tau,\ t_0]$ coincid

cu $\varphi$ formează evident un subspaţiu complet. Fie $A\ [u]$ operatorul definit pe acest subspaţiu complet prin relaţiile

$$A\,[u] = \varphi\,(t_0) + \int_{t_0}^{t} f\,[\sigma, u\,(\sigma + s)]\,\mathrm{d}\sigma \quad \text{pentru } t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h,$$

$$A\,[u] = \varphi\,(t) \qquad\qquad \text{pentru } t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0 .$$

Evident, operatorul $A$ aplică subspaţiul considerat în el însuşi. Vom presupune că $f$ verifică o condiţie de tip Lipschitz şi vom demonstra că $A$ este o contracţie.

Avem

$$|A\,[u_1] - A\,[u_2]| = \left| \int_{t_0}^{t} \{f\,[\sigma, u_1(\sigma + s)] - f\,[\sigma, u_2(\sigma + s)]\}\,\mathrm{d}\sigma \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} |f\,[\sigma, u_1(\sigma + s)] - f\,[\sigma, u_2(\sigma + s)]\,|\,\mathrm{d}\sigma \quad \text{pentru} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h,$$

$$A\,[u_1] - A\,[u_2] \equiv 0 \quad \text{pentru } t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0 .$$

Dacă presupunem că

$$|f(t, \varphi_1) - f(t, \varphi_2)| < L\, \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

pentru $\varphi_1$, $\varphi_2$ într-o vecinătate a lui $\varphi(t_0 + s)$, atunci, pentru $h$ suficient de mic şi $u_1, u_2$ în această vecinătate, va rezulta că $A\,[u_1]$ şi $A\,[u_2]$ sînt în aceeaşi vecinătate şi în plus

$$|A\,[u_1] - A\,[u_2]| \leqslant hL\, \|u_1 - u_2\|,$$

deci pentru $h$ suficient de mic, $A$ este o contracţie. Rezultă în aceste condiţii că $A$ admite un punct fix şi că acesta este unic. Dacă $x(t)$ este punctul fix al operatorului $A$, avem

$$x\,(t) = \varphi\,(t) \quad \text{pentru} \quad t \in [t_0 - \tau,\ t_0\,]$$

şi

$$x\,(t) = \varphi\,(t_0) + \int_{t_0}^{t} f\,[\sigma, x\,(\sigma + s)]\,\mathrm{d}\sigma \quad \text{pentru } t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h,$$

deci

$$\frac{\mathrm{d}x\,(t)}{\mathrm{d}t} = f\,[t, x\,(t + s)]$$

şi $x(t)$ e soluţie a sistemului (2).

În acest fel, dacă $f$ verifică o condiţie de tip Lipschitz este demonstrată teorema de existenţă şi unicitate pentru sistemele generale de forma (2).

Ca şi în cazul sistemelor de ecuaţii diferenţiale ordinare, această teoremă are un caracter local.

Vom nota, ca şi în cazul sistemelor de ecuaţii diferenţiale ordinare, cu $x(t;\ t_0, \varphi)$ soluţia sistemului (2) definită pentru $t \geqslant t_0 - \tau$, care pe $[t_0, t_0 - \tau]$ coincide cu funcţia iniţială $\varphi$.

Presupunînd verificată în continuare condiția de tip Lipschitz să demonstrăm inegalitatea fundamentală*)

$$| x(t; t_0, \varphi_1) - x(t; t_0, \varphi_2) | \leqslant \| \varphi_1 - \varphi_2 \| e^{L(t-t_0)} . \qquad (3)$$

Pentru $t = t_0$ inegalitatea este evident verificată. Presupunem că ea nu este verificată pentru toți $t$ pentru care soluțiile sînt definite și fie $t_1$ marginea superioară a punctelor $t$ pentru care inegalitatea are loc. Avem

$$| x(t_1; t_0, \varphi_1) - x(t_1; t_0, \varphi_2) | = \| \varphi_1 - \varphi_2 \| e^{L(t_1-t_0)}$$

și pentru orice $n$ există $t_1 < t_n < t_1 + \frac{1}{n}$ astfel încît

$$| x(t_n; t_0, \varphi_1) - x(t_n; t_0, \varphi_2) | > \| \varphi_1 - \varphi_2 \| e^{L(t_n-t_0)} .$$

Rezultă

$$\frac{1}{t_n - t_1} \{ | x(t_n; t_0, \varphi_1) - x(t_n; t_0, \varphi_2) | - | x(t_1; t_0, \varphi_1) -$$

$$- x(t_1; t_0, \varphi_2) | \} > \frac{1}{t_n - t_1} [e^{L(t_n-t_0)} - e^{L(t_1-t_0)}] \| \varphi_1 - \varphi_2 \|$$

deci

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{1}{h} \{ | x(t_1 + h; t_0, \varphi_1) - x(t_1 + h; t_0, \varphi_2) | - | x(t_1; t_0, \varphi_1) -$$

$$- x(t_1; t_0, \varphi_2) | \} \geqslant L e^{L(t_1-t_0)} \| \varphi_1 - \varphi_2 \| = L | x(t_1; t_0, \varphi_1) - x(t_1; t_0, \varphi_2) | .$$

Din sistemul (2) rezultă

$$\left| \frac{dx(t; t_0, \varphi_1)}{dt} - \frac{dx(t; t_0, \varphi_2)}{dt} \right| = \left| f[t, x(t+s; t_0, \varphi_1)] - \right.$$

$$\left. - f[t, x(t+s; t_0, \varphi_2)] \right| \leqslant L \sup_{-\tau \leqslant s \leqslant 0} | x(t+s; t_0, \varphi_1) - x(t+s; t_0, \varphi_2) |$$

deci

$$\left| \frac{dx(t_1; t_0, \varphi_1)}{dt} - \frac{dx(t_1; t_0, \varphi_2)}{dt} \right| < L \sup_{-\tau \leqslant s \leqslant 0} | x(t_1 + s; t_0, \varphi_1) -$$

$$- x(t_1 + s; t_0, \varphi_2) | \leqslant L \| \varphi_1 - \varphi_2 \| e^{L(t_1-t_0)} = L | x(t_1; t_0, \varphi_1) - x(t_1; t_0, \varphi_2) | ,$$

căci pentru $s \leqslant 0$ avem $t_1 + s \leqslant t_1$ și inegalitatea (3) este verificată.

Avem însă evident

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{1}{h} \{ | u(t_1 + h) | - | u(t_1) | \} \leqslant \left| \frac{du(t_1)}{dt} \right|$$

*) Demonstrația de mai jos reproduce pe cea dată de N. N. Krasovski.

deci

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{1}{h} \{ | x(t_1 + h; t_0, \varphi_1) - x(t_1 + h; t_0, \varphi_2) | - | x(t_1; t_0, \varphi_1) - x(t_1; t_0, \varphi_2) | \} < L | x(t_1; t_0, \varphi_1) - x(t_1; t_0, \varphi_2) |$$

ceea ce contrazice inegalitatea (*). Existența lui $t_1$ este contradictorie, deci inegalitatea (3) este valabilă pentru toate valorile $t$ pentru care soluțiile sînt prelungibile.

În aceleași condiții, să considerăm și sistemul

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = f[t, u(t+s)] + g[t, u(t+s)]. \tag{4}$$

Demonstrăm inegalitatea

$$| x(t; t_0, \varphi) - u(t; t_0, \varphi) | \leqslant (\mathrm{e}^{L(t-t_0)} - 1) \sup | g(t, u(t+s)) |. \tag{5}$$

Folosim același procedeu ca mai sus. Pentru $t = t_0$, inegalitatea (5) este verificată; fie $t_1$ marginea superioară a mulțimii valorilor $t$ pentru care ea rămîne verificată. Avem

$$| x(t_1; t_0, \varphi) - u(t_1; t_0, \varphi) | = (\mathrm{e}^{L(t_1-t_0)} - 1) \sup | g(t, u(t+s)) |$$

și pentru orice $n$ există $t_1 < t_n < t_1 + \frac{1}{n}$ astfel încît

$$| x(t_n; t_0, \varphi) - u(t_n; t_0, \varphi) | > [\mathrm{e}^{L(t_n-t_0)} - 1] \sup | g(t, u(t+s)) |,$$

Rezultă

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{1}{h} \{ | x(t_1 + h; t_0, \varphi) - u(t_1 + h; t_0, \varphi) | - | x(t_1; t_0, \varphi) - u(t_1; t_0, \varphi) | \} \geqslant L \mathrm{e}^{L(t_1-t_0)} \sup | g(t, u(t+s)) |. \tag{**}$$

Pe de altă parte,

$$\left| \frac{\mathrm{d}x(t_1; t_0, \varphi)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}u(t_1; t_0, \varphi)}{\mathrm{d}t} \right| < L \sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0} | x(t_1 + s; t_0, \varphi) - u(t_1 + s; t_0, \varphi)| + \sup | g(t, u(t+s))| \leqslant L(\mathrm{e}^{L(t-t_0)} - 1) \sup | g(t, u(t+s))| + \sup | g(t, u(t+s))| = L \mathrm{e}^{L(t-t_0)} \sup | g(t, u(t+s))| + (1 - L) \sup | g(t, u(t+s))| < L \mathrm{e}^{L(t-t_0)} \sup | g(t, u(t+s)) |$$

dacă presupunem $L > 1$.

Rezultă

$$\limsup \frac{1}{h} \{ | x(t_1 + h; t_0, \varphi,) - u(t_1 + h; t_0, \varphi)| - | x(t_1; t_0, \varphi) - u(t_1; t_0, \varphi)| \} < L \mathrm{e}^{L(t-t_0)} \sup | g(t, u(t+s))|$$

ceea ce contrazice (**). Existența lui $t_1$ rezultă contradictorie și deci inegalitatea (5) e demonstrată pentru toți $t > t_0$ pentru care soluțiile sistemelor (2) și (4) există.

Să presupunem acum că $f$ are componentele diferențiabile în sensul lui Fréchet. Atunci vom putea scrie

$$f[t, x(t+s)] - f[t, x_0(t+s)] = A(t, x(t+s) - x_0(t+s)) + o(\|x - x_0\|),$$

unde $A(t,\varphi)$ este un vector ale cărui componente sînt pentru fiecare $t$ funcționale liniare, deci, pe baza teoremei lui Riesz,

$$A(t, \varphi) = \int_{-\tau}^{0} (\mathrm{d}_s \eta(t, s)) \varphi(s)$$

$\eta(t,s)$ fiind o matrice, care depinde de soluția $x_0$. Sistemul liniar

$$\dot{y}(t) = \int_{-\tau}^{0} (\mathrm{d}_s \eta(t, s)) y(t+s) \tag{6}$$

se numește ***sistemul în variații*** corespunzător sistemului (2) și soluției $x_0$

Pentru a evita scrierea incomodă (6), cînd vom avea de-a face cu sisteme liniare generale de această formă vom presupune că $y$ este un vector linie și vom scrie

$$\dot{y}(t) = \int_{-\tau}^{0} y(t+s) \mathrm{d}_s \eta(t,s) \cdot \tag{7}$$

În cazul sistemelor de forma (1), presupunînd că $f(t,u,v)$ este diferențiabilă, sistemul în variații se scrie

$$\dot{y}(t) = f'_u[t, x_0(t), x_0(t-\tau)] y(t) + f'_v[t, x_0(t), x_0(t-\tau)] y(t-\tau). \tag{7'}$$

Să presupunem că $f$ este diferențiabilă în sensul arătat mai sus și fie $x(t; t_0, \varphi_0)$ și $x(t; t_0, \varphi)$ două soluții ale sistemului (2). Putem scrie, notînd

$$u(t) = x(t; t_0, \varphi) - x(t; t_0, \varphi_0),$$

$$\dot{u}(t) = f[t, x(t+s; t_0, \varphi)] - f[t, x(t+s; t_0, \varphi_0)] =$$

$$= A(t, u(t+s)) + o(\|u\|).$$

Fie $y(t)$ soluția sistemului în variații (6) care pe $[t_0 - \tau, t_0]$ coincide cu $\varphi - \varphi_0$. Atunci pe baza inegalității (5) putem scrie

$$|x(t; t_0, \varphi) - x(t; t_0, \varphi_0) - y(t)| = o(\|x(t; t_0, \varphi) - x(t; t_0, \varphi_0)\|)$$

și ținînd seama și de inegalitatea (3), rezultă

$$|x(t; t_0, \varphi) - x(t; t_0, \varphi_0) - y(t)| = o(\|\varphi - \varphi_0\|). \tag{8}$$

În încheierea acestor considerații introductive să observăm că unui sistem cu întîrziere de forma (2) i se atașează un operator $U_t$ definit pe spațiul funcțiilor continue pe $[-\tau, 0]$ prin formula

$$U_t \varphi = x[t+s; 0, \varphi], \; s \in [-\tau, 0], \quad t \geqslant 0.$$

Acest operator are următoarele proprietăți:

1°. Este continuu pentru orice $t$ fixat; acest lucru rezultă din inegalitatea (3).

2°. Avem $U_0\,\varphi = \varphi$, deci $U_0$ este operatorul identic.

3°. Dacă sistemul este liniar, de forma (6) respectiv (7), atunci $U_t$ este un operator liniar. Într-adevăr, din liniaritatea sistemului rezultă că orice combinație liniară de soluții este soluție, deci

$$y(t\,;t_0\,,\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)=\alpha_1 y(t\,;t_0\,,\varphi_1)+\alpha_2 y(t\,;t_0\,,\varphi_2)$$

deoarece în ambii membrii ai egalității se află soluții și aceste soluții coincid pe $[t_0-\tau,\ t_0]$.

Din egalitatea scrisă rezultă

$$U_t(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)=\alpha_1 U_t\,\varphi_1+\alpha_2 U_t\,\varphi_2$$

deci $U_t$ este liniar.

Relația (8) arată că dacă (6) este sistemul în variații atașat sistemului (2) și soluției $x\,(t\,;0,\ \varphi_0)$ și dacă notăm cu $U_t$ operatorul atașat lui (2) și cu $V_t$ operatorul atașat sistemului (6), atunci

$$\|U_t\varphi-U_t\varphi_0-V_t(\varphi-\varphi_0)\|=o\,(\|\varphi-\varphi_0\|),$$

deci $V_t$ este diferențiala Fréchet a lui $U_t$ în punctul $\varphi_0$.

## § 2. TEORIA STABILITĂȚII LIAPUNOV

Trecem la stabilirea propozițiilor fundamentale asupra stabilității Liapunov la sistemele cu întîrziere.

DEFINIȚIE. *Soluția $x_0(t)$ a sistemului (2) se numește uniform stabilă dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există $\delta(\varepsilon)>0$ astfel ca dacă $|\varphi(s)-x_0(s)|<\delta$ pentru $s\in[t_0-\tau,\ t_0]$, atunci $|x\,(t\,;\ t_0\,,\ \varphi)-x_0(t)|<\varepsilon$ pentru $t\geqslant t_0$.*

Ca și în cazul sistemelor de ecuații diferențiale ordinare, studiul stabilității unei soluții $x_0(t)$ se reduce la studiul stabilității soluției banale.

TEOREMA 4.1. *Să presupunem că există o funcțională $V\,[t,\ \varphi]$ definită pentru orice $t$ pe sfera $\|\varphi\|\leqslant H$ din spațiul funcțiilor continue pe $[-\tau,0]$ cu proprietățile:*

1°. *Există funcțiile $a\,(r)$, $b(r)$ continue, pozitive și monoton crescătoare, cu $a\,(0)=b\,(0)=0$, astfel ca $a\,(\|\varphi\|)\leqslant V\,[t,\varphi]\leqslant b\,(\|\varphi\|)$*

2°. *$V^*(t)=V\,[t,\ x\,(t+s\,;\ t_0,\ \varphi)]$ este o funcție monoton descrescătoare pentru $t\geqslant t_0$, $s\in[-\tau,\ 0]$.*

*Atunci soluția banală a sistemului (2) este uniform stabilă.*

*Demonstrație.* Fie $\varepsilon>0$, $\delta\,(\varepsilon)<b^{-1}\,[a\,(\varepsilon)]$, $t_0\geqslant 0$, $\varphi$ o funcție continuă pe $[t_0-\tau,t_0]$, $\|\varphi\|<\delta\,(\varepsilon)$. Considerăm soluția $x\,(t\,;t_0\,,\varphi)$ și formăm funcția

$$V^*(t)=V\,[t,x\,(t+s\,;t_0\,,\varphi)]\,.$$

Conform ipotezei, această funcţie este monoton descrescătoare, deci

$$V^*(t) \leqslant V^*(t_0) = V[t_0, x(t_0+s; t_0, \varphi)] =$$
$$= V[t_0, \varphi(t_0+s)] \leqslant b(\|\varphi\|) < b(\delta(\varepsilon)) < a(\varepsilon).$$

Din $a(\|x(t+s; t_0, \varphi)\|) < a(\varepsilon)$ şi monotonia funcţiei $a(r)$ rezultă $\|x(t+s; t_0, \varphi)\| < \varepsilon$, deci $|x(t; t_0, \varphi)| < \varepsilon$, pentru $t \geqslant t_0$.

TEOREMA 4.2. *Dacă soluţia banală a sistemului* (2) *este uniform stabilă, există o funcţională* $V[t, \varphi]$ *cu proprietăţile din teorema precedentă.*

*Demonstraţie.* Fie $G(r)$ o funcţie continuă pozitivă şi monoton crescătoare pentru $r > 0$, $G(0) = 0$. Definim funcţionala $V[t,\varphi]$ prin relaţia

$$V[t, \varphi] = \sup_{\sigma \geqslant 0} G[\|x(t+\sigma+s; t, \varphi(u-t))\|],\quad t-\tau \leqslant u \leqslant t,\ -\tau \leqslant s \leqslant 0.$$

Deoarece pentru $\sigma = 0$ avem

$$\|x(t+s; t, \varphi(u-t))\| = \|\varphi(u-t)\| = \|\varphi\|$$

rezultă că

$$V[t, \varphi] \geqslant G(\|\varphi\|).$$

Din stabilitatea uniformă a soluţiei banale a sistemului (2) rezultă că există o funcţie $\delta(\varepsilon)$ cu proprietatea că $\|\varphi\| < \delta$ implică $|x(t; t_0, \varphi)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0$. După cum s-a arătat în capitolul I, funcţia $\delta(\varepsilon)$ poate fi aleasă monoton crescătoare şi continuă, deci există funcţia inversă $\varepsilon(\delta)$ cu proprietatea că $|x(t; t_0, \varphi)| < \varepsilon(\|\varphi\|)$, pentru $t \geqslant t_0 - \tau$ (dacă presupunem în plus, ceea ce nu restrînge generalitatea, că $\delta(\varepsilon) < \varepsilon$). De aici rezultă că

$$\|x(t+\sigma+s; t, \varphi(u-t))\| < \varepsilon(\|\varphi\|)$$

şi deci

$$V[t, \varphi] < G[\varepsilon(\|\varphi\|)].$$

Mai departe,

$$V^*(t) = V[t, x(t+s; t_0, \varphi)] = \sup_{\sigma \geqslant 0} G[\|x(t+\sigma+s; t, x(t+s, t_0, \varphi))\|] =$$
$$= \sup_{\sigma \geqslant 0} G[\|x(t+\sigma+s; t_0, \varphi)\|],$$

căci soluţiile $x(u; t, x(t+s; t_0, \varphi))$ şi $x(u; t_0, \varphi)$ coincid pentru $u \geqslant t$ deoarece coincid pentru toţi $t - \tau \leqslant u \leqslant t$.

Fie $t_1 > t_2$, $d = t_1 - t_2$. Avem

$$V^*(t_1) = \sup_{\sigma \geqslant 0} G[\|x(t_1+\sigma+s; t_0, \varphi)\|] = \sup_{\sigma \geqslant 0} G[\|x(t_2+d+\sigma+s; t_0, \varphi)\|] =$$
$$= \sup_{\sigma \geqslant d} G[\|x(t_2+\sigma+s; t_0, \varphi)\|] = \sup_{\sigma \geqslant 0} G[\|x(t_2+\sigma+s; t_0, \varphi)\|] = V^*(t_2)$$

deci $V^*(t)$ este monoton descrescătoare.

DEFINIŢIE. *Soluţia banală a sistemului* (2) *se numeşte uniform asimptotic stabilă dacă există* $\delta_0 > 0$ *şi funcţiile* $\delta(\varepsilon)$, $T(\varepsilon)$ *astfel ca* $\|\varphi\| < \delta$ *să implice* $|x(t; t_0, \varphi)| < \varepsilon$ *pentru* $t \geqslant t_0$ *iar* $\|\varphi\| < \delta_0$ *şi* $t \geqslant t_0 + T$ *să implice* $|x(t; t_0, \varphi)| < \varepsilon$.

TEOREMA 4.3. *Să presupunem că există o funcţională* $V[t, \varphi]$ *definită pentru orice* $t \geqslant 0$ *pe sfera* $\|\varphi\| \leqslant H$ *din spaţiul funcţiilor continue pe* $[-\tau, 0]$, *cu proprietăţile*:

1°. *Există funcţiile* $a(r)$, $b(r)$, $c(r)$ *continue, pozitive şi monoton crescătoare pentru* $r > 0$, $a(0) = b(0) = c(0) = 0$, *astfel ca*

$$a(\|\varphi\|) \leqslant V[t, \varphi] \leqslant b(\|\varphi\|),$$

$$2°.\ \limsup_{h \to 0+} \frac{V[t+h, x(t+h+s; t, \varphi)] - V[t, \varphi(t+s)]}{h} \leqslant -c(\|\varphi\|).$$

*Atunci soluţia banală a sistemului* (2) *este uniform asimptotic stabilă.*

*Demonstraţie.* Fie $\delta(\varepsilon) < b^{-1}[a(\varepsilon)]$, $\|\varphi\| < \delta(\varepsilon)$, $V^*(t) = V[t, x(t + s; t_0, \varphi)]$.

Avem

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{V^*(t+h) - V^*(t)}{h} =$$

$$= \limsup_{h \to 0+} \frac{V[t+h, x(t+h+s; t_0, \varphi)] - V[t, x(t+s; t_0, \varphi)]}{h} =$$

$$= \limsup_{h \to 0+} \frac{V[t+h, x(t+h+s; t_0, \varphi))] - V[t, x(t+s; t_0, \varphi)]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant -c(\|x(t+s; t_0\varphi)\|) < 0$$

dacă $\|\varphi\| \neq 0$. Din

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{V^*(t+h) - V^*(t)}{h} < 0$$

rezultă că $V^*(t)$ este monoton descrescătoare, deci ca în teorema 4.1, rezultă $\|x(t; t_0, \varphi)\| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0$. Să observăm că deoarece $V^*(t)$ este monoton descrescătoare, ea este derivabilă aproape peste tot şi deci condiţia 2° este verificată aproape peste tot de derivata funcţiei $V^*$.

Fie $\delta_0 = \delta(H)$, $T(\varepsilon) = \dfrac{b[\delta_0]}{c[\delta(\varepsilon)]}$, $\|\varphi\| < \delta_0$. Dacă pentru $t \in [t_0, t_0 + T]$ am avea

$$\|x(t+s; t_0, \varphi)\| \geqslant \delta(\varepsilon),$$

ar rezulta

$$c(\|x(t+s; t_0, \varphi)\|) \geqslant c[\delta(\varepsilon)]$$

şi deci

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{V^*(t+h) - V^*(t)}{h} \leqslant -c[\delta(\varepsilon)],$$

de unde, pe baza unei proprietăţi din teoria funcţiilor de variabilă reală,

$$V^*(t) - V^*(t_0) \leqslant - c[\delta(\varepsilon)]\,(t - t_0),$$

deci

$$V^*(t) \leqslant V^*(t_0) - c[\delta(\varepsilon)](t - t_0) \leqslant b(\|\varphi\|) - c[\delta(\varepsilon)]\,(t - t_0) \leqslant b(\delta_0) - c[\delta(\varepsilon)](t - t_0).$$

De aici

$$V^*(t_0 + T) < b(\delta_0) - c[\delta(\varepsilon)]\,T = 0$$

ceea ce este contradictoriu. Rezultă că există $t' \in [t_0, t_0 + T]$ astfel ca $\|x(t' + s; t_0, \varphi)\| < \delta(\varepsilon)$, deci $|x(t; t', x(t' + s; t_0, \varphi))| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t'$. Dar aceasta înseamnă că pentru $t \geqslant t_0 + T$ avem $|x(t; t_0, \varphi)| < \varepsilon$ şi teorema e demonstrată.

TEOREMA 4.4. *Dacă soluţia banală a sistemului* (2) *este uniform asimptotic stabilă, există o funcţională* $V[t, \varphi]$ *cu proprietăţile din teorema precedentă.*

*Demonstraţie.* Fie, ca în demonstraţia teoremei 1.6, $G(r)$ o funcţie cu $G(0) = 0$, $G'(0) = 0$, $G'(r) > 0$, $G''(r) > 0$ pentru $r > 0$. Alegem

$$V[t, \varphi] = \sup_{\sigma \geqslant 0} G(\| x(t + \sigma + s; t, \varphi(u - t))\|)\frac{1 + \alpha\sigma}{1 + \sigma}\cdot$$

Demonstraţia decurge mai departe ca în cazul teoremei 1.6 şi nu o mai repetăm.

Ţinînd seama de faptul că $f$ verifică o condiţie de tip Lipschitz şi folosind evaluarea (3), se demonstrează la fel ca în teorema 1.6′ că se poate alege funcţia $G$ astfel încît funcţionala $V[t, \varphi]$ să verifice inegalitatea

$$|V[t, \varphi_1] - V[t, \varphi_2]| \leqslant M\|\varphi_1 - \varphi_2\|,$$

pentru $\|\varphi_1\| < \delta(\delta_0)$, $\|\varphi_2\| < \delta(\delta_0)$.

TEOREMA 4.5. *Dacă soluţia banală a sistemului liniar* (6), *respectiv* (7) *este uniform asimptotic stabilă, atunci ea este exponenţial stabilă, adică*

$$|y(t; t_0, \varphi)| \leqslant Be^{-\alpha(t-t_0)}\|\varphi\|.$$

*Demonstraţie.* Definim operaţia $U_{t,t_0}$ prin relaţia

$$U_{t,t_0}\varphi = y(s; t_0, \varphi), \quad t - \tau \leqslant s \leqslant t.$$

Această operaţie aplică spaţiul funcţiilor continue pe $[t_0 - \tau, t_0]$ în spaţiul funcţiilor continue pe $[t - \tau, t]$. Din cauza liniarităţii sistemului această operaţie rezultă liniară. Inegalitatea fundamentală (3) arată că ea este şi continuă. Rezultă deci că ea este mărginită, deci există $\|U_{t,t_0}\|$ cu proprietatea

$$\sup_{\|\varphi\| \leqslant 1} \|U_{t,t_0}\varphi\| = \|U_{t,t_0}\|.$$

Pentru $\|\varphi\| \leqslant \delta_0$, $t \geqslant t_0 + T$ avem $|y(t; t_0, \varphi)| < \varepsilon$, deci pentru $t \geqslant t_0 + T + \tau$ rezultă $\|U_{t,t_0}\varphi\| < \varepsilon$.

Fixăm pe $\varepsilon$ cu $0 < \varepsilon < 1$. Fie $\varphi_0$ arbitrar cu $\|\varphi_0\| < 1$; atunci $\|\delta_0 \varphi_0\| \leqslant \delta_0$, deci $\|U_{t,t_0}\delta_0\varphi_0\| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0 + T + \tau$, deci $\|U_{t,t_0}\varphi_0\| < \frac{\varepsilon}{\delta_0}\cdot$ Cum $\varphi_0$ este arbitrar cu $\|\varphi_0\| < 1$, rezultă $\|U_{t,t_0}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta_0}$ pentru $t \geqslant t_0 + T + \tau$ sau $\|U_{t,t_0}\| \leqslant \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0 + T_1 + \tau$ unde am notat $T_1(\varepsilon) = T(\delta_0\varepsilon)$. Avem relaţia

$$U_{t,t_0}\varphi = U_{t,t_0+T_1+\tau}(U_{t_0+T_1+\tau,t_0}\varphi)$$

(care revine la

$$y(s;\, t_0,\, \varphi) = y(s,\, t_0 + T_1 + \tau;\, y(u;\, t_0,\, \varphi)), \quad u \in [t_0 + T_1,\, t_0 + T_1 + \tau]).$$

De aici rezultă

$$\|U_{t,t_0}\varphi\| \leqslant \|U_{t,t_0+T_1+\tau}\|\,\|U_{t_0+T_1+\tau,t_0}\varphi\| \leqslant \varepsilon^2\|\varphi\| \text{ pentru } t \geqslant t_2 + 2(T_1 + \tau),$$

deci

$$\|U_{t,t_0}\| \leqslant \varepsilon^2 \text{ pentru } t \geqslant t_0 + 2(T_1 + \tau).$$

Prin inducţie rezultă imediat $\|U_{t,t_0}\| \leqslant \varepsilon^m$ pentru $t \geqslant t_0 + m(T_1 + \tau)$ şi mai departe demonstraţia continuă la fel ca la sistemele de ecuaţii diferenţiale ordinare (Cap. I, § 4).

TEOREMA 4.4′. *Dacă soluţia banală a sistemului liniar* (6) *respectiv* (7) *este uniform asimptotic stabilă, există o funcţională* $V[t, \varphi]$ *definită pentru orice* $t \geqslant 0$ *pe spaţiul funcţiilor continue pe* $[-\tau, 0]$, *cu proprietăţile*:

1° $\|\varphi\|^2 \leqslant V[t, \varphi] \leqslant K_1\|\varphi\|^2$;

2° $|V[t, \varphi_1] - V[t, \varphi_2]| \leqslant K_1(\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|)\,\|\varphi_1 - \varphi_2\|$;

3° $$\limsup_{h \to 0+} \frac{V[t + h,\, y(t + h + s;\, t_0,\, \varphi)] - V[(t,\, y(t + s;\, t_0,\, \varphi)]}{h} \leqslant -\|y(t + s;\, t_0,\, \varphi)\|^2.$$

*Demonstraţie*. Fie

$$V[t, \varphi] = \int_0^\infty \|y(t + u + s;\, t, \varphi)\|^2 du + \sup_{\sigma \geqslant 0}\|y(t+\sigma+s;\, t, \varphi)\|^2;$$

reamintim că $\|\varphi\| = \sup_{-\tau \leqslant s \leqslant 0}|\varphi(s)|$. Convergenţa integralei este asigurată datorită stabilităţii exponenţiale.

Evident,

$$V[t, \varphi] \geqslant \sup_{\sigma \geqslant 0}\|y(t + \sigma + s;\, t,\, \varphi)\|^2 \geqslant \|\varphi\|^2.$$

Din

$$|y(t;\, t_0,\, \varphi)| > Be^{-\alpha(t-t_0)}\|\varphi\|$$

rezultă

$$|y(t + u + s;\, t, \varphi)| \leqslant Be^{-\alpha(u+s)}\|\varphi\|, \text{ deci } \|y(t + u + s;\, t, \varphi) \leqslant Be^{\alpha\tau}e^{-\alpha u}\|\varphi\|;$$

deducem de aici

$$V[t, \varphi] \leqslant B^2 e^{2\alpha\tau} \int_0^\infty e^{-2\alpha u} du + B^2 e^{2\alpha\tau} \|\varphi\|^2 = \left(1 + \frac{1}{2\alpha}\right) B^2 e^{2\alpha\tau} \|\varphi\|^2 = K_1 \|\varphi\|^2.$$

Mai departe,

$$|V[t, \varphi_1] - V[t, \varphi_2]| \leqslant \left| \int_0^\infty \|y(t+u+s; t, \varphi_1)\|^2 du - \int_0^\infty \|y(t+u+s; t, \varphi_2)\|^2 du \right| +$$

$$+ |\sup_{\sigma \geqslant 0} \|y(t+\sigma+s; t, \varphi_1)\|^2 - \sup_{\sigma \geqslant 0} \|y(t+\sigma+s; t, \varphi_2)\|^2| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty | \|y(t+u+s; t, \varphi_1)\|^2 - \|y(t+u+s; t, \varphi_2)\|^2 | du +$$

$$+ \sup_{\sigma \geqslant 0} | \|y(t+\sigma+s; t, \varphi_1)\|^2 - \|y(t+\sigma+s; t, \varphi_2)\|^2 | \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty (\|y(t+u+s; t, \varphi_1)\| + \|y(t+u+s; t, \varphi_2)\|) \|y(t+u+s; t, \varphi_1) -$$

$$- y(t+u+s; t, \varphi_2)\| du + \sup_{\sigma \geqslant 0} (\|y(t+\sigma+s; t, \varphi_1)\| +$$

$$+ \|y(t+\sigma+s; t, \varphi_2)\|) \sup_{\sigma \geqslant 0} \|y(t+\sigma+s; t, \varphi_1) - y(t+\sigma+s; t, \varphi_2)\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty B e^{\alpha\tau} e^{-\alpha u} (\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|) B e^{\alpha\tau} e^{-\alpha u} \|\varphi_1 - \varphi_2\| +$$

$$+ B e^{\alpha\tau} (\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|) B e^{\alpha\tau} \|\varphi_1 - \varphi_2\| = B^2 e^{2\alpha\tau} \left(1 + \frac{1}{2\alpha}\right) (\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|) \|\varphi_1 - \varphi_2\| =$$

$$= K_1 (\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|) \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

Avem

$$V[t, y(t+s; t_0, \varphi)] = \int_0^\infty \|y(t+u+s; t, y(t+s; t_0, \varphi))\|^2 du +$$

$$+ \sup_{\sigma \geqslant 0} \|y(t+\sigma+s; t, y(t+s; t_0, \varphi))\|^2 = \int_0^\infty \|y(t+u+s; t_0, \varphi)\|^2 du +$$

$$+ \sup_{\sigma \geqslant 0} \|y(t+\sigma+s; t_0, \varphi)\|^2 = \int_t^\infty \|y(u+s; t_0, \varphi)\|^2 du +$$

$$+ \sup_{\sigma \geqslant 0} \|y(t+\sigma+s; t_0, \varphi)\|^2.$$

Am văzut în demonstrația teoremei 4.2 că $\sup_{\sigma \geqslant 0} \|y(t+\sigma+s; t_0, \varphi)\|^2$ este o funcție monoton descrescătoare. Rezultă de aici că

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{V[t+h, y(t+h+s; t_0, \varphi)] - V[t, y(t+s; t_0, \varphi)]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{d}{dt} \int_t^\infty \|y(u+s; t_0, \varphi)\|^2 du = -\|y(t+s; t_0, \varphi)\|^2.$$

Teorema este demonstrată.

Ca și în cazul sistemelor de ecuații diferențiale ordinare această teoremă va servi la demonstrarea unei teoreme de stabilitate după prima aproximație.

TEOREMA 4.6. *Să considerăm sistemul*

$$\dot{x}(t) = A(t, x(t+s)) + f(t, x(t+s)), \tag{9}$$

*unde* $A(t, x(t+s))$ *este pentru fiecare* $t$ *un vector ale cărui componente sînt funcționale liniare pe spațiul funcțiilor continue pe* $[-\tau, 0]$ *(cu norme mărginite ca funcții de* $t$*), iar componentele vectorului* $f$ *sînt pentru fiecare* $t$ *funcționale continue pe același spațiu, cu proprietatea* $|f(t, x(t+s))| < \gamma \|x(t+s)\|$, $\gamma$ *fiind suficient de mic, pentru* $\|x(t+s)\| \leqslant H$. *Dacă soluția banală a sistemului liniar de primă aproximație*

$$\dot{y}(t) = A(t, y(t+s)) \tag{10}$$

*este uniform asimptotic stabilă, atunci și soluția banală a sistemului* (9) *este uniform asimptotic stabilă.*

*Demonstrație.* Fie $V[t, \varphi]$ funcționala construită pentru sistemul (10) pe baza teoremei 4.4′. Considerăm o soluție $x(t; t_0, \varphi)$ a sistemului (9) cu $\|\varphi\|$ suficient de mică; fie

$$V^*(t) = V[t, x(t+s; t_0, \varphi)].$$

Evaluăm

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V^*(t+h) - V^*(t)}{h}.$$

Avem

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V^*(t+h) - V^*(t)}{h} \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{h\to 0+} \frac{V[t+h, y(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi))] - V[t, x(t+s; t_0, \varphi)]}{h} +$$

$$+ \limsup_{h\to 0 \geqslant} \frac{V[t+h, x(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi)] - V[t+h, y(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi))]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant -\|x(t+s; t_0, \varphi)\|^2 +$$

$$+ \limsup_{h\to 0+} \frac{|V[t+h, x(t+h+s; t, x(t+s; t_0 \varphi))] - V(t+h, y(t+h+s; t, x(t+s; t_0 \varphi))]|}{h}.$$

Avem

$$|V[t+h, x(t+h+s; t, x(t+s, t_0, \varphi))] -$$

$$- V[t+h, y(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi))]| \leqslant K_1(\|x(t+h+s; t_0, \varphi)\| +$$

$$+ \|y(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi))\|) \, \|x(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi)) -$$

$$- y(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi))\|.$$

Pe de altă parte, pe baza evaluării (3) avem

$$\| x(t+h+s;\, t,\, x(t+s;\, t_0,\, \varphi)) \| \leqslant e^{Lh} \| x(t+s;\, t_0,\, \varphi) \|,$$

iar pe baza evaluării (5)

$$\| x(t+h+s;\, t,\, x(t+s;\, t_0,\, \varphi)) - y(t+h+s;\, t,\, x(t+s;\, t_0,\, \varphi)) \| \leqslant$$
$$\leqslant (e^{Lh} - 1)\gamma e^{Lh} \| x(t+s;\, t_0,\, \varphi) \|.$$

Conform ipotezei făcute asupra sistemului liniar avem și

$$\| y(t+h+s;\, t,\, x(t+s;\, t_0,\, \varphi)) \| \leqslant B \| x(t+s;\, t_0,\, \varphi) \|.$$

Rezultă

$$| V[t+h,\, x(t+h+s;\, t,\, x(t+s;\, t_0,\, \varphi))] - V[t+h,\, y(t+h+$$
$$+s;\, t,\, x(t+s;\, t_0,\, \varphi))] | \leqslant K_1 (e^{Lh} + B) \| x(t+s;\, t_0,\, \varphi) \| (e^{Lh} -$$
$$-1)\gamma e^{Lh} \| x(t+s;\, t_0,\, \varphi) \| = K_1 \gamma (e^{Lh} + B)(e^{Lh} - 1) \| x(t+s;\, t_0,\, \varphi) \|^2.$$

De aici

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{| V[t+h,\, x(t+h+s;\, t,\, x(t+s;\, t_0,\, \varphi))] - V[t+h,\, y(t+h+s;\, t,\, x(t+s;\, t_0,\, \varphi))] |}{h} \leqslant$$
$$\leqslant LK_1 \gamma (1 + B) \| x(t+s;\, t_0,\, \varphi) \|^2.$$

Rezultă

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V^*(t+h) - V^*(t)}{h} \leqslant - \| x(t+s;\, t_0,\, \varphi) \|^2 + \gamma L K_1 (1 +$$
$$+ B) \| x(t+s;\, t_0,\, \varphi) \|^2 = - [1 - \gamma L K_1 (1+B)] \| x(t+s;\, t_0,\, \varphi) \|^2.$$

Pentru $\gamma < \dfrac{1}{LK_1(1+B)}$ avem

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V^*(t+h) - V^*(t)}{h} \leqslant -\gamma_1 \| x(t+s;\, t_0,\, \varphi) \|^2$$

ceea ce arată, pe baza teoremei 4.3, că soluția banală este uniform asimptotic stabilă. E ușor de văzut că stabilitatea este chiar exponențială căci din

$$V[t,\, \varphi] \geqslant \| \varphi \|^2,$$

rezultă

$$V^*(t) \geqslant \| x(t+s;\, t_0,\, \varphi) \|^2$$

și deci

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V^*(t+h) - V^*(t)}{h} \leqslant -\gamma_1 V^*(t)$$

sau

$$\frac{1}{V^*(t)}\limsup_{h\to 0+}\frac{V^*(t+h)-V^*(t)}{h}\leqslant -\gamma_1,$$

de unde rezultă

$$\limsup_{h\to 0+}\frac{\ln V^*(t+h)-\ln V^*(t)}{h}\leqslant -\gamma_1,$$

deci

$$\ln V^*(t)-\ln V^*(t_0)\leqslant -\gamma_1(t-t_0)$$

de unde rezultă

$$V^*(t)\leqslant V^*(t_0)\,e^{-\gamma_1(t-t_0)}\leqslant K_1\,e^{-\gamma_1(t-t_0)}\|\varphi\|^2,$$

deci

$$\|x(t+s;t_0,\varphi)\|^2\leqslant K_1\,e^{-\gamma_1(t-t_0)}\|\varphi\|^2$$

şi stabilitatea exponenţială este dovedită.

TEOREMA 4.7. *Să considerăm din nou sistemul* (9) *şi să presupunem că*

$$|f(t,x(t+s))|<g(t)\|x(t+s)\|,\ \textit{cu}\ \int^{\infty}g(t)\,dt<\infty.$$

*Dacă soluţia banală a sistemului* (10) *este uniform stabilă, atunci soluţia banală a sistemului* (9) *este uniform stabilă, iar dacă soluţia banală a sistemului* (10) *este uniform asimptotic stabilă, atunci soluţia banală a sistemului* (9) *este uniform asimptotic stabilă.*

*Demonstraţie.* Dacă soluţia banală a sistemului (10) este uniform stabilă, rezultă $\|y(t;t_0,\varphi)\|\leqslant M\|\varphi\|$ pentru $t\geqslant t_0$, deoarece sistemul e liniar.

Fie

$$V[t,\varphi]=\sup_{\sigma\geqslant 0}\|y(t+\sigma+s;t,\varphi(u-t))\|.$$

Avem, evident

$$\|\varphi\|\leqslant V[t,\varphi]\leqslant M\|\varphi\|$$

şi din

$$\|y(t+\sigma+s;t,\varphi_1)\|-\|y(t+\sigma+s;t,\varphi_2)\|\leqslant$$
$$\leqslant\|y(t+\sigma+s;t,\varphi_1-\varphi_2)\|\leqslant M\|\varphi_1-\varphi_2\|$$

rezultă

$$\|y(t+\sigma+s;t,\varphi_1)\|\leqslant\|y(t+\sigma+s;t,\varphi_2)\|+M\|\varphi_1-\varphi_2\|,$$

deci

$$V[t,\varphi_1]\leqslant V[t,\varphi_2]+M\|\varphi_1-\varphi_2\|,$$

de unde

$$|V[t,\varphi_1]-V[t,\varphi_2]|\leqslant M\|\varphi_1-\varphi_2\|.$$

Ca în demonstraţia teoremei 4.2 deducem că $V[t,y(t+s;t_0,\varphi)]$ este monoton descrescătoare, deci

$$\limsup_{h\to 0+}\frac{V[t+h,y(t+h+s;t,\varphi)]-V[t,\varphi]}{h}\leqslant 0.$$

Ca în teorema precedentă deducem că

$$\|x(t+h+s;t,\varphi)-y(t+h+s;t,\varphi)\|\leqslant g(t)(e^{Lh}-1)e^{Lh}\|\varphi\|$$

şi deci

$$\limsup_{h\to 0+}\frac{V[t+h,x(t+h+s;t,\varphi])-V[t+h,y(t+h+s;t,\varphi)]}{h}\leqslant$$

$$\leqslant MLg(t)\|\varphi\|.$$

Rezultă

$$\limsup_{h\to 0+}\frac{V[t+h,x(t+h+s;t,\varphi)]-V[t,\varphi]}{h}\leqslant$$

$$\leqslant MLg(t)\|\varphi\|\leqslant MLg(t)V[t,\varphi].$$

Notînd

$$V^*(t)=V[t,x(t+s;t_0,\varphi)],$$

deducem

$$\frac{1}{V^*(t)}\limsup_{h\to 0+}\frac{V^*(t+h)-V^*(t)}{h}\leqslant MLg(t),$$

$$\limsup_{h\to 0+}\frac{\ln V^*(t+h)-\ln V^*(t)}{h}\leqslant LMg(t)$$

deci

$$\ln V^*(t)-\ln V^*(t_0)\leqslant LM\int_{t_0}^{t}g(t)\,\mathrm{d}t,$$

de unde

$$\|x(t+s;t_0,\varphi)\|\leqslant V^*(t)\leqslant V^*(t_0)\,e^{LM\int_{t_0}^{\infty}g(t)\mathrm{d}t}\leqslant Me^{LM\int_{0}^{\infty}g(t)\mathrm{d}t}\|\varphi\|,$$

şi prima afirmaţie a teoremei este demonstrată.

Dacă soluţia banală a sistemului (10) este uniform asimptotic stabilă, deducem, ca în teorema precedentă,

$$\frac{1}{V^*(t)}\limsup_{h\to 0+}\frac{V^*(t+h)-V^*(t)}{h}\leqslant-\frac{1}{K_1}+Kg(t),$$

de unde se obţine

$$\|x(t+s;t_0,\varphi)\|^2\leqslant V^*(t)\leqslant V^*(t_0)\,e^{K\int_{t_0}^{\infty}g(t)\mathrm{d}t}\,e^{-\frac{1}{K_1}(t-t_0)}\|\varphi\|^2$$

ceea ce demonstrează stabilitatea exponenţială a soluţiei banale a sistemului (9). Teorema este complet demonstrată.

Ca şi în cazul sistemelor de ecuaţii diferenţiale ordinare stabilitatea asimptotică uniformă implică stabilitatea în raport cu perturbaţii permanente.

TEOREMA 4.8. *Dacă soluţia banală a sistemului* (2) *este uniform asimptotic stabilă atunci ea este stabilă şi în raport cu perturbaţii permanente. Aceas-*

*ta înseamnă că pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\eta_1 > 0$ *şi* $\eta_2 > 0$ *cu proprietatea că dacă* $\sup_{\|\varphi\| < \varepsilon} |R(t, \varphi)| < \eta_1$ *orice soluţie a sistemului*

$$\dot{y}(t) = f[t, y(t + s)] + R[t, y(t + s)] \tag{11}$$

*cu* $\|\varphi\| < \eta_2$, *verifică inegalitatea* $|y(t, t_0, \varphi)| < \varepsilon$ *pentru* $t \geqslant t_0$.

*Demonstraţie.* Avem pe baza inegalităţii (3)

$$|x(v\ ; t, \varphi)| \leqslant e^{LH} \|\varphi\|, \quad t \leqslant v \leqslant t + h,$$

iar pe baza inegalităţii (5)

$$|y(v\ ; t, \varphi) - x(v\ ; t, \varphi)| \leqslant (e^{LH} - 1)\, \eta_1$$

dacă $\qquad |y(v, t, \varphi)| < \varepsilon$ şi $t \leqslant v \leqslant t + h$.

Rezultă

$$|y(v\ ; t, \varphi)| \leqslant e^{LH} \|\varphi\| + (e^{LH} - 1)\, \eta_1$$

şi dacă $\|\varphi\| < \frac{\varepsilon}{2}$ iar $h$ e suficient de mic rezultă $\|y(v\ ; t, \varepsilon)\| < \varepsilon$ şi evaluarea dedusă din (5) e valabilă. Deoarece soluţia banală a sistemului (2) este uniform asimptotic stabilă, există o funcţională $V[t, \varphi]$ cu proprietăţile din teorema 4.4 şi

$$|V[t, \varphi_1] - V[t, \varphi_2]| \leqslant M(r) \|\varphi_1 - \varphi_2\| \text{ pentru } \|\varphi_1\| < r, \ \|\varphi_2\| < r.$$

Avem

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{V[t + h, y(t + h + s\ ; t, \varphi)] - V[t, \varphi]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{h \to 0+} \frac{V[t + h, x(t + h + s\ ; t, \varphi)] - V[t, \varphi]}{h} +$$

$$+ \limsup_{h \to 0+} \frac{V[t + h, y(t + h + s\ ; t, \varphi)] - V[t + h, x(t + h + s\ ; t, \varphi)]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant -c(\|\varphi\|) + ML\, \eta_1.$$

Fie $\varepsilon > 0$, $\ l < a\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, $\ \|\varphi\| < \eta_2 = b^{-1}(l)$, $\ \eta_1 < \frac{c\,[b^{-1}(l)]}{LM}$.

Demonstrăm că $\|y(t + s\ ; t_0, \varphi)\| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0$.

Dacă acest lucru nu ar fi adevărat, ar exista $t_1 > t_0$ astfel ca $\|y(t_1 + s\ ; t_0, \varphi)\| \geqslant \varepsilon$ ; dacă notăm ca de obicei

$$V^*(t) = V[t, y(t + s\ ; t_0, \varphi)]$$

avem

$$V^*(t_1) \geqslant a(\|y(t_1 + s\ ; t_0, \varphi)\|) \geqslant a(\varepsilon) > a\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) > l.$$

Pe de altă parte,

$$V^*(t_0) = V[t_0, \varphi] \leqslant b(\|\varphi\|) < b(\eta_2) = l.$$

Rezultă, din cauza continuității funcției $V^*(t)$, că există $t_0 < t_2 < < t_1$, astfel ca $V^*(t_2) = l$ și $V^*(t) > l$ pentru $t > t_2$. Din $V^*(t_2) = l$ rezultă $b(\| y(t_2+s; t_0, \varphi)\|) \geqslant V[t_2, y(t_2+s; t_0, \varphi)] = l \geqslant a(\|y(t_2+s; t_0, \varphi)\|)$, deci

$$b^{-1}(l) \leqslant \| y(t_2+s; t_0, \varphi)\| \leqslant a^{-1}(l) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Notăm $\psi(s) = y(t_2+s; t_0, \varphi)$. Avem

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V^*(t_2+h) - V^*(t_2)}{h} = \limsup_{h\to 0+} \frac{V[t_2+h, y(t_2+h+s; t_2, \psi)] - V[t_2, \psi]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant -c(\|\psi\|) + LM\eta_1 \leqslant -c[b^{-1}(l)] + LM\eta_1 < 0.$$

Pe de altă parte, din $V^*(t_2) = l$ și $V^*(t) > l$ pentru $t > t_2$ rezultă

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V^*(t_2+h) - V^*(t_2)}{h} \geqslant 0.$$

Am obținut o contradicție și deci $\|y(t+s; t_0, \varphi)\| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0$. Teorema este demonstrată.

Ca și în cazul sistemelor de ecuații diferențiale ordinare se demonstrează teorema de stabilitate în raport cu perturbațiile permanente mărginite în medie. De asemenea fără modificări în demonstrație se stabilesc pentru sistemele cu întîrziere o serie de alte teoreme.

TEOREMA 4.9. *Presupunem că există o funcțională $V[t, \varphi]$ definită ca în teoremele precedente, cu proprietățile:*

$$1^\circ\ a(t, \|\varphi\|) \leqslant V[t, \varphi] \leqslant b(\|\varphi\|);$$

$$2^\circ\ \limsup_{h\to 0+} \frac{V[t+h, x(t+h+s; t, \varphi)] - V[t, \varphi]}{h} \leqslant -c(t, \|\varphi\|);$$

$$3^\circ\ |V[t, \varphi_1] - V[t, \varphi_2]| < L\|\varphi_1 - \varphi_2\|,$$

*unde $b(r)$ este continuă, monoton crescătoare pentru $r > 0$, $b(0) = 0$, iar $a(t, r)$, $c(t, r)$ sînt continue și cu proprietatea că pentru orice pereche $(\alpha, \beta)$ cu $0 < \alpha \leqslant \beta < H$, există $\theta(\alpha, \beta) \geqslant 0$, $k(\alpha, \beta) > 0$ astfel ca $a(t, r) > k(\alpha, \beta)$, $c(t, r) > k(\alpha, \beta)$ pentru $\alpha \leqslant r \leqslant \beta$, $t \geqslant \theta(\alpha, \beta)$. Atunci soluția banală a sistemului (2) este uniform asimptotic stabilă.*

TEOREMA 4.10. *Se consideră sistemul*

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t+s)] + R[t, x(t+s)], \tag{12}$$

*unde $f[t, 0] \equiv R[t, 0] \equiv 0$, $f$ și $R$ verifică o condiție Lipschitz și în plus*

$\lim\limits_{t\to\infty} R[t, \varphi]=0$ *uniform în raport cu* $\varphi$ *pentru* $\|\varphi\| \leqslant H$. *Atunci, dacă soluția banală a sistemului*

$$\dot{z}(t) = f[t, z(t+s)]$$

*este uniform asimptotic stabilă, soluția banală a sistemului* (12) *este de asemenea uniform asimptotic stabilă.*

TEOREMA 4.11. *Se consideră sistemul*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f[t, x(t+s), y(t+s)], \\ \dot{y}(t) &= g[t, x(t+s), y(t+s)], \end{aligned} \tag{13}$$

*unde* $f(t, 0, 0) \equiv g(t, 0, 0) \equiv 0$. *Presupunem că soluția banală a sistemului* (13) *este stabilă în raport cu componentele* $x$, *deci că există* $\delta(\varepsilon) > 0$ *cu proprietatea că* $\|\varphi\| < \delta$, $\|\psi\| < \delta$, *implică* $|x(t, t_0, \varphi, \psi)| < \varepsilon$ *pentru* $t \geqslant t_0$. *Presupunem în plus că soluția banală a sistemului*

$$\dot{z}(t) = g[t, 0, z(t+s)]$$

*este uniform asimptotic stabilă. Atunci soluția banală a sistemului* (13) *este uniform stabilă. Dacă în plus stabilitatea în raport cu componentele* $x$ *este asimptotică, deci dacă există* $\delta_0 > 0$ *și* $T_0(\varepsilon)$ *astfel ca* $\|\varphi\| < \delta_0$, $\|\psi\| < \delta_0$, $t \geqslant t_0 + T_0$ *să implice* $|x(t; t_0, \varphi, \psi)| < \varepsilon$, *atunci soluția banală a sistemului* (13) *este uniform asimptotic stabilă.*

TEOREMA 4.12. *Considerăm sistemul*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f[t, x(t+s), y(t+s)], \\ \dot{y}(t) &= A(t, y(t+s)) + g[t, x(t+s), y(t+s)], \end{aligned} \tag{14}$$

*unde pentru* $\|\varphi\| < \alpha_0$, $\|\psi\| < \alpha_0$, *avem* $|f(t, \varphi, \psi)| \leqslant K\|\psi\|^{\beta}$, $\beta > 0$, $|g(t, \varphi, \psi)| \leqslant k\|\varphi\|$, $k$ *suficient de mic, iar* $A(t, \varphi)$ *este liniar. Presupunem că soluția banală a sistemului liniar*

$$\dot{z}(t) = A(t, z(t+s)) \tag{15}$$

*este uniform asimptotic stabilă. Atunci soluția banală a sistemului* (14) *este uniform stabilă și în plus pentru orice soluție pentru care funcțiile inițiale sînt suficient de mici avem* $y(t) \to 0$, $x(t) \to l$ *pentru* $t \to \infty$.

*Demonstrație*. Fie $V[t, \varphi]$ funcționala construită pentru sistemul (15) pe baza teoremei 4.4′. Ținînd seama de evaluarea impusă pentru $g(t, \varphi)$, deducem ca în demonstrația teoremei 4.6, evaluarea

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V[t+h, y(t+h+s; t, \varphi, \psi)] - V[t, \varphi, \psi]}{h} \leqslant -[1-kM]\|\psi\|^2.$$

Notînd $V^*(t) = V[t, y(t+s; t_0, \varphi, \psi)]$ se obține de aici, dacă $\|\varphi\|$, $\|\psi\|$ sînt suficient de mici (atunci $k$ e suficient de mic),

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V^*(t+h) - V^*(t)}{h} \leqslant -k_1 V^*(t).$$

De aici se deduce imediat

$$\|y(t+s\,;t_0,\varphi,\psi)\|^2 \leqslant V^*(t) \leqslant V^*(t_0)\, e^{-k_1(t-t_0)} \leqslant K_1\, e^{-k_1(t-t_0)}\, \|\psi\|^2$$

Mai departe, din

$$x(t\,;t_0,\varphi,\psi) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f[u, x(u+s\,;t_0,\varphi,\psi), y(u+s\,;t_0,\varphi,\psi)]\, du$$

rezultă

$$|x(t\,;t_0,\varphi,\psi)| \leqslant \|\varphi\| + \int_{t_0}^{t} K \sqrt{K_1^{\beta}}\, e^{-\frac{k_1\beta}{2}(u-t_0)}\, du\, \|\psi\|^{\beta},$$

de unde rezultă imediat afirmația teoremei.

Definiția stabilității integrale pentru sistemele cu întîrziere se poate formula la fel ca în cazul sistemelor de ecuații diferențiale ordinare. Fără modificări esențiale față de demonstrațiile date în capitolul I se obțin lemele și teoremele stabilite în capitolul I, § 8. Vom da aici numai formulările teoremelor.

TEOREMA 4.13. *Presupunem că există o funcțională $V[t,\varphi]$ definită ca în teoremele precedente și cu proprietățile:*

1° $V[t,\varphi] \geqslant a(\|\varphi\|)$, $V[t,0] \equiv 0$, *$a(r)$ continuă, monoton crescătoare pentru $r > 0$, $a(0) = 0$;*

2° $|V[t,\varphi_1] - V[t,\varphi_2]| \leqslant K\|\varphi_1 - \varphi_2\|$;

3° $$\limsup_{h\to 0+} \frac{V[t+h, x(t+h+s\,;t_0,\varphi)] - V[t, x(t+s\,;t_0,\varphi)]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant g(t)\, V[t, x(t+s\,;t_0,\varphi)],$$

*unde* $\int^{\infty} g(t)\, dt < \infty$, $g(t) \geqslant 0$.

*Atunci soluția banală a sistemului* (2) *este integral stabilă.*

CONSECINȚĂ. *În condițiile din teorema* 4.7, *soluția banală a sistemului* (9) *este integral stabilă, dacă soluția banală a sistemului* (10) *este uniform stabilă.*

TEOREMA 4.14. *Dacă funcționala $V$ din teorema precedentă verifică în locul condiției 3° condiția*

3° $$\limsup_{h\to 0+} \frac{V[t+h, x(t+h+s\,;t_0,\varphi)] - V[t, x(t+s\,;t_0,\varphi)]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant -c(\|x(t+s\,;t_0,\varphi)\|),$$

*atunci soluția banală a sistemului* (2) *este asimptotic integral stabilă.*

CONSECINȚĂ. *Dacă soluția banală a sistemului* (2) (*cu $f$ verificînd condiția de tip Lipschitz*) *este uniform asimptotic stabilă, atunci ea este și*

*asimptotic integral stabilă. În particular, în condiţiile din teorema 4.7, dacă soluţia banală a sistemului* (10) *este uniform asimptotic stabilă, soluţia banală a sistemului* (9) *este asimptotic integral stabilă.*

## § 3. CONDIŢIA LUI PERRON LA SISTEMELE CU ÎNTÎRZIERE

Vom stabili acum o teoremă profundă de stabilitate relativă la sistemele liniare. Pentru sistemele de ecuaţii diferenţiale ordinare teorema corespunzătoare a fost demonstrată pentru prima dată de O. Perron şi reluată de R. Bellman. Generalizări puternice pentru ecuaţii diferenţiale în spaţii Banach au fost date de J. L. Massera şi J. L. Schäffer.

Considerăm sisteme liniare generale cu întîrziere de forma

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{0} x_j(t+s)\, d_s\, \eta_{ij}(t,s) + f_i(t)$$

unde nucleele $\eta_{ij}(t,s)$ verifică următoarele condiţii:

*a*) $\eta_{ij}(t,s)$ sînt definite pentru $t \geqslant 0$, $-\infty < s < \infty$, iar $\eta_{ij}(t,s) \equiv 0$ pentru $s \geqslant 0$;

*b*) există funcţiile $\tau_{ij}(t) > 0$ şi $V_{ij}(t)$ mărginite pentru $t \geqslant 0$ astfel ca

$$\eta_{ij}(t,s) \equiv \eta_{ij}(t, -\tau_{ij}(t)) \equiv 0 \quad \text{pentru } s \leqslant -\tau_{ij}(t)$$

$$\bigvee_{s=-\tau_{ij}(t)}^{0} \eta_{ij}(t,s) \leqslant V_{ij}(t),$$

unde, ca de obicei, $\bigvee_{s=\alpha}^{\beta} f(s)$ înseamnă variaţia totală a funcţiei $f$ pe $[\alpha, \beta]$.

*c*) $\eta_{ij}(t,s)$ sînt continue în raport cu $t$, uniform în raport cu $s$.

Dacă funcţiile $\eta_{ij}$ sînt funcţii de salturi, se obţin sisteme liniare cu argument întîrziat de forma

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_i(t) + \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{k}(t)\, x_j(t - \tau_k(t)) + f_i(t).$$

Dacă funcţiile $\eta_{ij}$ sînt absolut continue, se obţin sisteme de forma

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{0} a_{ij}(t,s)\, x_j(t+s)\, ds + f_i(t).$$

În cele ce urmează sistemul va fi scris sub forma matricială

$$\dot{x}(t) = \int_{-\infty}^{0} x(t+s)\, d_s\, \eta(t,s) + f(t), \tag{16}$$

unde $x$ este vector linie.

Definiţie. *Vom spune că sistemul*

$$\dot{x}(t) = \int_{-\infty}^{0} x(t+s)\, d_s\, \eta(t,s) \tag{17}$$

*satisface condiția lui Perron, dacă pentru orice funcție continuă $f(t)$, mărginită pe semiaxa $t \geqslant 0$, soluția sistemului* (16) *determinată de funcția inițială nulă pe $t \leqslant 0$, este mărginită pe semiaxa $t \geqslant 0$.*

TEOREMA 4.15. *Dacă sistemul* (17) *satisface condiția lui Perron, atunci soluția lui banală este uniform asimptotic stabilă.*

Înainte de a trece la demonstrația acestei teoreme vom stabili o serie de fapte preliminare, dintre care unele cu interes în sine.

LEMA 1. *Fie $X(t,\sigma)$ o matrice ale cărei linii sînt soluții ale sistemului* (17) *verificînd condițiile $X(t,\sigma) \equiv 0$ pentru $t < \sigma$ și $X(\sigma,\sigma) = E$. Atunci orice soluție a sistemului* (16) *se scrie sub forma*

$$x(t) = x(\sigma) X(t,\sigma) + \int_{-\infty}^{\sigma} x(s) \mathrm{d}_s \int_{\sigma}^{t} \eta(\alpha, s-\alpha) X(t,\alpha) \mathrm{d}\alpha + \int_{\sigma}^{t} f(\alpha) X(t,\alpha) \mathrm{d}\alpha. \tag{18}$$

*Demonstrație.* Considerăm sistemul de ecuații integrale

$$Y(\alpha,t) + \int_{\alpha}^{t} \eta(\beta, \alpha-\beta) Y(\beta,t) \mathrm{d}\beta = E, \tag{19}$$

unde $E$ este matricea unitate, $\alpha \leqslant t$.

Formăm aproximațiile succesive în mod obișnuit

$$Y_0(\alpha,t) = E, \quad Y_k(\alpha,t) = E - \int_{\alpha}^{t} \eta(\beta, \alpha-\beta) Y_{k-1}(\beta,t) \mathrm{d}\beta.$$

Matricile $Y_k(\alpha,t)$ au elementele funcții continue în raport cu $t$ și cu variație mărginită în raport cu $\alpha$. Pentru $t$ fixat și $\alpha \leqslant \beta \leqslant t$, funcția $\eta(\beta, \alpha-\beta)$ rezultă mărginită și obținem imediat evaluarea

$$|Y_{k+1}(\alpha,t) - Y_k(\alpha,t)| \leqslant M^{k+1} \frac{(t-\alpha)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Într-adevăr, pentru $k = 0$ evaluarea rezultă din

$$|Y_1(\alpha,t) - E| \leqslant \int_{\alpha}^{t} |\eta(\beta, \alpha-\beta)| \mathrm{d}\beta \leqslant M(t-\alpha)$$

și apoi, prin inducție,

$$|Y_{k+1}(\alpha,t) - Y_k(\alpha,t)| \leqslant M \int_{\alpha}^{t} |Y_k(\beta,t) - Y_{k-1}(\beta,t)| \mathrm{d}\beta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M^{k+1}}{k!} \int_{\alpha}^{t} (t-\beta)^k \mathrm{d}\beta = \frac{M^{k+1}(t-\alpha)^{k+1}}{(\alpha+1)!}.$$

Din această evaluare rezultă convergența uniformă a aproximațiilor succesive și deci existența soluției sistemului (19). Cu evaluări de același fel se verifică și unicitatea soluției.

Din convergenţa uniformă a şirului rezultă că limita $Y(\alpha, t)$ este continuă în raport cu $t$ şi cu variaţie mărginită în raport cu $\alpha$. Vom prelungi pe $Y(\alpha, t)$ pentru $\alpha > t$ punînd $Y(\alpha, t) \equiv 0$ pentru $\alpha > t$.

Fie acum $x(t)$ o soluţie oarecare a sistemului (16). Avem

$$\dot{x}(\alpha) = \int_{-\infty}^{0} x(\alpha + s)\, d_s \eta(\alpha, s) + f(\alpha).$$

Înmulţind această relaţie cu $Y(\alpha, t)$ şi integrînd în raport cu $\alpha$ de la $\sigma$ la $t$, obţinem

$$\int_{\sigma}^{t} \dot{x}(\alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha = \int_{\sigma}^{t} \left[ \int_{-\infty}^{0} x(\alpha + s)\, d_s \eta(\alpha, s) \right] Y(\alpha, t)\, d\alpha + \int_{\sigma}^{t} f(\alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha.$$

Integrînd prin părţi în primul membru şi folosind în cel de-al doilea o formulă de permutare a ordinii de integrare, deducem

$$x(t)\, Y(t, t) - x(\sigma)\, Y(\sigma, t) - \int_{\sigma}^{t} x(\alpha)\, d_\alpha Y(\alpha, t) =$$

$$= \int_{\sigma}^{t} \left[ \int_{-\infty}^{\alpha} x(s)\, d_s \eta(\alpha, s - \alpha) \right] Y(\alpha, t)\, d\alpha + \int_{\sigma}^{t} f(\alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{\sigma} x(s)\, d_s \int_{\sigma}^{t} \eta(\alpha, s - \alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha +$$

$$+ \int_{\sigma}^{t} x(s)\, d_s \int_{s}^{t} \eta(\alpha, s - \alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha + \int_{\sigma}^{t} f(\alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha.$$

De aici rezultă

$$x(t) = x(\sigma)\, Y(\sigma, t) + \int_{-\infty}^{\sigma} x(s)\, d_s \int_{\sigma}^{t} \eta(\alpha, s - \alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha +$$

$$+ \int_{\sigma}^{t} f(\alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha + \int_{\sigma}^{t} x(\alpha)\, d_\alpha \left[ Y(\alpha, t) + \int_{\alpha}^{t} \eta(\beta, \alpha - \beta)\, Y(\beta, t)\, d\beta \right].$$

Ţinînd seama că

$$Y(\alpha, t) + \int_{\alpha}^{t} \eta(\beta, \alpha - \beta)\, Y(\beta, t)\, d\beta = E,$$

ultima integrală din formula precedentă este nulă şi obţinem

$$x(t) = x(\sigma)\, Y(\sigma, t) + \int_{-\infty}^{\sigma} x(s)\, d_s \int_{\sigma}^{t} \eta(\alpha, s - \alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha + \int_{\sigma}^{t} f(\alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha.$$

Dacă soluția $x(t)$ este nulă pentru $t < \sigma$ și dacă $f \equiv 0$, deducem

$$x(t) = x(\sigma)\, Y(\sigma, t).$$

Considerînd matricea $X(t,\sigma)$ formată cu soluțiile nule pentru $t < \sigma$ și $X(\sigma,\sigma) = E$, obținem $X(t,\sigma) = Y(\sigma,t)$. Cu aceasta formula (18) este complet demonstrată.

LEMA 2. *Fie* $Y(\alpha, t)$ *ca în lema 1. Dacă* $\int_0^t |Y(\alpha,t)|\, d\alpha < C$ *pentru* $t \geqslant 0$, *atunci* $|Y(\alpha, t)| < M$, *pentru* $0 \leqslant \alpha \leqslant t$.

*Demonstrație*. Arătăm mai întîi că există $\delta_0$ astfel ca $|\alpha' - \alpha''| < \delta_0$ să implice $|Y(\alpha', t)| \geqslant \frac{1}{2} |Y(\alpha'',t)| - Ve^{\delta_0 V}C$, $V > V_{ij}(t)$.

Fie $\alpha' < \alpha'' \leqslant t$. Avem

$$X(t, \alpha')\, Y(t,t) - X(\alpha'', \alpha')\, Y(\alpha'', t) = \int_{\alpha''}^t X(\alpha, \alpha')\, d_\alpha Y(\alpha, t) + \\ + \int_{\alpha''}^t \left[\frac{\partial}{\partial\alpha} X(\alpha, \alpha')\right] Y(\alpha, t)\, d\alpha.$$

Dar

$$\int_{\alpha''}^t \left[\frac{\partial}{\partial\alpha} X(\alpha,\alpha')\right] Y(\alpha, t)\, d\alpha = \int_{\alpha''}^t \left[\int_{-\infty}^0 X(\alpha + s, \alpha')\, d_s\eta(\alpha,s)\right] Y(\alpha,t)\, d\alpha =$$

$$= \int_{\alpha''}^t \left[\int_{-\infty}^{\alpha} X(s, \alpha')\, d_s\, \eta(\alpha, s - \alpha)\right] Y(\alpha, t)\, d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{\alpha''} X(s, \alpha')\, d_s \int_{\alpha''}^t \eta(\alpha, s - \alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha +$$

$$+ \int_{\alpha''}^t X(s, \alpha')\, d_s \int_s^t \eta(\alpha, s - \alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha.$$

De aici rezultă

$$X(t, \alpha') - X(\alpha'', \alpha')\, Y(\alpha'', t) = \int_{-\infty}^{\alpha''} X(s, \alpha')\, d_s \int_{\alpha''}^t \eta(\alpha, s-\alpha)\, Y(\alpha,t)\, d\alpha +$$

$$+ \int_{\alpha''}^t X(s, \alpha')\, d_s \left[Y(s,t) + \int_s^t \eta(\beta, s - \beta)\, Y(\beta, t)\, d\beta\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\alpha''} X(s, \alpha')\, d_s \int_{\alpha''}^t \eta(\alpha, s - \alpha) Y(\alpha, t)\, d\alpha,$$

deci

$$X(t, \alpha') = X(\alpha'', \alpha')\, Y(\alpha'', t) + \int_{-\infty}^{\alpha''} X(s, \alpha')\, d_s \int_{\alpha''}^t \eta(\alpha, s-\alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha.$$

Avem

$$X(t, \alpha') = Y(\alpha', t),\ X(\alpha'', \alpha') = Y(\alpha', \alpha'').$$

Rezultă

$$Y(\alpha', t) = Y(\alpha', \alpha'')\, Y(\alpha'', t) + \int_{-\infty}^{\alpha''} X(s, \alpha')\, d_s \int_{\alpha''}^{t} \eta(\alpha, s - \alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha,$$

deci

$$Y(\alpha', t) - Y(\alpha'', t) = [Y(\alpha', \alpha'') - E]\, Y(\alpha'', t) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\alpha''} X(s, \alpha')\, d_s \int_{\alpha''}^{t} \eta(\alpha, s - \alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha.$$

Pe de altă parte,

$$Y(\alpha', \alpha'') - E = -\int_{\alpha'}^{\alpha''} \eta(\beta, \alpha' - \beta)\, Y(\beta, \alpha'')\, d\beta =$$

$$= -\int_{\alpha'}^{\alpha''} \eta(\beta, \alpha' - \beta)\, [Y(\beta, \alpha'') - E] - \int_{\alpha'}^{\alpha''} \eta(\beta, \alpha' - \beta)\, d\beta.$$

Dacă $\alpha'' - \alpha' < \delta$, de aici rezultă

$$|Y(\alpha', \alpha'') - E| \leqslant V\delta_0 + V\int_{\alpha'}^{\alpha''} |Y(\beta, \alpha'') - E|\, d\beta$$

deci

$$|Y(\alpha', \alpha'') - E| \leqslant V\, \delta_0\, e^{V\delta_0}.$$

Mai departe

$$\int_{-\infty}^{\alpha''} X(s, \alpha')\, d_s \int_{\alpha''}^{t} \eta(\alpha, s - \alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha =$$

$$= \int_{\alpha'}^{\alpha''} X(s, \alpha')\, d_s \int_{\alpha''}^{t} \eta(\alpha, s - \alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha =$$

$$= \int_{\alpha''}^{t} \left[ \int_{\alpha'}^{\alpha''} X(s, \alpha')\, d_s\, \eta(\alpha, s - \alpha) \right] Y(\alpha, t)\, d\alpha.$$

Rezultă

$$\left| \int_{-\infty}^{\alpha''} X(s, \alpha')\, d_s \int_{\alpha''}^{t} \eta(\alpha, s - \alpha)\, Y(\alpha, t)\, d\alpha \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\alpha} \left| \int_{\alpha'}^{\alpha''} X(s, \alpha')\, d_s\, \eta(\alpha, s - \alpha) \right| \left| \int_{\alpha''}^{t} |Y(\alpha, t)|\, d\alpha \right| <$$

$$< C \sup_{\alpha} \left| \int_{\alpha'}^{\alpha''} X(s, \alpha')\, d_s \eta(\alpha, s - \alpha) \right| \leqslant CV \sup_{\alpha' \leqslant s \leqslant \alpha''} |X(s, \alpha')| < CVe^{V\delta_0}.$$

Am folosit pentru evaluarea lui $|X(s, \alpha')|$ inegalitatea (3).

Din evaluările obținute deducem

$$| Y(\alpha', t) - Y(\alpha'', t) | \leqslant V\delta_0 e^{V\delta_0} |Y(\alpha'', t)| + CVe^{V\delta_0}.$$

Alegem pe $\delta_0$ destul de mic pentru ca $V\delta_0 e^{V\delta_0} < \frac{1}{2}$. Atunci

$$|Y(\alpha', t) - Y(\alpha'', t)| < \frac{1}{2} | Y(\alpha'', t) | + CVe^{V\delta_0}.$$

şi

$$|Y(\alpha', t)| \geqslant \frac{1}{2} | Y(\alpha'', t)| - CVe^{V\delta_0}.$$

Dacă $\alpha'' < \alpha' \leqslant t$, obținem

$$|Y(\alpha', t) - Y(\alpha'', t)| < \frac{1}{2} |Y(\alpha', t)| + CVe^{V\delta_0}.$$

De aici

$$|Y(\alpha'', t)| \leqslant |Y(\alpha'', t) - Y(\alpha', t)| + |Y(\alpha', t)| < \frac{3}{2} |Y(\alpha', t)| + CVe^{V\delta_0}.$$

deci

$$|Y(\alpha', t)| > \frac{2}{3} |Y(\alpha'', t)| - \frac{2}{3} CVe^{V\delta_0} > \frac{1}{2} |Y(\alpha'', t)| - CVe^{V\delta_0}.$$

Rezultă în definitiv în toate cazurile că dacă $|\alpha' - \alpha''| < \delta_0$, atunci

$$| Y(\alpha', t)| \geqslant \frac{1}{2} |Y(\alpha'', t)| - VCe^{\delta_0 V}.$$

Să presupunem acum că afirmația lemei nu ar fi adevărată. Atunci există $\alpha_n$ şi $t_n$, astfel ca $0 \leqslant \alpha_n \leqslant t_n$ şi $|Y(\alpha_n, t_n)| \geqslant n$. Din (19) rezultă că şirul $\{t_n\}$ este nemărginit.

Într-adevăr, dacă $t_n < T$, din (19) deducem

$$| Y(\alpha, t_n) | \leqslant 1 + \int_{\alpha}^{t_n} | \eta(\beta, \alpha - \beta)| | Y(\beta, t_n) | d\beta \leqslant 1 + V\int_{\alpha}^{t_n} |Y(\beta, t_n)| d\beta.$$

deci

$$|Y(\alpha, t_n)| \leqslant e^{V(t_n - \alpha)} \leqslant e^{V(T-\alpha)} < e^{VT} \text{ pentru } \alpha \geqslant 0,$$

de unde se deduce că $|Y(\alpha_n, t_n)| < e^{VT}$, ceea ce contrazice felul cum au fost definite $\alpha_n$ şi $t_n$.

Dacă $\{\alpha_n\}$ este un şir mărginit, avem

$$C > \int_0^{t_n} | Y(\alpha, t_n) | d\alpha > \int_{\alpha_n}^{\alpha_n + \delta_0} |Y(\alpha, t_n)| d\alpha > \frac{1}{2} \delta_0 | Y(\alpha_n, t_n) | -$$

$$- \delta_0 e^{\delta_0 V} CV > \frac{1}{2} \delta_0 n - \delta_0 e^{\delta_0 V} CV,$$

ceea ce este contradictoriu.

Dacă $\{\alpha_n\}$ nu este mărginit, avem

$$C > \int_0^{t_n} |Y(\alpha, t_n)|\, d\alpha > \int_{\alpha_n - \delta_0}^{\alpha_n} |Y(\alpha, t_n)|\, d\alpha > \frac{1}{2}\delta_0 |Y(\alpha_n, t_n)| -$$

$$- \delta_0 e^{\delta_0 V} CV > \frac{1}{2}\delta_0 n - \delta_0 CV^{\delta_0 V}.$$

Din nou am ajuns la o contradicție. În acest fel lema este demonstrată.

LEMA 3. *Dacă sistemul* (17) *satisface condiția lui Perron, atunci există* $C$ *astfel ca* $\int_0^t |X(t, \alpha)|\, d\alpha < C$ *pentru orice* $t > 0$.

*Demonstrație.* Conform lemei 1 soluția sistemului (16) determinată de funcția inițială nulă pe semiaxa $t \leqslant 0$ este dată de formula

$$x(t) = \int_0^t f(\alpha) X(t, \alpha)\, d\alpha.$$

Deoarece sistemul (16) satisface condiția lui Perron, rezultă că pentru orice funcție continuă, mărginită, $f$, funcția $\int_0^t f(\alpha) X(t, \alpha)\, d\alpha$ este mărginită. Pentru $t$ fixat, considerăm operatorul $U(f)$ care aplică spațiul Banach al funcțiilor vectoriale continue $f$, mărginite pe semiaxa $t \geqslant 0$, în spațiul vectorilor numerici, definit de

$$U(f) = \int_0^t f(\alpha) X(t, \alpha)\, d\alpha.$$

Fie $\{t_k\}$ șirul numerelor raționale pozitive,

$$U_k(f) = \int_0^{t_k} f(\alpha) X(t_k, \alpha)\, d\alpha.$$

Deoarece pentru $\|f\| \leqslant c_1$ funcția $\int_0^t f(\alpha) X(t, \alpha)\, d\alpha$ este mărginită, rezultă că pentru orice $f$ fixat cu $\|f\| \leqslant c_1$ avem

$$\limsup_{k \to \infty} \|U_k(f)\| < \infty.$$

Deoarece sfera $\|f\| \leqslant c_1$ este în spațiul Banach considerat o mulțime de a doua categorie, putem aplica lema lui Banach-Steinhaus și deducem că există un număr $M$ cu proprietatea că $\|U_k(f)\| \leqslant M \|f\|$ pentru orice $f$ din spațiu, deci

$$\left| \int_0^{t_k} f(\alpha) X(t_k, \alpha)\, d\alpha \right| \leqslant M \|f\|.$$

Fie acum $t$ real oarecare; există un șir $\{t_{n_k}\}$ de numere raționale a cărui limită este $t$. Din

$$\left| \int_0^{t_{n_k}} f(\alpha) X(t_{n_k}, \alpha)\, d\alpha \right| \leqslant M \|f\|,$$

rezultă, prin trecere la limită,

$$\left|\int_0^t f(\alpha) X(t, \alpha)\, d\alpha\right| \leqslant M \|f\|$$

pentru orice $f$ din spaţiu. Fie $x_{ik}$ elementele matricii $X(t, \alpha)$; pentru $t$ fixat, considerăm vectorul $f^k$ ale cărui componente $f_i^k$ sînt egale cu sign $x_{ik}$. Atunci vectorul $f^k X$ va avea componentele $\sum_i x_{ik}$ sign $x_{ik} = \sum_i |x_{ik}|$.
Fie $f^{k,n}$ un şir de vectori, cu elementele funcţii continue, tinzînd către $f^k$. Pe baza teoremei lui Lebesgue de trecere la limită sub semnul de integrare, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t f^{k,n}(\alpha) X(t, \alpha)\, d\alpha = \int_0^t f^k(\alpha) X(t, \alpha)\, d\alpha.$$

Din

$$\left|\int_0^t f^{k,n}(\alpha) X(t, \alpha)\, d\alpha\right| \leqslant M \|f^{k,n}\|$$

rezultă pentru $n \to \infty$

$$\left|\int_0^t f^k(\alpha) X(t, \alpha)\, d\alpha\right| \leqslant M_1,$$

deci

$$\int_0^t \sum_i |x_{ik}(t, \alpha)|\, d\alpha \leqslant M_1.$$

Deoarece această relaţie este adevărată pentru orice $k$, deducem că există o constantă $C$ cu proprietatea că

$$\int_0^t |X(t, \alpha)|\, d\alpha < C$$

şi lema este demonstrată.

*Demonstraţia teoremei 4.15.* Pe baza formulei (18), dacă $x(t; t_0, \varphi)$ este soluţia generală a sistemului (16), putem scrie

$$x(t; t_0, \varphi) = \varphi(t_0) X(t, t_0) + \int_{-\infty}^{t_0} \varphi(s)\, d_s \int_{t_0}^t \eta(\alpha, s - \alpha) X(t, \alpha)\, d\alpha.$$

Din condiţia lui Perron rezultă, pe baza lemei 3, că

$$\int_0^t |X(t, \alpha)|\, d\alpha < C$$

deci pentru orice $t_0 \geqslant 0$,

$$\int_{t_0}^t |X(t, \alpha)|\, d\alpha < C.$$

Pe baza lemei 2 rezultă

$$|X(t, \alpha)| < M.$$

Deducem

$$|x(t; t_0, \varphi)| \leqslant M \|\varphi\| + V\|\varphi\| \int_{t_0}^{t} |X(t, \alpha)| d\alpha < (M + CV) \|\varphi\|,$$

deci soluţia banală a sistemului (16) este uniform stabilă. Rămîne deci să demonstrăm că

$$\lim_{t\to\infty} x(t; t_0, \varphi) = 0.$$

Pentru $\sigma \geqslant t_0$ avem relaţia

$$x(t; t_0, \varphi) = x(\sigma; t_0, \varphi) X(t, \sigma) + \int_{-\infty}^{\sigma} x(s; t_0, \varphi) d_s \int_{\sigma}^{t} \eta(\alpha, s-\alpha) X(t,\alpha) d\alpha.$$

Fie

$$\zeta(\sigma, s) = \int_{\sigma}^{t} \eta(\alpha, s-\alpha) X(t,\alpha) d\alpha.$$

Avem

$$\int_{t_0}^{t} x(t; t_0, \varphi) d\sigma = \int_{t_0}^{t} x(\sigma; t_0, \varphi) X(t, \sigma) d\sigma +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} d\sigma \left[\int_{-\infty}^{\sigma} x(s; t_0, \varphi) d_s \zeta(\sigma, s)\right] = \int_{t_0}^{t} x(\sigma; t_0, \varphi) X(t,\sigma) d\sigma +$$

$$+ \int_{-\infty}^{t_0} x(s; t_0, \varphi) d_s \int_{t_0}^{t} \zeta(\sigma, s) d\sigma + \int_{t_0}^{t} x(s; t_0, \varphi) d_s \int_{s}^{t} \zeta(\sigma, s) d\sigma =$$

$$= \int_{t_0}^{t} x(\sigma; t_0, \varphi) X(t, \sigma) d\sigma + \int_{-\infty}^{t_0} \varphi(s) d_s \int_{t_0}^{t} \zeta(\sigma, s) d\sigma +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} x(s; t_0, \varphi) d_s \int_{s}^{t} \zeta(\sigma, s) d\sigma.$$

Mai departe,

$$\int_{t_0}^{t} \zeta(\sigma, s) d\sigma = \int_{t_0}^{t} d\sigma \int_{\sigma}^{t} \eta(\alpha, s-\alpha) X(t, \alpha) d\alpha =$$

$$= \int_{t_0}^{t} d\alpha \int_{t_0}^{\alpha} \eta(\alpha, s-\alpha) X(t, \alpha) d\sigma = \int_{t_0}^{t} (\alpha - t_0) \eta(\alpha, s-\alpha) X(t, \alpha) d\alpha =$$

$$= \int_{s}^{t_0} (\alpha - t_0) \eta(\alpha, s-\alpha) X(t, \alpha) d\alpha,$$

$$\int_{-\infty}^{t_0} \varphi(s) d_s \int_{t_0}^{t} \zeta(\sigma, s) d\sigma = \int_{t_0-\tau}^{t_0} \varphi(s) d_s \int_{t_0}^{t} \zeta(\sigma, s) d\sigma =$$

$$= \int_{t_0-\tau}^{t_0} \varphi(s)\, \mathrm{d}_s \int_s^t (\alpha - t_0)\, \eta(\alpha, s - \alpha)\, X(t, \alpha)\, \mathrm{d}\alpha =$$

$$= \int_{t_0-\tau}^{t_0} \left[ \int_{t_0-\tau}^{\alpha} \varphi(s)\, \mathrm{d}_s (\alpha - t_0)\, \eta(\alpha, s - \alpha) \right] X(t, \alpha)\, \mathrm{d}\alpha +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \left[ \int_{t_0-\tau}^{t_0} \varphi(s)\, \mathrm{d}_s (\alpha - t_0)\, \eta(\alpha, s - \alpha) \right] X(t, \alpha)\, \mathrm{d}\alpha =$$

$$= \int_{t_0-\tau}^{t_0} \left[ \int_{t_0-\tau}^{\alpha} \varphi(s)\, \mathrm{d}_s (\alpha - t_0)\, \eta(\alpha, s - \alpha) \right] X(t, \alpha)\, \mathrm{d}\alpha +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left[ \int_{t_0-\tau}^{t_0} \varphi(s)\, \mathrm{d}_s (\alpha - t_0)\, \eta(\alpha, s - \alpha) \right] X(t, \alpha)\, \mathrm{d}\alpha$$

deoarece pentru $\alpha \geqslant t_0 + \tau$ şi $s \leqslant t_0$ avem $s - \alpha \leqslant -\tau$ şi $\eta(\alpha, s - \alpha) \equiv 0$.

Din această formulă şi din $|X(t, \alpha)| < M$ rezultă

$$\left| \int_{-\infty}^{t_0} \varphi(s)\, \mathrm{d}_s \int_{t_0}^{t} \zeta(\sigma, s)\, \mathrm{d}\sigma \right| < M_1 \|\varphi\|.$$

Analog

$$\int_s^t \zeta(\sigma, s)\, \mathrm{d}\sigma = \int_s^t \mathrm{d}\sigma \int_\sigma^t \eta(\alpha, s - \alpha)\, X(t, \alpha)\, \mathrm{d}\alpha =$$

$$= \int_s^t \mathrm{d}\alpha \int_s^\alpha \eta(\alpha, s - \alpha)\, X(t, \alpha)\, \mathrm{d}\sigma = \int_s^t (\alpha - s)\, \eta(\alpha, s - \alpha)\, X(t, \alpha)\, \mathrm{d}\alpha.$$

Rezultă

$$\int_{t_0}^{t} x(s; t_0, \varphi)\, \mathrm{d}_s \int_s^t \zeta(\sigma, s)\, \mathrm{d}\sigma = \int_{t_0}^{t} x(s; t_0, \varphi)\, \mathrm{d}_s \int_s^t (\alpha - s)\, \eta(\alpha, s -$$

$$- \alpha)\, X(t, \alpha)\, \mathrm{d}\alpha = \int_{t_0}^{t} \left[ \int_{t_0}^{\alpha} x(s; t_0, \varphi)\, \mathrm{d}_s (\alpha - s)\, \eta(\alpha, s - \alpha) \right] X(t, \alpha)\, \mathrm{d}\alpha =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left[ \int_{\alpha-\tau}^{\alpha} x(s; t_0, \varphi)\, \mathrm{d}_s (\alpha - s)\, \eta(\alpha, s - \alpha) \right] X(t, \alpha)\, \mathrm{d}\alpha =$$

$$= - \int_{t_0}^{t} \left[ \int_{-\tau}^{0} x(\beta - \alpha, t_0, \varphi)\, \mathrm{d}_\beta\, \beta \eta(\alpha, \beta) \right] X(t, \alpha)\, \mathrm{d}\alpha.$$

Dar

$$\left| \int_{t_0}^{t} \left[ \int_{-\tau}^{0} x(\beta - \alpha, t_0, \varphi)\, \mathrm{d}_\beta\, \beta \eta(\alpha, \beta) \right] X(t, \alpha)\, \mathrm{d}\alpha \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_\alpha \left| \int_{-\tau}^{0} x(\beta - \alpha, t_0, \varphi)\, \mathrm{d}_\beta\, \beta \eta(\alpha, \beta) \right| \int_{t_0}^{t} |X(t, \alpha)|\, \mathrm{d}\alpha \leqslant M_2 \|\varphi\| (1 + 2\tau V)\, C$$

deci

$$\left| \int_{t_0}^{t} x\,(s\,;\,t_0,\,\varphi)\,\mathrm{d}_s \int_{s}^{t} \zeta\,(\sigma,s)\,\mathrm{d}\sigma \right| \leqslant M_3\,\|\varphi\|.$$

Folosind aceste evaluări deducem

$$(t-t_0)\,|\,x\,(t\,;\,t_0,\,\varphi)\,| \leqslant M_2\,\|\varphi\|\,C + M_1\,\|\varphi\| + M_3\,\|\varphi\| = M_4\,\|\varphi\|$$

deci

$$|x\,(t\,;\,t_0,\,\varphi)| \leqslant \frac{M_4}{t-t_0}\,\|\varphi\|$$

ceea ce demonstrează că soluţia banală a sistemului (16) este uniform asimptotic stabilă. Teorema este complet demonstrată. Să observăm în încheiere că semnificaţia acestei teoreme constă în caracterizarea stabilităţii sistemului prin felul în care răspunde la excitaţii exterioare. Acest punct de vedere este din ce în ce mai răspîndit în teoria sistemelor de reglare automată.

## § 4. O EVALUARE ÎN TEORIA STABILITĂŢII SISTEMELOR LINIARE CU ÎNTÎRZIERE

În multe probleme practice prezintă interes următoarea problemă Se consideră un sistem de forma

$$\dot{x}\,(t) = A\,(t)\,x\,(t) + B\,(t)\,x\,(t-\tau). \tag{20}$$

Dacă întîrzierea $\tau$ este mică, este firesc să presupunem că ea poate fi neglijată şi să considerăm sistemul de ecuaţii diferenţiale ordinare

$$\dot{y}\,(t) = [A\,(t) + B\,(t)]\,y\,(t). \tag{21}$$

Presupunem că soluţia banală a sistemului (21) este uniform asimptotic stabilă. Ne putem aştepta ca pentru $\tau$ suficient de mic să fie uniform asimptotic stabilă şi soluţia banală a sistemului (20). În cele ce urmează vom arăta că acest lucru este adevărat şi vom obţine şi o evaluare a valorilor $\tau$ pentru care stabilitatea asimptotică uniformă a soluţiei banale a sistemului (20) rezultă din cea relativă la sistemul (21).

Vom folosi o lemă relativă la inegalităţile diferenţiale cu întîrziere care prezintă şi interes în sine.

Vom nota cu

$$D_-\varphi\,(t) = \lim_{k\to 0-}\,\inf \frac{\varphi\,(t+h) - \varphi\,(t)}{h}.$$

Fie $f(t,u,v)$ definită şi continuă pentru toţi $(u,v)$ şi $0 \leqslant t < \alpha$, monoton crescătoare în raport cu $v$.

PROPOZIŢIA 1. *Dacă* $D_-\varphi(t) < f[t, \varphi(t), \sup_{t-\tau\leqslant s\leqslant t} \varphi(s)]$, $D_-\psi(t) \geqslant f[t, \psi(t), \sup_{t-\tau\leqslant s\leqslant t} \psi(s)]$ *şi* $\varphi(s) < \psi(s)$ *pentru* $-\tau \leqslant s \leqslant 0$, *atunci* $\varphi(t) < \psi(t)$ *pentru* $0 < t < \alpha$.

*Demonstraţie*. Fie $\xi = \inf\{t;\ \varphi(t) \geqslant \psi(t)\}$. Avem $\xi > 0, \varphi(\xi) = \psi(\xi)$.

Pentru $-\tau \leqslant t < \xi$ rezultă $\varphi(t) < \psi(t)$, deci $\sup_{\xi-\tau\leqslant s\leqslant\xi} \varphi(s) \leqslant \sup_{\xi-\tau\leqslant s\leqslant\xi} \psi(s)$. Rezultă $D_-\varphi(\xi) < f[\xi, \varphi(\xi), \sup_{\xi-\tau\leqslant s\leqslant\xi} \varphi(s)] \leqslant f[\xi, \psi(\xi), \sup_{\xi-\tau\leqslant s\leqslant\xi} \psi(s)] \leqslant D_-\psi(\xi)$.

Din $\varphi(t) < \psi(t)$ pentru $t < \xi$ şi $\varphi(\xi) = \psi(\xi)$, rezultă însă $D_-\varphi(\xi) \geqslant D_-\psi(\xi)$ şi propoziţia este demonstrată.

PROPOZIŢIA 2. *Dacă* $\omega'(t) \leqslant f[t, \omega(t), \sup_{t-\tau\leqslant s\leqslant t} \omega(s)]$, *pentru* $t_0 \leqslant t < t_0 + \alpha$ *şi dacă* $y(t; t_0, \omega)$ *este soluţia ecuaţiei*

$$y'(t) = f[t, y(t), \sup_{t-\tau\leqslant s\leqslant t} y(s)]$$

*care pe* $[t_0-\tau, t_0]$ *coincide cu* $\omega$, *atunci, presupunînd această soluţie prelungibilă pe* $[t_0, t_0+\alpha)$, *rezultă* $\omega(t) \leqslant y(t; t_0, \omega)$ *pentru* $t_0 \leqslant t < t_0 + \alpha$.

*Demonstraţie*. Fie $\varepsilon_n$ un şir de numere pozitive tinzînd monoton către zero, $y_n$ soluţia ecuaţiei

$$y'(t) = f(t, y(t), \sup_{t-\tau\leqslant s\leqslant t} y(s)] + \varepsilon_n$$

care pe $[t_0 - \tau, t_0]$ coincide cu $\omega + \varepsilon_n$. Pe baza propoziţiei precedente, $y_{n+1}(t) < y_n(t)$ pe $[t_0, t_0+\alpha)$ şi se vede uşor că $\lim_{n\to\infty} y_n(t) = y(t; t_0, \omega)$ (de fapt trebuie să subliniem că în cazul cînd nu este îndeplinită o condiţie de unicitate, $y(t; t_0, \omega)$ este soluţia superioară definită de condiţiile iniţiale considerate). Pe baza propoziţiei 1 avem $\omega(t) < y_n(t)$ pentru $t \in [t_0, t_0 + \alpha)$ deci $\omega(t) \leqslant y(t; t_0, \omega)$.

LEMĂ. *Dacă* $f'(t) \leqslant -\alpha f(t) + \beta \sup_{t-\tau\leqslant\sigma\leqslant t} f(\sigma)$ *pentru* $t \geqslant t_0$ *şi dacă* $\alpha > \beta > 0$, *atunci există* $\gamma > 0$ *şi* $k > 0$ *astfel încît* $f(t) \leqslant k e^{-\gamma(t-t_0)}$ *pentru* $t \geqslant t_0$.

*Demonstraţie*. Pe baza propoziţiei 2 rezultă că $f(t) \leqslant y(t)$, unde $y(t)$ este o soluţie a ecuaţiei

$$y'(t) = -\alpha y(t) + \beta \sup_{t-\tau\leqslant\sigma\leqslant t} y(\sigma) \tag{*}$$

care pe $[t_0 - \tau, t_0]$ este mai mare decît $f$. Să observăm că $y(t) = k e^{-\gamma(t-t_0)}$ este soluţie a acestei ecuaţii dacă $-\gamma = -\alpha + \beta e^{\gamma\tau}$. Într-adevăr,

$$\sup_{t-\tau\leqslant\sigma\leqslant t} y(\sigma) = k e^{\gamma\tau} e^{-\gamma(t-t_0)}$$

şi

$$y'(t) = -\gamma k e^{-\gamma(t-t_0)}.$$

Dacă $\alpha > \beta$, funcţia $\varphi(z) = -\alpha + \beta e^{z\tau} + z$ este negativă pentru $z = 0$ şi tinde la infinit cînd $z \to \infty$, deci există $z = \gamma > 0$ pentru care funcţia se anulează. Rezultă că dacă $\alpha > \beta$, există $\gamma > 0$ astfel încît $y(t) = k e^{-\gamma(t-t_0)}$

să fie soluţie a ecuaţiei (*). Avem $\inf_{t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0} y(t) = k$, deci alegînd pe $k > \sup_{t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0} f(t)$, rezultă pe baza propoziţiei 2 că $f(t) \leqslant k e^{-\gamma(t-t_0)}$ şi lema e demonstrată.

Presupunînd că soluţia banală a sistemului (21) este uniform asimptotic stabilă, există o formă pătratică $(V(t)\, y, y)$ a cărei derivată în virtutea sistemului (21) este $-(y,y)$. Fie $x(t)$ o soluţie oarecare a sistemului (20). Calculăm

$$\frac{d}{dt}(V(t)\, x(t), x(t)).$$

Avem

$$\frac{d}{dt}(V(t)\, x(t), x(t)) = \left(\frac{dV}{dt} x(t), x(t)\right) + 2\left(V(t)\frac{dx(t)}{dt}, x(t)\right) =$$

$$= \left(\frac{dV}{dt} x(t), x(t)\right) + 2\,(V(t)\,(A(t)\, x(t) + B(t)\, x(t-\tau)), x(t)) =$$

$$= \left(\frac{dV}{dt} x(t), x(t)\right) + 2\,(V(t)\,(A(t) + B(t))\, x(t), x(t)) +$$

$$+ 2\,(V(t)\, B(t)\,(x(t-\tau) - x(t)), x(t)) = -(x(t), x(t)) +$$

$$+ 2\left(V(t)\, B(t)\int_{t-\tau}^{t}\frac{dx(u)}{du}\,du, x(t)\right) = -(x(t), x(t)) +$$

$$+ 2\left(V(t)\, B(t)\int_{t-\tau}^{t}[A(u)\, x(u) + B(u)\, x(u-\tau)]\,du, x(t)\right).$$

Fie

$$L_1 = \sup_t |A(t)|,\ L_2 = \sup_t |B(t)|,\ L_3 = \sup_t |V(t)\, B(t)|.$$

Deducem

$$\frac{d}{dt}(V(t)\, x(t), x(t)) \leqslant -|x(t)|^2 + 2\tau\, L_3(L_1 + L_2)\sup_{t-2\tau\leqslant u\leqslant t}|x(u)|\,|x(t)|.$$

Fie $\Lambda$ marginea superioară a celei mai mari valori proprii a matricii $V$, $\lambda$ marginea inferioară a celei mai mici valori proprii a matricii $V$. Avem

$$\lambda\, |x(t)|^2 \leqslant (V(t)\, x(t), x(t)) \leqslant \Lambda\, |x(t)|^2,\ \lambda > 0.$$

Să notăm

$$f^2(t) = (V(t)\, x(t), x(t)).$$

Din

$$\lambda\, |x(t)|^2 \leqslant f^2(t) \leqslant \Lambda\, |x(t)|^2$$

rezultă

$$\sqrt{\lambda}\, |x(t)| \leqslant f(t) \leqslant \sqrt{\Lambda}\, |x(t)|$$

deci

$$\sup_{t-2\tau\leqslant s\leqslant t}|x(s)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sup_{t-2\tau\leqslant s\leqslant t}f(s),\ |x(t)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\lambda}}f(t),$$

$$-|x(t)|^2\leqslant-\frac{1}{\Lambda}f^2(t).$$

Putem deci scrie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f^2(t)\leqslant-\frac{1}{\Lambda}f^2(t)+2\,\tau\,L_3\,(L_1+L_2)\,\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sup_{t-2\tau\leqslant s\leqslant t}f(s)\,\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,f(t)$$

şi împărţind cu $2f(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant-\frac{1}{2\Lambda}+\frac{\tau\,L_3\,(L_1+L_2)}{\lambda}\sup_{t-2\tau\leqslant s\leqslant t}f(s).$$

Putem aplica lema, luînd $\alpha=\dfrac{1}{2\,\Lambda}$, $\beta=\dfrac{\tau\,L_3\,(L_1+L_2)}{\lambda}$.

Condiţia $\alpha>\beta$ conduce la

$$\frac{\tau\,L_3\,(L_1+L_2)}{\lambda}<\frac{1}{2\Lambda},$$

deci

$$\tau<\frac{\lambda}{\Lambda\,L_3\,(L_1+L_2)}.$$

Rezultă că dacă

$$\tau<\frac{\lambda}{\Lambda\,L_3\,(L_1+L_2)},$$

atunci există $\gamma>0$ şi $k>0$ astfel încît $f(t)\leqslant k\mathrm{e}^{-\gamma(t-t_0)}$ pentru $t>t_0$ deci $|x(t)|\leqslant\dfrac{k}{\sqrt{\lambda}}\mathrm{e}^{-\gamma(t-t_0)}$ pentru $t\geqslant t_0$, ceea ce arată că soluţia banală a sistemului (20) este uniform asimptotic stabilă. Să observăm că presupunînd derivabilitatea matricilor $A$ şi $B$ am fi putut continua calculele punînd în evidenţă şi termeni de gradul al doilea în $\tau$, ceea ce ar fi condus la evaluări mai bune.

Reluăm acum aceeaşi problemă fără a mai folosi funcţia Liapunov. Să considerăm sistemul

$$\dot{x}(t)=A(t)\,x(t)+\sum_{i=1}^{k}B_i(t)\,x(t-\mu\,\tau_i)\qquad(20')$$

şi sistemul obţinut pentru $\mu=0$

$$\dot{x}(t)=\left[A(t)+\sum_{i=1}^{k}B_i(t)\right]x(t).\qquad(21')$$

Presupunem că soluţia banală a sistemului (21′) este uniform asimptotic stabilă. Dacă $U(t, s)$ este o matrice fundamentală de soluţii a sistemului (21′), avem deci $|U(t, s)| \leqslant K e^{-\alpha(t-s)}$. Fie $x(t)$ o soluţie oarecare a sistemului (20′). Avem

$$x(t) = U(t, 0)\, x(0) + \sum_{i=1}^{k} \int_0^t U(t, s)\, B_i(s)\, [x(s - \mu\tau_i) - x(s)]\, ds.$$

Fie $\tau = \max\limits_i \tau_i$. Pentru $t > 2\mu\tau$ vom scrie

$$x(t) = U(t, 0)\, x(0) + \sum_{i=1}^{k} \int_0^{2\mu\tau} U(t, s)\, B_i(s)\, [x(s - \mu\tau_i) - x(s)]\, ds +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \int_{2\mu\tau}^{t} U(t, s)\, B_i(s)\, [x(s - \mu\tau_i) - x(s)]\, ds.$$

Pe baza inegalităţii (3) avem pentru $0 \leqslant s \leqslant 2\mu\tau$ evaluarea

$$|x(s)| \leqslant e^{\left(\sum\limits_{i=0}^{k} K_i\right) 2\mu\tau} \|\varphi\|,$$

$\varphi$ fiind funcţia iniţială a soluţiei $x$, dată pe $[-\mu\tau, 0]$. Această evaluare este evident valabilă şi pentru $s \leqslant 0$. Am notat

$$K_0 = \sup_t |A(t)|,\ K_i = \sup_t |B_i(t)|,\quad i = 1, \ldots, k.$$

Rezultă că pentru $0 \leqslant s \leqslant 2\mu\tau$ avem în orice caz

$$|x(s - \mu\tau_i) - x(s)| \leqslant 2e^{\left(\sum\limits_{i=0}^{k} K_i\right) 2\mu\tau} \|\varphi\|.$$

Pentru $s \geqslant 2\mu\tau$ putem scrie

$$x(s - \mu\tau_i) - x(s) = \int_s^{s-\mu\tau_i} \dot{x}(\sigma)\, d\sigma = \int_s^{s-\mu\tau_i} \left[A(\sigma)\, x(\sigma) + \sum_{j=1}^{k} B_j(\sigma)\, x(\sigma - \mu\tau_j)\right] d\sigma$$

deci

$$|x(s - \mu\tau_i) - x(s)| \leqslant \mu\tau_i \sum_{j=0}^{k} K_j \sup_{s-2\mu\tau \leqslant \sigma \leqslant s} |x(\sigma)|.$$

Rezultă

$$|x(t)| \leqslant K e^{-\alpha t} \|\varphi\| + \sum_{i=1}^{k} \int_0^{2\mu\tau} K e^{-\alpha(t-s)} K_i\, 2e^{\left(\sum\limits_{i=0}^{k} K_i\right) 2\mu\tau} \|\varphi\|\, ds +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \int_{2\mu\tau}^{t} K e^{-\alpha(t-s)} K_i\, \mu\tau_i \sum_{j=0}^{k} K_j \sup_{s-2\mu\tau \leqslant \sigma \leqslant s} |x(\sigma)|\, ds =$$

$$= Ke^{-\alpha t}\|\varphi\| + 4K\left(\sum_{i=1}^{k} K_i\right)e^{\left(\sum_{i=0}^{k} K_i\right)2\mu\tau} e^{-\alpha t}\frac{1}{\alpha}(e^{2\alpha\mu\tau}-1)\|\varphi\| +$$

$$+ K\sum_{i=1}^{k}\tau_i K_i \sum_{j=0}^{k} K_j \mu \int_{2\mu\tau}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \sup_{s-2\mu\tau\leqslant\sigma\leqslant s} |x(\sigma)|\,ds.$$

Notăm

$$L = K\|\varphi\|\left(1+\frac{4}{\alpha}(e^{2\alpha\mu\tau}-1)\right)\left(\sum_{i=1}^{k} K_i\right)e^{2\mu\tau\sum_{i=0}^{k} K_i}$$

$$M = K\sum_{i=1}^{k}\tau_i K_i \sum_{j=0}^{k} K_j\,\mu.$$

Avem evaluarea

$$|x(t)| \leqslant Le^{-\alpha t} + M\int_{2\mu\tau}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \sup_{s-2\mu\tau\leqslant\sigma\leqslant s} |x(\sigma)|\,ds.$$

Fie

$$v(t) = e^{-\alpha t}\left[L + M\int_{2\mu\tau}^{t} e^{\alpha s} \sup_{s-2\mu\tau\leqslant\sigma\leqslant s} |x(\sigma)|\,ds.\right.$$

Avem

$$v'(t) = -\alpha e^{-\alpha t}\left[L + M\int_{2\mu\tau}^{t} e^{\alpha s} \sup_{s-2\mu\tau\leqslant\sigma\leqslant s} |x(\sigma)|\,ds\right] +$$

$$+ e^{-\alpha t} Me^{\alpha t} \sup_{t-2\mu\tau\leqslant\sigma\leqslant t} |x(\sigma)| = -\alpha v(t) + M \sup_{t-2\mu\tau\leqslant\sigma\leqslant t} |x(\sigma)|.$$

Dar

$$|x(t)| \leqslant v(t)$$

deci

$$\sup_{t-2\mu\tau\leqslant\sigma\leqslant t} |x(\sigma)| \leqslant \sup_{t-2\mu\tau\leqslant\sigma\leqslant t} v(\sigma).$$

Rezultă

$$v'(t) \leqslant -\alpha v(t) + M \sup_{t-2\mu\tau\leqslant\sigma\leqslant t} v(\sigma).$$

Dacă $M < \alpha$, rezultă pe baza lemei că există constante $N$ şi $\gamma$ astfel ca

$$v(t) \leqslant Ne^{-\gamma(t-t_0)},$$

deci o inegalitate analogă are loc şi pentru $|x(t)|$. Prin urmare, soluţia banală a sistemului (20′) rezultă exponenţial stabilă cu condiţia ca $M < \alpha$. Această condiţie conduce la

$$\mu < \frac{\alpha}{K\sum_{i=1}^{k}\tau_i K_i \sum_{j=0}^{k} K_j}$$

## § 5. STABILITATEA UNOR SISTEME DE REGLARE CU ÎNTÎRZIERE

În cele ce urmează vom arăta în ce fel, folosind metoda lui V. M. Popov, se pot obţine condiţii de stabilitate asimptotică în mare pentru sisteme neliniare cu întîrziere, care intervin în teoria sistemelor de reglare automată.

Fie sistemul

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax(t) + Bx(t-\tau) + lf[\sigma(t-\tau)], \quad \sigma = (c, x).$$

Aici $A$, $B$, sînt matrici constante, $l$ un vector constant.

Vom presupune că ecuaţia

$$\det(A + \mathrm{e}^{-\lambda\tau} B - \lambda E) = 0$$

are rădăcinile în semiplanul $\mathcal{Re}\,\lambda \leqslant -\alpha < 0$. Vom presupune de asemenea că

$$h_1\sigma^2 \leqslant \sigma f(\sigma) \leqslant h_2\sigma^2, \text{ cu } h_2 < k.$$

Fie $x(t)$ o soluţie oarecare a sistemului şi $u(t)$ soluţia sistemului

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Au(t) + Bu(t-\tau) + l\,\psi(t-\tau),$$

unde $\psi(t) = f[\sigma(t)]$ pentru $-\tau \leqslant t \leqslant 0$, $\psi(t) \equiv 0$ pentru $t > 0$, care verifică aceleaşi condiţii iniţiale ca şi $x(t)$ pe $[-\tau, 0]$. Fie

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } -\tau \leqslant t < 0, \\ f[\sigma(t)] & \text{pentru } 0 \leqslant t \leqslant T, \\ 0 & \text{pentru } T < t. \end{cases}$$

Notăm cu $w(t)$ soluţia sistemului liniar neomogen

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = Aw(t) + Bw(t-\tau) + lf_T(t-\tau)$$

care verifică condiţii iniţiale nule.

Avem

$$w(t) = x(t) - u(t) \text{ pentru } -\tau \leqslant t \leqslant T + \tau,$$

căci condiţiile iniţiale sînt verificate şi diferenţa $x(t) - u(t)$ satisface acelaşi sistem ca şi $w(t)$.

Fie

$$\chi(T) = \int_0^T \left[(c, w(t)) - \frac{1}{k} f_T(t) + q\left(c, \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right)\right] f_T(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\infty \left[(c, w(t)) - \frac{1}{k} f_T(t) + q\left(c, \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right)\right] f_T(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{Re}\left\{(c, \widetilde{w}) - \frac{1}{k}\widetilde{f}_T + q(c, i\,\omega\,\widetilde{w})\right\} \widetilde{f}_T^{*}\,\mathrm{d}\omega.$$

Deoarece $w$ verifică pentru $t > T$ sistemul omogen, rezultă că $w$ şi $\frac{dw}{dt}$ descresc exponenţial, deci putem aplica formula din teoria transformatei Fourier. Am notat cu $\widetilde{w}$ respectiv $\widetilde{f}_T$ transformatele Fourier ale lui $w$ respectiv $f$. Din sistemul de ecuaţii pentru $w$ rezultă, aplicînd transformata Fourier,

$$i\,\omega\widetilde{w} = A\widetilde{w} + e^{-i\omega\tau} B\widetilde{w} + l f_T\, e^{-i\omega\tau}$$

de unde se deduce

$$\widetilde{w} = -(A + e^{-i\omega\tau} B - i\,\omega E)^{-1}\, l\, e^{-i\omega\tau}\widetilde{f}_T.$$

Inversa matricii $(A + e^{-i\omega\tau} B - i\,\omega E)^{-1}$ există deoarece am presupus că spectrul ei se află în semiplanul $\mathcal{R}e\, z \leqslant -\alpha < 0$.

Notăm $M = e^{-i\omega\tau}(A + e^{-i\omega\tau} B - i\,\omega E)^{-1} l$ şi $\mathcal{G} = (c, M)$. Avem $\widetilde{w} = -M\widetilde{f}_T$ şi deci

$$\chi(T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}e\left\{-(c, M)\widetilde{f}_T - \frac{1}{k}\widetilde{f}_T - q(c, M)\, i\,\omega\widetilde{f}_T\right\}\widetilde{f}_T^{*}\, d\omega =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}e\left\{\frac{1}{k} + (1 + i\,\omega\, q)\,\mathcal{G}\right\}|\widetilde{f}_T|^2$$

Presupunînd $\frac{1}{k} + \mathcal{R}e\,(1 + i\,\omega\, q)\,\mathcal{G} > 0$, obţinem $\chi(T) \leqslant 0$. Pe de altă parte,

$$\chi(T) = \int_0^T \left[(c, x(t)) - \frac{1}{k} f[\sigma(t)] + q\left(c, \frac{dx(t)}{dt}\right) - \right.$$

$$\left. - (c, u(t)) - q\left(c, \frac{du(t)}{dt}\right)\right] f[\sigma(t)]\, dt.$$

Rezultă

$$\int_0^T \left\{\sigma(t) - \frac{1}{k} f[\sigma(t)] + q\,\frac{d\sigma(t)}{dt}\right\} f[\sigma(t)]\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \left\{(c, u(t)) + q\left(c, \frac{du(t)}{dt}\right)\right\} f[\sigma(t)]\, dt.$$

Dar

$$f(\sigma)\left(\sigma - \frac{1}{k} f(\sigma)\right) \geqslant \frac{k - h_2}{k}\, h_1\, \sigma^2 = h_3\, \sigma^2.$$

Rezultă

$$h_3 \int_0^T \sigma^2(t)\, dt + q\int_{\sigma(0)}^{\sigma(T)} f(\sigma)\, d\sigma \leqslant \int_0^T \left\{(c, u(t)) + q\left(c, \frac{du(t)}{dt}\right)\right\} f[\sigma(t)]\, dt.$$

Notînd $F(\sigma) = \int_0^\sigma f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$, obţinem

$$h_3 \int_0^T \sigma^2(t)\,\mathrm{d}t + qF[\sigma(T)] \leqslant qF[\sigma(0)] +$$
$$+ \int_0^T \left\{(c, u(t)) + q\left(c, \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\right)\right\} f[\sigma(t)]\,\mathrm{d}t.$$

Avem

$$F[\sigma(T)] > \frac{h_1}{2}\sigma^2(T),$$

deci putem scrie inegalitatea

$$q\frac{h_1}{2}\sigma^2(T) + h_3\int_0^T \sigma^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant qF[\sigma(0)] +$$
$$+ \int_0^T \left\{(c, u(t)) + q\left(c, \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\right)\right\} f[\sigma(t)]\,\mathrm{d}t.$$

Dacă $\varphi$ este funcţia iniţială a soluţiei $x(t)$, avem (vezi anexa care conţine rezultatele lui N. N. Krasovski)

$$|u(t)| \leqslant \beta\,\mathrm{e}^{-\alpha' t}\|\varphi\|, \qquad \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right| \leqslant \gamma\,\mathrm{e}^{-\alpha' t}\|\varphi\|.$$

Din $\sigma f(\sigma) \leqslant h_2\sigma^2$ rezultă $|f(\sigma)| \leqslant h_2|\sigma|$, deci

$$\left|\int_0^T \left\{(c, u(t)) + q\left(c, \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\right)\right\} f[\sigma(t)]\,\mathrm{d}t\right| \leqslant L_1 \sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\sigma(t)|\,\|\varphi\|\int_0^T \mathrm{e}^{-\alpha' t}\,\mathrm{d}t.$$

Ţinînd seama de aceasta obţinem în definitiv

$$\frac{qh_1}{2}\sigma^2(T) + h_3\int_0^T \sigma^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant qF[\sigma(0)] + L_2\|\varphi\| \sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\sigma(t)|.$$

Din inegalitatea

$$\frac{qh_1}{2}\sigma^2(T) \leqslant qF[\sigma(0)] + L_2\|\varphi\| \sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\sigma(t)|$$

deducem la fel ca în capitolul II că

$$|\sigma(t)| \leqslant a_1(\|\varphi\|)$$

şi ţinînd seama de formula variaţiei constantelor deducem şi

$$|x(t)| \leqslant a_2(\|\varphi\|).$$

De aici rezultă că $\left|\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right| \leqslant a_3(\|\varphi\|)$ şi cu aceleaşi raţionamente ca în capitolul II rezultă din $\int_0^T \sigma^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant C$ faptul că $\lim_{t\to\infty}\sigma(t) = 0$.

Ţinînd seama din nou de formula variaţiei constantelor deducem că $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ şi este demonstrată următoarea :

TEOREMA 4.16. *Dacă ecuaţia*

$$\det\,(A + e^{-\lambda\tau} B - \lambda E) = 0$$

*are rădăcinile în semiplanul* $\mathcal{R}e\,\lambda \leqslant -\alpha < 0$ *şi dacă există* $q > 0$ *astfel încît*

$$\frac{1}{k} + \mathcal{R}e\,(1 + i\,\omega q)\, e^{-i\omega\tau} (c, (A + e^{-i\omega\tau} B - i\,\omega E)^{-1} l) > 0,$$

*atunci oricare ar fi funcţia f cu proprietatea că există* $h_1$ *şi* $h_2 < k$ *astfel ca* $h_1\sigma^2 \leqslant \sigma f(\sigma) \leqslant h_2\sigma^2$, *soluţia banală a sistemului este asimptotic stabilă în mare.*

## § 6. SISTEME LINIARE PERIODICE CU ÎNTÎRZIERE

Trecem acum la studiul sistemelor liniare periodice cu întîrziere, refăcînd în acest cadru general rezultatele obţinute în teoria oscilaţiilor liniare.

Considerăm sistemul (16) presupunînd în plus că $\eta(t, s)$ şi $f(t)$ sînt periodice în $t$ cu perioada $\omega > \tau$. Fie $x(t, \varphi)$ soluţia sistemului (16) definită pentru $t \geqslant -\tau$ şi care pe $[-\tau, 0]$ coincide cu $\varphi$. Din cauza periodicităţii matricii $\eta$ şi a vectorului $f$ rezultă că $x(t + \omega, \varphi)$ este o soluţie a sistemului (16), definită pentru $t + \omega \geqslant -\tau$, deci pentru $t \geqslant -\omega - \tau$. Dacă pentru $-\tau \leqslant t \leqslant 0$ această soluţie coincide cu $\varphi$, atunci, pe baza teoremei de unicitate, va rezulta $x(t + \omega, \varphi) \equiv x(t, \varphi)$ pentru toţi $t \geqslant 0$. Condiţia ca soluţia să fie periodică se scrie deci $x(\omega + s, \varphi) = \varphi(s)$ pentru $s \in [\tau, 0]$. Fie $V$ operatorul definit de relaţia $V\varphi = x(\omega, + s, \varphi)$. Soluţia determinată de funcţia iniţială $\varphi$ este periodică de perioadă $\omega$ dacă şi numai dacă $V\varphi = \varphi$. Fie $z(t, \varphi)$ soluţia sistemului omogen (17), definită pentru $\geqslant -\tau$ şi care pe $[-\tau, 0]$ coincide cu $\varphi$. Din formula (18) rezultă

$$x(t, \varphi) = z(t, \varphi) + \int_0^t f(\alpha) X(t, \alpha)\, d\alpha.$$

Notînd cu $U$ operatorul definit de relaţia $U\varphi = z(\omega + s, \varphi)$, rezultă că putem scrie

$$V\varphi = U\varphi + \int_0^{\omega+s} f(\alpha) X(\omega + s, \alpha)\, d\alpha.$$

Condiţia ca soluţia să fie periodică devine

$$\varphi = U\varphi + \int_0^{\omega+s} f(\alpha) X(\omega + s, \alpha)\, d\alpha$$

sau

$$(I - U)\,\varphi = \int_0^{\omega+s} f(\alpha) X(\omega + s, \alpha)\, d\alpha$$

unde $I$ este operatorul identic.

Operatorul $U$ este complet continuu (compact) în spaţiul Banach al funcţiilor vectoriale continue pe $[-\tau, 0]$ cu $\|\varphi\| = \sup|\varphi|$. Pentru aceasta trebuie să verificăm că dacă $\|\varphi\| \leqslant M$, mulţimea $\{U\varphi\}$ e compactă; vom arăta că această mulţime verifică cererile criteriului de compacitate al lui Arzela. Într-adevăr, din (18) rezultă că

$$U\varphi = \varphi(0)X(\omega + s, 0) + \int_{-\tau}^{0} \varphi(\beta)\,d_\beta \int_{0}^{\omega+s} \eta(\alpha, \beta - \alpha)X(\omega + s, \alpha)\,d\alpha$$

şi din $\|\varphi\| \leqslant M$ se obţine $\|U\varphi\| \leqslant M'$.

Deoarece $\omega > \tau$, rezultă $\omega + s > 0$, deci $z(\omega + s, \varphi)$ sînt derivabile şi

$$\frac{d}{ds} z(\omega + s, \varphi) = \int_{-\tau}^{0} z(\omega + s + \sigma, \varphi)\,d_\sigma \eta(s, \sigma),$$

de unde rezultă că

$$\left|\frac{d}{ds} z(\omega + s, \varphi)\right| \leqslant M'',$$

deci funcţiile $\{U\varphi\}$ sînt egal mărginite şi egal continue.

Sistemul (17) va admite o soluţie periodică de perioadă $\omega$ pentru orice $f$ dacă şi numai dacă operatorul $I - U$ e inversabil; operatorul $U$ fiind compact, $I - U$ e inversabil dacă şi numai dacă ecuaţia $U\varphi = \varphi$ nu are alte soluţii decît pe cea nulă. Dar ecuaţia $U\varphi = \varphi$ determină funcţiile iniţiale ale soluţiilor periodice ale sistemului (17). Am stabilit astfel următoarea teoremă.

TEOREMA 4.17. *Condiţia necesară şi suficientă ca sistemul* (16) *să admită soluţii periodice, oricare ar fi funcţia continuă periodică $f$, de perioadă $\omega$, este ca sistemul* (17) *să nu admită alte soluţii periodice de perioadă $\omega$ decît cea banală.*

TEOREMA 4.18. *Dacă sistemul* (16) *admite o soluţie mărginită, atunci el admite soluţii periodice. Cu alte cuvinte, dacă sistemul (16) nu admite soluţii periodice, toate soluţiile lui sînt nemărginite.*

*Demonstraţie.* Fie

$$\psi = \int_{0}^{\omega+s} f(\alpha)X(\omega + s, \alpha)\,d\alpha.$$

Am văzut că funcţiile iniţiale ale soluţiilor periodice ale sistemului (16) verifică ecuaţia $(I - U)\varphi = \psi$. Dacă sistemul (16) nu admite soluţii periodice, $\psi$ nu aparţine spaţiului $(I - U)\mathfrak{X}$. Dar operatorul $U$ e compact şi deci $(I - U)\mathfrak{X}$ e închis. Rezultă că distanţa de la $\psi$ la $(I - U)\mathfrak{X}$ nu e nulă şi atunci există o funcţională liniară $y$, nulă pe $(I - U)\mathfrak{X}$ şi egală cu 1 pe $\psi$. Pentru orice $\varphi \in \mathfrak{X}$ avem

$$y[(I - U)\varphi] = 0,$$

deci

$$y[\varphi - U\varphi] = y[\varphi] - y[U\varphi] = 0,$$

deci

$$y[\varphi] = y[U\varphi].$$

Din relația

$$y(\omega + s, \varphi) = U\varphi + \psi$$

rezultă

$$y[x(\omega + s, \varphi)] = y[U\varphi] + y[\psi] = y[\varphi] + 1.$$

Avem relația

$$x(t + n\omega, \varphi) = z(t, x(n\omega + s, \varphi)) + \int_0^t f(\alpha) X(t, \alpha)\, d\alpha.$$

Într-adevăr, în membrul al doilea avem soluția sistemului (16) care pe $[-\tau, 0]$ coincide cu $x(n\omega + s, \varphi)$; dar aceasta este tocmai soluția $x(t + n\omega, \varphi)$. Din relația scrisă deducem

$$x[(n+1)\omega + s, \varphi] = Ux(n\omega + s, \varphi) + \psi$$

Din această relație obținem prin inducție

$$y[x(n\omega + s, \varphi)] = y[\varphi] + n. \tag{22}$$

Relația (22) este adevărată pentru $n = 1$. Mai departe

$$y[x((n+1)\omega + s, \varphi)] = y[Ux(n\omega + s, \varphi)] +$$

$$+ y[\psi] = y[x(n\omega + s, \varphi)] + 1 = y[\varphi] + n + 1$$

și relația (22) este stabilită pentru toți $n$.

Din această relație rezultă că $y[x(n\omega + s, \varphi)]$ este un șir nemărginit, deci $x(t, \varphi)$ nu poate fi mărginită (funcționala $y$ e liniară și continuă, deci mărginită). Teorema e demonstrată.

## § 7. SISTEME PERIODICE CU ARGUMENT ÎNTÎRZIAT. CAZUL CRITIC

Trecînd la studiul cazului cînd sistemul (17) admite soluții nenule, periodice de perioadă $\omega$, vom examina separat cazul particular al sistemelor cu argument întîrziat de forma

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau) + f(t), \tag{23}$$

unde $A$ și $B$ și $f$ sînt continue și periodice de perioadă $\omega > \tau$.

Sistemul omogen corespunzător se scrie

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau). \tag{24}$$

Sistemul adjunct sistemului (24) va fi

$$\dot{y}(t) = -y(t)A(t) - y(t+\tau)B(t+\tau). \tag{25}$$

TEOREMA 4.19. *Dacă sistemul* (23) *admite soluții periodice de perioadă* $\omega$, *atunci*

$$\int_0^{\omega} y(t) f(t)\, \mathrm{d}t = 0$$

*pentru toate soluțiile periodice* $y(t)$ *de perioadă* $\omega$ *ale sistemului* (25).

*Demonstrație.* Fie $x(t)$ o soluție a sistemului (23) definită pentru $t \geqslant -\tau$ și $y(t)$ o soluție a sistemului (25) definită pentru $t \leqslant \omega + \tau$. Pentru $0 \leqslant t \leqslant \omega$ definim $(y, x)$ prin formula

$$(y, x) = y(t)\, x(t) + \int_0^{\tau} y(t+\eta)\, B(t+\eta)\, x(t+\eta-\tau)\, \mathrm{d}\eta =$$
$$= y(t)\, x(t) + \int_t^{t+\tau} y(\xi)\, B(\xi)\, x(\xi-\tau)\, \mathrm{d}\xi.$$

Avem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y, x) = \dot{y}(t)\, x(t) + y(t)\, \dot{x}(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_t^{t+\tau} y(\xi)\, B(\xi)\, x(\xi-\tau)\, \mathrm{d}\xi =$$
$$= -y(t)\, A(t)\, x(t) - y(t+\tau)\, B(t+\tau)\, x(t) + y(t)\, A(t)\, x(t) +$$
$$+ y(t)\, B(t)\, x(t-\tau) + y(t) f(t) + y(t+\tau)\, B(t+\tau)\, x(t) -$$
$$- y(t)\, B(t)\, x(t-\tau) = y(t) f(t).$$

Dacă $x(t)$ și $y(t)$ sînt periodice de perioadă $\omega$, avem

$$(y, x)_{\omega} = (y, x)_0,$$

deci

$$\int_0^{\omega} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y, x)\, \mathrm{d}t = 0.$$

Aceasta înseamnă că

$$\int_0^{\omega} y(t) f(t)\, \mathrm{d}t = 0$$

și teorema e demonstrată.

Pentru a merge mai departe începem prin a stabili o formulă analogă cu (18) pentru sistemul (25). Fie $y(t)$ o soluție a sistemului (25) definită pentru $t \leqslant \sigma$ prin condiții inițiale date pe $[\sigma, \sigma+\tau]$, $X(\alpha, t)$ matricea formată din soluțiile sistemului (24) cu $X(t, t) = E$, $X(\alpha, t) \equiv 0$ pentru $\alpha < t$ (variabila este $\alpha$, iar $t$ e fixat). Avem

$$\int_t^{\sigma} \dot{y}(s)\, X(s, t)\, \mathrm{d}s = -\int_t^{\sigma} y(s)\, A(s)\, X(s, t)\, \mathrm{d}s - \int_t^{\sigma} y(s+\tau)\, B(s+\tau)\, X(s, t)\, \mathrm{d}s.$$

De aici

$$y(\sigma)\, X(\sigma, t) - y(t)\, X(t, t) - \int_t^{\sigma} y(s) \frac{\partial}{\partial s} X(s, t)\, \mathrm{d}s =$$
$$= -\int_t^{\sigma} y(s)\, A(s)\, X(s, t)\, \mathrm{d}s - \int_{t+\tau}^{\sigma+\tau} y(\beta)\, B(\beta)\, X(\beta-\tau, t)\, \mathrm{d}\beta.$$

Rezultă

$$y(t) = y(\sigma)X(\sigma, t) - \int_t^\sigma y(s)A(s)X(s, t)\,ds - \int_t^\sigma y(s)B(s)X(s-\tau, t)\,ds +$$
$$+ \int_t^\sigma y(s)A(s)X(s, t)\,ds + \int_{t+\tau}^t y(s)B(s)X(s-\tau, t)\,ds +$$
$$+ \int_t^\sigma y(s)B(s)X(s-\tau, t)\,ds + \int_\sigma^{\sigma+\tau} y(s)B(s)X(s-\tau, t)\,ds.$$

Deoarece pentru $t \leqslant s < t+\tau$ avem $t-\tau \leqslant s-\tau < t$, rezultă $X(s-\tau, t) \equiv \equiv 0$ pentru $t \leqslant s < t+\tau$, deci, în definitiv

$$y(t) = y(\sigma)X(\sigma, t) + \int_\sigma^{\sigma+\tau} y(s)B(s)X(s-\tau, t)\,ds. \tag{26}$$

Vom avea nevoie şi de formula care corespunde formulei (18) în acest caz particular. Fie $Y(\alpha, t)$ o matrice ale cărei linii verifică (ca funcţii de $\alpha$), sistemul (25) pentru $\alpha < t$ şi condiţiile $Y(t, t) = E$, $Y(\alpha, t) \equiv 0$ pentru $t < \alpha \leqslant t+\tau$. E uşor de văzut că o asemenea matrice poate fi construită prin paşi. Într-adevăr, pentru $t-\tau \leqslant \alpha \leqslant t$ vom avea

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} Y(\alpha, t) + Y(\alpha, t)A(\alpha) = 0,\ Y(t, t) = E,$$

deci $Y(\alpha, t)$ se determină ca matrice fundamentală a unui sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare. Pentru $t-2\tau \leqslant \alpha \leqslant t-\tau$, $Y(\alpha, t)$ se va determina din sistemul

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} Y(\alpha, t) + Y(\alpha, t)A(\alpha) + Y(\alpha+\tau, t)B(\alpha+\tau) = 0$$

în care $Y(\alpha+\tau, t)$ se înlocuieşte cu matricea găsită în etapa precedentă. Operaţia continuă mai departe în acelaşi mod.

Avem, dacă $x(\alpha)$ este soluţie a sistemului (23),

$$\int_\sigma^t Y(\alpha, t)\dot{x}(\alpha)\,d\alpha = \int_\sigma^t Y(\alpha, t)A(\alpha)x(\alpha)\,d\alpha +$$
$$+ \int_\sigma^t Y(\alpha, t)B(\alpha)x(\alpha-\tau)\,d\alpha + \int_\sigma^t Y(\alpha, t)f(\alpha)\,d\alpha.$$

Integrînd prin părţi,

$$Y(t, t)x(t) - Y(\sigma, t)x(\sigma) - \int_\sigma^t \left[\frac{\partial}{\partial\alpha} Y(\alpha, t)\right] x(\alpha)\,d\alpha =$$
$$= \int_\sigma^t Y(\alpha, t)A(\alpha)x(\alpha)\,d\alpha + \int_{\sigma-\tau}^{t-\tau} Y(\beta+\tau, t)B(\beta+\tau)x(\beta)\,d\beta +$$
$$+ \int_\sigma^t Y(\alpha, t)f(\alpha)\,d\alpha.$$

De aici

$$x(t) = Y(\sigma, t)\, x(\sigma) - \int_{\sigma}^{t} Y(\alpha, t)\, A(\alpha)\, x(\alpha)\, d\alpha -$$

$$- \int_{\sigma}^{t} Y(\alpha + \tau, t)\, B(\alpha + \tau)\, x(\alpha)\, d\alpha + \int_{\sigma}^{t} Y(\alpha, t)\, A(\alpha)\, x(\alpha)\, d\alpha +$$

$$+ \int_{\sigma-\tau}^{t-\tau} Y(\alpha + \tau, t)\, B(\alpha + \tau)\, x(\alpha)\, d\alpha + \int_{\sigma}^{t} Y(\alpha, t) f(\alpha)\, d\alpha.$$

Rezultă

$$x(t) = Y(\sigma, t)\, x(\sigma) - \int_{t-\tau}^{t} Y(\alpha + \tau, t)\, B(\alpha + \tau)\, x(\alpha)\, d\alpha +$$

$$+ \int_{\sigma-\tau}^{\sigma} Y(\alpha + \tau, t)\, B(\alpha + \tau)\, x(\alpha)\, d\alpha + \int_{\sigma}^{t} Y(\alpha, t) f(\alpha)\, d\alpha.$$

Dar pentru $t - \tau < \alpha \leqslant t$ avem $t < \alpha + \tau \leqslant t + \tau$, deci $Y(\alpha + \tau, t) \equiv \equiv 0$. Obținem în definitiv

$$x(t) = Y(\sigma, t)\, x(\sigma) + \int_{\sigma-\tau}^{\sigma} Y(\alpha + \tau, t)\, B(\alpha + \tau)\, x(\alpha)\, d\alpha + \int_{\sigma}^{t} Y(\alpha, t) f(\alpha) d\alpha.$$

Pentru $f \equiv 0$ se capătă soluția generală a sistemului (24). Luînd soluțiile care formează matricea $X(t, \sigma)$ (soluții nule pe $[\sigma - \tau, \sigma)$, cu $X(\sigma, \sigma) = E$), rezultă

$$X(t, \sigma) = Y(\sigma, t).$$

Formula precedentă devine

$$x(t) = X(t, \sigma)\, x(\sigma) + \int_{\sigma-\tau}^{\sigma} X(t, \alpha + \tau)\, B(\alpha + \tau)\, x(\alpha)\, d\alpha +$$

$$+ \int_{\sigma}^{t} X(t, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha. \qquad (27)$$

Aceasta este formula (18) în cazul particular al sistemului (23). Să observăm că aici $x$ este un vector coloană, în timp ce în formula (18) $x$ era vector linie.

Fie, ca mai sus, $U$ operatorul definit de $U\varphi = z(\omega + s, \varphi)$, unde $z(t, \varphi)$ este soluția sistemului (24) care pe $[-\tau, 0]$ coincide cu $\varphi$.

Soluțiile periodice ale sistemului (24), de perioadă $\omega$, vor fi determinate de funcțiile inițiale care verifică relația $U\varphi = \varphi$ și cum am văzut că operatorul $U$ este compact rezultă că *sistemul* (24) *admite un număr finit de soluții periodice de peroadă* $\omega$ *liniar independente.*

Fie acum $y(t, \psi)$ soluția sistemului (25) definită pentru $t \leqslant \omega + \tau$ și care pe $[\omega, \omega + \tau]$ coincide cu $\psi$. O dată cu $y(t, \psi)$ este soluție a sistemului și $y(t - \omega, \psi)$, definită pentru $t - \omega \leqslant \omega + \tau$, deci pentru $t \leqslant 2\omega + \tau$. Dacă $y(t - \omega, \psi)$ coincide cu $\psi$ pentru $\omega \leqslant t \leqslant \omega + \tau$, atunci pe baza

teoremei de unicitate avem $y(t-\omega,\ \psi)\equiv y(t,\ \psi)$ şi soluţia e periodică. Rezultă deci că funcţiile $\psi$ care sînt funcţii iniţiale pentru soluţiile periodice ale sistemului (25) verifică relaţia

$$y\,(t-\omega,\psi)=\psi\,(t)$$

pentru $\omega\leqslant t\leqslant\omega+\tau$.

Această relaţie se scrie, ţinînd seama de (26),

$$\psi\,(t)=\psi\,(\omega)X\,(\omega,t-\omega)+\int_{\omega}^{\omega+\tau}\psi\,(\xi)\,B\,(\xi)X(\xi-\tau,t-\omega)\,\mathrm{d}\xi.$$

Notăm $\tilde{\varphi}(s)=\psi(s+\omega+\tau)$, $-\tau\leqslant s\leqslant 0$. Dacă $\psi$ verifică ecuaţia de mai sus, funcţia $\tilde{\varphi}$ verifică ecuaţia

$$\tilde{\varphi}\,(s)=\tilde{\varphi}\,(-\tau)X\,(\omega,s+\tau)+\int_{\omega}^{\omega+\tau}\tilde{\varphi}(\xi-\omega-\tau)\,B(\xi)X\,(\xi-\tau,s+\tau)\,\mathrm{d}\xi,$$

deci

$$\tilde{\varphi}\,(s)=\tilde{\varphi}\,(-\tau)X(\omega,s+\tau)+$$
$$+\int_{-\tau}^{0}\tilde{\varphi}\,(\eta)\,B\,(\eta+\tau)X\,(\eta+\omega,s+\tau)\,\mathrm{d}\eta. \tag{28}$$

În cele ce urmează vom demonstra că ecuaţia $\varphi-U\varphi=0$ şi ecuaţia (28) au acelaşi număr de soluţii liniar independente şi că ecuaţia $\varphi-U\varphi=$ $=F$ are soluţii dacă şi numai dacă

$$\tilde{\varphi}\,(-\tau)F\,(0)+\int_{-\tau}^{0}\tilde{\varphi}\,(\eta)\,B\,(\eta+\tau)F\,(\eta)\,\mathrm{d}\eta=0$$

pentru toate soluţiile $\varphi$ ale ecuaţiei (28).

Fiind date două funcţii matriciale $\psi$, $\varphi$ definite pe $[-\tau,0]$, pentru care înmulţirea este posibilă, definim operaţia

$$<\psi,\varphi>\;=\psi\,(-\tau)\,\varphi\,(0)+\int_{-\tau}^{0}\psi\,(\xi)\,B\,(\xi+\tau)\,\varphi\,(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Această operaţie este evident biliniară. Să punem în evidenţă următoarea proprietate fundamentală

$$<<L\,(\sigma),M\,(\alpha,\sigma)>,N\,(\alpha)>\;=\;<L\,(\sigma),<M\,(\alpha,\sigma),N\,(\alpha)>>. \tag{29}$$

Fie

$$K\,(\alpha)=\;<L\,(\sigma),M\,(\alpha,\sigma)>.$$

Avem

$$<K\,(\alpha),N\,(\alpha)>\;=K\,(-\tau)N\,(0)+\int_{-\tau}^{0}K\,(\xi)\,B\,(\xi+\tau)\,N\,(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

$$K\,(\alpha)=L\,(-\tau)\,M\,(\alpha,0)+\int_{-\tau}^{0}L(\xi)\,B\,(\xi+\tau)\,M\,(\alpha,\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Rezultă

$$< K(\alpha), N(\alpha) > = \Big[ L(-\tau) M(-\tau, 0) + \int_{-\tau}^{0} L(\xi) B(\xi + \tau) M(-\tau, \xi) d\xi \Big] N(0) + \int_{-\tau}^{0} \Big[ L(-\tau) M(\xi, 0) + \int_{-\tau}^{0} L(\eta) B(\eta + \tau) M(\xi, \eta) d\eta \Big] B(\xi + \tau) N(\xi) d\xi = L(-\tau) M(-\tau, 0) N(0) +$$

$$+ \int_{-\tau}^{0} L(\xi) B(\xi + \tau) M(-\tau, \xi) N(0) d\xi + L(-\tau) \int_{-\tau}^{0} M(\xi, 0) B(\xi + \tau) N(\xi) d\xi + \int_{-\tau}^{0} \Big[ \int_{-\tau}^{0} L(\eta) B(\eta + \tau) M(\xi \eta) d\eta \Big] B(\xi + \tau) N(\xi) d\xi =$$

$$= L(-\tau) \Big[ M(-\tau, 0) N(0) + \int_{-\tau}^{0} M(\xi, 0) B(\xi + \tau) N(\xi) d\xi \Big] +$$

$$+ \int_{-\tau}^{0} L(\eta) B(\eta + \tau) M(-\tau, \eta) N(0) d\eta + \int_{-\tau}^{0} L(\eta) B(\eta + \tau) \Big[ \int_{-\tau}^{0} M(\xi, \eta) B(\xi + \tau) N(\xi) d\xi \Big] d\eta = L(-\tau) \Big[ M(-\tau, 0) N(0) +$$

$$+ \int_{-\tau}^{0} M(\xi, 0) B(\xi + \tau) N(\xi) d\xi \Big] + \int_{-\tau}^{0} L(\eta) B(\eta + \tau) \Big[ M(-\tau, \eta) N(0) + \int_{-\tau}^{0} M(\xi, \eta) B(\xi + \tau) N(\xi) d\xi \Big] d\eta = < L(\sigma), < M(\alpha, \sigma), N(\alpha) > >.$$

Relaţia (29) e demonstrată.

Considerăm ecuaţia

$$\varphi(s) - \lambda K_1(s, -\tau) \varphi(0) - \lambda \int_{-\tau}^{0} K_1(s, \eta) B(\eta + \tau) \varphi(\eta) d\eta = \chi(s) \quad (30)$$

care cu notaţiile adoptate se scrie

$$\varphi(s) - \lambda < K_1(s, \alpha), \varphi(\alpha) > = \chi(s).$$

Căutăm soluţia sub forma

$$\varphi(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \varphi_i(s).$$

Înlocuind în ecuaţie şi identificînd coeficienţii puterilor lui $\lambda$ obţinem

$$\varphi_0(s) = \chi(s), \ \varphi_i(s) = < K_1(s, \alpha), \varphi_{i-1}(\alpha) >.$$

De aici rezultă

$$|\varphi_i(s)| \leqslant M^i \sup |\chi(s)|,$$

unde $M$ este oricît de mic dacă $|K_1|$ este suficient de mic. Rezultă că dacă $|K_1|$ e suficient de mic pentru ca $M < 1$, seria converge uniform şi absolut pentru $\lambda = 1$. Avem

$$\varphi_1(s) = < K_1(s, \alpha), \chi(\alpha) >.$$

Verificăm prin inducţie formula

$$\varphi_l(s) = < K_l(s, \alpha), \chi(\alpha) >,$$

unde

$$K_l(s, \eta) = < K_1(s, \alpha), K_{l-1}(\alpha, \eta) >$$

Într-adevăr, avem

$$\varphi_{l+1}(s) = < K_1(s, \alpha), \varphi_l(\alpha) > = < K_1(s, \alpha), < K_l(\alpha, \eta), \chi(\eta) > =$$

$$= << K_1(s, \alpha), K_l(\alpha, \eta) >, \chi(\eta) > = < K_{l+1}(s, \eta), \chi(\eta) >.$$

Notînd

$$\Gamma(s, \eta) = \sum_1^{\infty} K_l(s, \eta)$$

rezultă că soluţia ecuaţiei (30) pentru $\lambda = 1$ se scrie

$$\varphi(s) = \chi(s) + < \Gamma(s, \alpha), \chi(\alpha) >.$$

Fie acum ecuaţia

$$\widetilde{\varphi}(s) - \lambda\widetilde{\varphi}(-\tau) K_1(0, s) - \lambda \int_{-\tau}^{0} \widetilde{\varphi}(\eta) B(\eta + \tau) K_1(\eta, s)\, d\eta = \widetilde{\chi}(s) \qquad (31)$$

care cu notaţiile adoptate se scrie

$$\widetilde{\varphi}(s) - \lambda < \widetilde{\varphi}(\alpha), K_1(\alpha, s) > = \widetilde{\chi}(s).$$

Căutăm din nou soluţia sub forma

$$\widetilde{\varphi}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \widetilde{\varphi}_i(s);$$

obţinem

$$\widetilde{\varphi}_0(s) = \widetilde{\chi}(s), \quad \widetilde{\varphi}_i(s) = < \widetilde{\varphi}_{i-1}(\alpha), K_1(\alpha, s) >.$$

Ca mai sus se arată convergenţa absolută şi uniformă a seriei dacă $|K_1|$ e destul de mic şi $\lambda = 1$ şi prin inducţie se obţine

$$\widetilde{\varphi}_l(s) = < \widetilde{\chi}(\alpha), \widetilde{K}_l(\alpha, s) >,$$

unde

$$\widetilde{K}_l(\eta, s) = < \widetilde{K}_{l-1}(\eta, \alpha), K_1(\alpha, s) >.$$

În definitiv, soluţia ecuaţiei (31) pentru $\lambda = 1$ se scrie

$$\tilde{\varphi}(s) = \tilde{\chi}(s) + < \tilde{\chi}(\alpha), \tilde{\Gamma}(\alpha, s) >$$

unde

$$\tilde{\Gamma}(\eta, s) = \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{K}_l(\eta, s).$$

Demonstrăm prin inducţie relaţia

$$\tilde{K}_l(\eta, s) = K_l(\eta, s).$$

Avem

$$K_2(\eta, s) = < K_1(\eta, \alpha), K_1(\alpha, s) > = \tilde{K}_2(\eta, s).$$

Presupunem egalitatea adevărată pentru $j \leqslant l$. Avem

$$K_l(\eta, s) = < K_1(\eta, \alpha), K_{l-1}(\alpha, s) > = \tilde{K}_l(\eta, s) =$$

$$= < \tilde{K}_{l-1}(\eta, \alpha), K_1(\alpha, s) > = < K_{l-1}(\eta, \alpha), K_1(\alpha, s) >$$

deci

$$K_{l+1}(\eta, s) = < K_1(\eta, \alpha), K_l(\alpha, s) > =$$

$$= < K_1(\eta, \alpha), < K_{l-1}(\alpha, \beta), K_1(\beta, s) >> =$$

$$= << K_1(\eta, \alpha), K_{l-1}(\alpha, \beta) >, K_1(\beta, s) > =$$

$$= < K_l(\eta, \beta), K_1(\beta, s) > = < \tilde{K}_l(\eta, \beta), K_1(\beta, s) > = \tilde{K}_{l+1}(\eta, s).$$

Rezultă astfel că

$$\tilde{\Gamma}(\eta, s) = \Gamma(\eta, s)$$

şi soluţia ecuaţiei (31) pentru $\lambda = 1$ se scrie

$$\tilde{\varphi}(s) = \tilde{\chi}(s) + < \tilde{\chi}(\alpha), \Gamma(\alpha, s) >.$$

Ecuaţia

$$\varphi - U\varphi = F(s),$$

se scrie, ţinînd seama de formula (27),

$$\varphi(s) - X(\omega + s, 0)\,\varphi(0) - \int_{-\tau}^{0} X(\omega + s, \eta + \tau)\, B(\eta + \tau)\, \varphi(\eta)\, d\eta = F(s)$$

sau

$$\varphi(s) - < X(\omega + s, \eta + \tau), \varphi(\eta) > = F(s).$$

Deoarece $X(\omega + s, \eta + \tau)$ este uniform continuă în pătratul $-\tau \leqslant \eta \leqslant 0$, $-\tau \leqslant s \leqslant 0$, putem scrie, folosind de exemplu teorema lui Weierstrass,

$$X(\omega + s, \eta + \tau) = \sum_k a_k(s)\, b_k(\eta) + K_1(s, \eta),$$

unde $a_k(s)$ sînt vectori coloană, $b_k(\eta)$ vectori linie, $\{a_k\}$ şi $\{b_k\}$ sînt liniar independenţi, iar $|K_1(s, \eta)|$ poate fi luată oricît de mică. Ecuaţia

$$\varphi - U\varphi = F$$

devine

$$\varphi(s) - < \sum_k a_k(s) b_k(\eta) + K_1(s, \eta), \varphi(\eta) > = F(s)$$

deci

$$\varphi(s) - \sum_k a_k(s) < b_k(\eta), \varphi(\eta) > - < K_1(s, \eta), \varphi(\eta) > = F(s)$$

sau

$$\varphi(s) - < K_1(s, \eta), \varphi(\eta) > = \sum_k a_k(s) < b_k(\eta), \varphi(\eta) > + F(s).$$

Notînd

$$\varphi(s) - < K_1(s, \eta), \varphi(\eta) > = \chi(s)$$

deducem

$$\varphi(s) = \chi(s) + < \Gamma(s, \alpha), \chi(\alpha) >$$

şi obţinem pentru $\chi(s)$ ecuaţia

$$\chi(s) = \sum_k a_k(s) < b_k(\eta), \chi(\eta) + < \Gamma(\eta, \alpha), \chi(\alpha) > > + F(s) \qquad (***)$$

sau

$$\chi(s) = \sum_k a_k(s) [< b_k(\eta), \chi(\eta) > + < b_k(\eta), < \Gamma(\eta, \alpha), \chi(\alpha) > > ] + F(s) =$$

$$= \sum_k a_k(s) [< b_k(\eta), \chi(\eta) > + < < b_k(\eta), \Gamma(\eta, \alpha) >, \chi(\alpha) > ] + F(s) =$$

$$= \sum_k a_k(s) < b_k(\alpha) + < b_k(\eta), \Gamma(\eta, \alpha) >, \chi(\alpha) > + F(s)$$

deci, în definitiv,

$$\chi(s) = \sum_k a_k(s) < \bar{b}_k(\alpha), \chi(\alpha) > + F(s),$$

unde

$$\bar{b}_k(\alpha) = b_k(\alpha) + < b_k(\eta), \Gamma(\eta, \alpha) >.$$

Rezultă de aici că

$$\chi(s) - F(s) = \sum_k \lambda_k a_k(s);$$

înlocuind în ecuaţia (***) se obţine

$$\sum_k \lambda_k a_k(s) = \sum_k a_k(s) < \bar{b}_k(\alpha), F(\alpha) + \sum_i \lambda_j a_j(\alpha) >.$$

Ţinînd seama de faptul că vectorii $a_k$ sînt liniar independenţi deducem

$$\lambda_k = \sum_j \gamma_{kj}\lambda_j + f_k, \tag{32}$$

unde

$$\gamma_{kj} = < \bar{b}_k(\alpha), a_j(\alpha) >, \quad f_k = < \bar{b}_k(\alpha), F(\alpha) >.$$

Sistemul (32) are soluţie dacă şi numai dacă

$$\sum f_k \mu_k = 0 \tag{33}$$

pentru toate soluţiile sistemului

$$\mu_k = \sum_j \gamma_{jk}\mu_j. \tag{34}$$

Deoarece sistemul (32) este echivalent cu ecuaţia în $\chi$, iar aceasta e echivalentă cu ecuaţia

$$\varphi - U\varphi = F,$$

rezultă că (33) reprezintă condiţia necesară şi suficientă ca $\varphi - U\varphi = F$ să admită soluţii. Pentru a vedea ce reprezintă condiţia (33) să observăm că ecuaţia (28) se scrie

$$\tilde{\varphi}(s) = < \tilde{\varphi}(\alpha), X(\alpha + \omega, s + \tau) >$$

sau

$$\tilde{\varphi}(s) = < \tilde{\varphi}(\alpha), \sum_k a_k(\alpha) b_k(s) + K_1(\alpha, s) >,$$

deci

$$\tilde{\varphi}(s) - < \tilde{\varphi}(\alpha), K_1(\alpha, s) > = \sum_k < \tilde{\varphi}(\alpha), a_k(\alpha) > b_k(s).$$

Punînd

$$\tilde{\varphi}(s) - < \tilde{\varphi}(\alpha), K_1(\alpha, s) > = \tilde{\chi}(s)$$

obţinem

$$\tilde{\varphi}(s) = \tilde{\chi}(s) + < \tilde{\chi}(\alpha), \Gamma(\alpha, s) >,$$

ceea ce ne conduce pentru $\tilde{\chi}$ la ecuaţia

$$\tilde{\chi}(s) = \sum_k < \tilde{\chi}(\alpha) + < \tilde{\chi}(\eta), \Gamma(\eta, \alpha) >, a_k(\alpha) > b_k(s)$$

care se mai scrie

$$\tilde{\chi}(s) = \sum_k < \tilde{\chi}(\eta), \bar{a}_k(\eta) > b_k(s).$$

unde

$$\bar{a}_k(\eta) = a_k(\eta) + < \Gamma(\eta, \alpha), a_k(\alpha) >.$$

Soluţia acestei ecuaţii va fi de forma

$$\tilde{\chi}(s) = \sum_k \mu_k b_k(s)$$

şi înlocuind în ecuaţie obţinem

$$\sum_k \mu_k b_k(s) = \sum_k < \sum_j \mu_j b_j(\eta), \bar{a}_k(\eta) > b_k(s)$$

de unde, ţinînd seama că vectorii $b_k$ sînt liniar independenţi,

$$\mu_k = \sum_j \tilde{\gamma}_{jk} \mu_j, \ \tilde{\gamma}_{jk} = < b_j(\eta), \bar{a}_k(\eta) >. \tag{35}$$

Verificăm egalitatea $\tilde{\gamma}_{jk} = \gamma_{jk}$. Avem

$$\tilde{\gamma}_{jk} = < b_j(\eta), a_k(\eta) + < \Gamma(\eta, \alpha), a_k(\alpha) >> = < b_j(\eta), a_k(\eta) > +$$
$$+ < b_j(\eta), < \Gamma(\eta, \alpha), a_k(\alpha) >> = < b_j(\eta), a_k(\eta) > +$$
$$+ << b_j(\eta), \Gamma(\eta, \alpha) >, a_k(\alpha) > = < b_j(\alpha) + < b_j(\eta), \Gamma(\eta, \alpha) >, a_k(\alpha) > =$$
$$= < \bar{b}_j(\alpha), a_k(\alpha) > = \gamma_{jk}.$$

Rezultă că sistemul (35) coincide cu (34). Condiţia (33) se scrie $\sum_k \mu_k < \bar{b}_k(\alpha), F(\alpha) > = 0$, sau, ţinînd seama de expresia lui $\bar{b}_k$,

$$\sum_k \mu_k < b_k(\alpha) + < b_k(\eta), \Gamma(\eta, \alpha) >, F(\alpha) > = 0.$$

Dacă $\mu_k$ verifică sistemul (35), avem

$$\sum_k \mu_k b_k(s) = \tilde{\chi}(s)$$

deci condiţia (33) devine

$$< \tilde{\chi}(\alpha), F(\alpha) > + << \tilde{\chi}(\eta), \Gamma(\eta, \alpha) >, F(\alpha) > = 0.$$

Dar

$$\tilde{\chi}(\alpha) + < \tilde{\chi}(\eta), \Gamma(\eta, \alpha) > + \tilde{\varphi}(\alpha),$$

şi obţinem în definitiv condiţia

$$< \tilde{\varphi}(\alpha), F(\alpha) > = 0.$$

Am ajuns astfel la următorul rezultat : condiţia necesară şi suficientă ca ecuaţia $\varphi - U\varphi = F$ să aibă soluţie este ca

$$< \tilde{\varphi}(\alpha), F(\alpha) > = 0,$$

pentru toate soluţiile $\tilde{\varphi}$ ale ecuaţiei (28).

Ţinînd seama de faptul că

$$F(s) = \int_0^{\omega+s} X(\omega + s, \alpha), f(\alpha)\, d\alpha$$

şi

$$\widetilde{\varphi}(s) = \psi(s + \tau + \omega),$$

condiţia se scrie

$$\psi(\omega)\int_0^{\omega} X(\omega, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha + \int_{-\tau}^{0} \psi(\eta + \tau + \omega) B(\eta + \tau)\left[\int_0^{\omega+\eta} X(\omega+\eta, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha\right] d\eta = 0.$$

În ultima integrală permutăm ordinea de integrare şi obţinem

$$\psi(\omega)\int_0^{\omega} X(\omega, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha + \int_0^{\omega-\tau}\left[\int_{-\tau}^{0} \psi(\eta + \tau + \omega) B(\eta + \tau) X(\omega + \eta, \alpha)\, d\eta\right] f(\alpha)\, d\alpha + \int_{\omega-\tau}^{\omega}\left[\int_{\alpha-\omega}^{0} \psi(\eta + \tau + \omega) B(\eta + \tau) X(\omega + \eta, \alpha)\, d\eta\right] f(\alpha)\, d\alpha = 0.$$

Dar pentru $\eta < \alpha - \omega$ avem $\alpha > \omega + \eta$, deci $X(\omega + \eta, \alpha) \equiv 0$, deci în ultima integrală putem înlocui pe $\alpha - \omega$ cu $-\tau$ şi condiţia se scrie

$$\psi(\omega)\int_0^{\omega} X(\omega, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha + \int_0^{\omega}\left[\int_{-\tau}^{0} \psi(\eta + \tau + \omega) B(\eta + \tau) X(\omega + \eta, \alpha)\, d\eta\right] f(\alpha)\, d\alpha = 0$$

sau

$$\int_0^{\omega}\left[\psi(\omega) X(\omega, \alpha) + \int_{\omega}^{\omega+\tau} \psi(\xi) B(\xi) X(\xi - \tau, \alpha)\, d\xi\right] f(\alpha)\, d\alpha = 0.$$

Ţinînd seama de formula (26), această condiţie se scrie

$$\int_0^{\omega} y(\alpha) f(\alpha)\, d\alpha = 0, \tag{36}$$

unde $y(\alpha)$ este soluţia sistemului (25) care pe $[\omega, \omega + \tau]$ coincide cu $\psi$. Dar $\widetilde{\varphi}$ este soluţie a ecuaţiei (28) deci $\psi$ este funcţie iniţială a unei soluţii periodice a sistemului (25). Am demonstrat astfel următoarea teoremă:

TEOREMA 4.20. *Sistemele* (24) *şi* (25) *au acelaşi număr de soluţii periodice de perioadă* $\omega$ *liniar independente. Dacă este îndeplinită condiţia* (36) *pentru toate soluţiile periodice independente ale sistemului* (25), *atunci sistemul* (23) *admite soluţii periodice.*

Faptul că cele două sisteme (24) şi (25) au acelaşi număr de soluţii periodice de perioadă $\omega$ liniar independente, se vede în felul următor. Numărul soluţiilor periodice liniar independente ale sistemului (25) este egal

cu cel al soluţiilor independente ale sistemului (35), iar numărul soluţiilor periodice liniar independente ale sistemului (24) este egal cu cel al soluţiilor independente ale sistemului care se obţine în (32) cînd $f_k = 0$. Cele două sisteme de ecuaţii liniare au acelaşi număr de soluţii liniar independente, deoarece matricea sistemului (35) este transpusa matricii sistemului (32).

## § 8. CAZUL CRITIC LA SISTEME GENERALE CU ÎNTÎRZIERE

Reluăm aceeaşi problemă în cazul general. Sistemul adjunct sistemului (17) are forma

$$\frac{d}{d\alpha}[y(\alpha) + \eta(\alpha-\gamma,\gamma)\, y(\alpha-\gamma)\, d\gamma] \equiv 0 \tag{37}$$

sau

$$y(\alpha) + \int_{-\infty}^{0} \eta(\alpha-\gamma,\gamma)\, y(\alpha-\gamma)\, d\gamma = \text{const.}$$

Deoarece $\eta(t,s) \equiv 0$ pentru $s \geqslant 0$ şi $s \leqslant -\tau$, acest sistem se scrie

$$y(\alpha) + \int_{\alpha}^{\alpha+\tau} \eta(\beta, \alpha-\beta)\, y(\beta)\, d\beta = \text{const.}$$

Rezultă că pentru $\sigma$ fixat putem scrie

$$y(\alpha) + \int_{\alpha}^{\alpha+\tau} \eta(\beta, \alpha-\beta)\, y(\beta)\, d\beta = y(\sigma) + \int_{\sigma}^{\sigma+\tau} \eta(\beta, \sigma-\beta)\, y(\beta)\, d\beta$$

sau

$$y(\alpha) + \int_{\alpha}^{\sigma} \eta(\beta, \alpha-\beta)\, y(\beta)\, d\beta = y(\sigma) +$$

$$+ \int_{\sigma}^{\sigma+\tau} \eta(\beta, \sigma-\beta)\, y(\beta)\, d\beta - \int_{\sigma}^{\alpha+\tau} \eta(\beta, \alpha-\beta)\, y(\beta)\, d\beta.$$

Dacă se dă soluţia $y$ pe segmentul $[\sigma, \sigma+\tau]$, atunci pentru $\alpha<\sigma$ în membrul al doilea se află o funcţie cunoscută şi $y$ se determină pentru $\alpha<\sigma$ dintr-un sistem de ecuaţii integrale de tip Volterra. Aceasta permite să se formuleze pentru sistemul (37) teorema de existenţă şi unicitate. Pentru fiecare funcţie iniţială cu variaţii mărginită pe $[\sigma, \sigma+\tau]$ soluţia există şi e unică în clasa funcţiilor cu variaţie mărginită. Dacă funcţia iniţială e continuă, soluţia rezultă continuă. Fie $X(\alpha,\gamma)$ matricea ale cărei linii sînt soluţii ale sistemului (17) nule pentru $\alpha<\gamma$, şi astfel ca $X(\gamma,\gamma)=E$. Pentru $t<\sigma$ şi o soluţie $y(\alpha)$ a sistemului (37) a cărei funcţie iniţială e cu variaţie mărginită, avem

$$\int_{t}^{\sigma} X(\alpha, t)\, dy(\alpha) = X(\sigma, t)\, y(\sigma) - X(t, t)\, y(t) - \int_{t}^{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial\alpha} X(\alpha, t)\right] y(\alpha)\, d\alpha.$$

De aici

$$y(t) = X(\sigma, t)\, y(\sigma) + \int_t^\sigma X(\alpha, t)\, \mathrm{d}_\alpha \left[\int_{-\infty}^0 \eta(\alpha - \gamma, \gamma)\, y(\alpha - \gamma)\, \mathrm{d}\gamma\right] -$$

$$- \int_t^\sigma \left[\int_{-\infty}^0 X(\alpha + s, t)\, \mathrm{d}_s\, \eta(\alpha, s)\right] y(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha.$$

Dar

$$\int_t^\sigma \left[\int_{-\infty}^0 X(\alpha+s, t)\, \mathrm{d}_s\, \eta(\alpha,s)\right] y(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha = \int_t^\sigma \left[\int_{-\infty}^\alpha X(\beta,t)\, \mathrm{d}_\beta \eta(\alpha,\beta-\alpha)\right] y(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^t X(\beta,t)\mathrm{d}_\beta \int_t^\sigma \eta(\alpha, \beta-\alpha)\, y(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha + \int_t^\sigma X(\beta, t)\, \mathrm{d}_\beta \int_\beta^\sigma \eta(\alpha,\beta-\alpha) y(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha.$$

Rezultă

$$y(t) = X(\sigma, t)\, y(\sigma) + \int_t^\sigma X(\beta, t)\, \mathrm{d}_\beta \int_\beta^\sigma \eta(\alpha, \beta - \alpha)\, y(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha -$$

$$- \int_{-\infty}^t X(\beta, t)\, \mathrm{d}_\beta \int_t^\sigma \eta(\alpha, \beta - \alpha)\, y(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha - \int_t^\sigma X(\beta, t)\, \mathrm{d}_\beta \int_\beta^\sigma \eta(\alpha, \beta-\alpha) y(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha.$$

Deoarece $X(\beta, t) \equiv 0$ pentru $\beta < t$, cea de-a doua integrală e nulă şi obţinem

$$y(t) = X(\sigma, t)\, y(\sigma) + \int_t^\sigma X(\beta, t)\, \mathrm{d}_\beta \int_\sigma^\infty \eta(\alpha, \beta - \alpha) y(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha.$$

Ţinînd din nou seama de faptul că $X(\beta, t) \equiv 0$ pentru $\beta < t$, scriem

$$y(t) = X(\sigma, t)\, y(\sigma) + \int_{-\infty}^\sigma X(\beta, t)\, \mathrm{d}_\beta \int_\sigma^\infty \eta(\alpha, \beta - \alpha)\, y(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha$$

şi, deoarece $\eta(\alpha, \beta - \alpha) \equiv 0$ pentru $\beta - \alpha < -\tau$,

$$y(t) = X(\sigma, t)\, y(\sigma) + \int_{\sigma-\tau}^\sigma X(\beta, t)\, \mathrm{d}_\beta \int_\sigma^{\sigma+\tau} \eta(\alpha, \beta - \alpha)\, y(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha. \quad (38)$$

Direct din sistemul (37) se vede că dacă $y(\alpha)$ e soluţie a sistemului atunci $y(\alpha-\omega)$ este de asemenea soluţie, căci $\eta(t,s)$ e periodică în $t$ cu perioadă $\omega$. Fie $y(\alpha,\psi)$ soluţia sistemului (37) definită pentru $\alpha<\omega$ cu ajutorul funcţiei $\psi$, cu variaţie mărginită pe $[\omega,\omega + \tau]$. Funcţia $y(\alpha-\omega, \psi)$ va fi şi ea soluţie şi această soluţie e definită pentru $\alpha - \omega<\omega$ deci pentru $\alpha<2\omega$. Dacă pentru $\omega\leqslant\alpha\leqslant\omega + \tau$ această soluţie coincide cu $\psi$, rezultă că pentru $\alpha<\omega$ ea va coincide cu $y(\alpha,\psi)$, deci $y(\alpha - \omega, \psi) \equiv y(\alpha, \psi)$ şi soluţia $y(\alpha,\psi)$ este periodică de perioadă $\omega$. Prin urmare, condiţia ca soluţia să fie periodică de perioadă $\omega$ se scrie $y(\alpha-\omega, \psi) = \psi$ pentru $\omega \leqslant \alpha \leqslant \omega + \tau$. Ţinînd seama de (38), această condiţie se scrie

$$\psi(\alpha) = X(\omega, \alpha - \omega)\, \psi(\omega) + \int_{\omega-\tau}^\omega X(\beta, \alpha - \omega)\, \mathrm{d}_\beta \int_\omega^{\omega+\tau} \eta(\gamma,\beta-\gamma)\psi(\gamma)\, \mathrm{d}\gamma.$$

Notăm $\tilde{\varphi}(s) = \psi(s + \omega + \tau)$; obținem

$$\tilde{\varphi}(s) = X(\omega, s + \tau)\,\tilde{\varphi}(-\tau) +$$

$$+ \int_{\omega-\tau}^{\omega} X(\beta, s + \tau)\, d_\beta \int_{\omega}^{\omega+\tau} \eta(\gamma, \beta - \gamma)\,\tilde{\varphi}(\gamma - \omega - \tau)\, d\gamma.$$

Făcînd în ultima integrală $\gamma - \omega - \tau = \xi$, obținem

$$\tilde{\varphi}(s) = X(\omega, s + \tau)\,\tilde{\varphi}(-\tau) +$$

$$+ \int_{\omega-\tau}^{\omega} X(\beta, s + \tau)\, d_\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\xi + \omega + \tau, \beta - \xi - \omega - \tau)\,\tilde{\varphi}(\xi)\, d\xi.$$

Punem în prima integrală $\beta = \zeta + \omega$ și obținem

$$\tilde{\varphi}(s) = X(\omega, s + \tau)\,\tilde{\varphi}(-\tau) +$$

$$+ \int_{-\tau}^{0} X(\zeta + \omega, s + \tau)\, d_\zeta \int_{-\tau}^{0} \eta(\xi + \tau, \zeta - \xi - \tau)\,\tilde{\varphi}(\xi)\, d\xi. \qquad (39)$$

Soluțiile ecuației (39) dau funcțiile inițiale ale soluțiilor periodice ale sistemului (37).

Pe baza formulei (18) avem

$$x(t, \varphi) = \varphi(0) X(t, 0) + \int_{-\infty}^{0} \varphi(s)\, d_s \int_{0}^{t} \eta(\alpha, s - \alpha) X(t, \alpha)\, d\alpha +$$

$$+ \int_{0}^{t} f(\alpha) X(t, \alpha)\, d\alpha .$$

Deoarece $\alpha \geqslant 0$, dacă $s \leqslant -\tau$, rezultă $s - \alpha \leqslant -\tau$, deci $\eta(\alpha, s - \alpha) \equiv 0$ și formula se poate scrie

$$x(t, \varphi) = \varphi(0) X(t, 0) + \int_{-\tau}^{0} \varphi(s)\, d_s \int_{0}^{t} \eta(\alpha, s - \alpha) X(t, \alpha)\, d\alpha +$$

$$+ \int_{0}^{t} f(\alpha) X(t, \alpha)\, d\alpha.$$

Ținînd seama de faptul că $X(t, \alpha) \equiv 0$ pentru $t < \alpha$, deducem

$$x(t, \varphi) = \varphi(0) X(t, 0) + \int_{-\tau}^{0} \varphi(s)\, d_s \int_{0}^{\infty} \eta(\alpha, s - \alpha) X(t, \alpha)\, d\alpha +$$

$$+ \int_{0}^{t} f(\alpha) X(t, \alpha)\, d\alpha.$$

Dar $s \leqslant 0$ şi deci dacă $\alpha > \tau$ avem $s - \alpha \leqslant -\tau$ şi $\eta\,(\alpha, s - \alpha) \equiv 0$ deci în definitiv

$$x\,(t, \varphi) = \varphi\,(0) X\,(t, 0) + \int_{-\tau}^{0} \varphi\,(s)\,\mathrm{d}_s \int_{0}^{\tau} \eta\,(\alpha, s - \alpha) X\,(t, \alpha)\,\mathrm{d}\alpha +$$

$$+ \int_{0}^{t} f\,(\alpha) X\,(t, \alpha)\,\mathrm{d}\alpha$$

sau

$$x\,(t, \varphi) = \varphi\,(0) X\,(t, 0) + \int_{-\tau}^{0} \varphi\,(\beta)\,\mathrm{d}_\beta \int_{-\tau}^{0} \eta\,(\gamma + \tau, \beta - \gamma - \tau) X\,(t, \gamma + \tau)\,\mathrm{d}\gamma +$$

$$+ \int_{0}^{t} f\,(\alpha) X\,(t, \alpha)\,\mathrm{d}\alpha.$$

Condiţia ca soluţia să fie periodică se scrie, după cum am mai văzut,

$$x\,(\omega + s, \varphi) = \varphi\,(s),$$

deci

$$\varphi\,(s) = \varphi\,(0) X\,(\omega + s, 0) + \int_{-\tau}^{0} \varphi\,(\beta)\,\mathrm{d}_\beta \int_{-\tau}^{0} \eta\,(\gamma + \tau, \beta - \gamma - \tau) X\,(\omega +$$

$$+ s, \gamma + \tau)\,\mathrm{d}\gamma + \int_{0}^{\omega + s} f\,(\alpha) X\,(\omega + s, \alpha)\,\mathrm{d}\alpha. \tag{40}$$

Definim operaţia

$$<\varphi, \psi> = \varphi\,(0)\,\psi\,(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} \varphi\,(\gamma)\,\mathrm{d}_\beta \int_{-\tau}^{0} \eta\,(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau)\,\psi\,(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Demonstrăm proprietatea fundamentală

$$<<L(\beta), M(\beta, \sigma)>, N(\sigma)> = <L(\beta), <M(\beta, \sigma)>, N(\sigma)>>. \tag{41}$$

Fie

$$K\,(\sigma) = <L(\beta), M\,(\beta, \sigma)>, \quad P\,(\beta) = <M\,(\beta, \sigma), N\,(\sigma)>.$$

Avem

$$K\,(\sigma) = L\,(0)\,M\,(-\tau, \sigma) + \int_{-\tau}^{0} L\,(\gamma)\,\mathrm{d}_\gamma \int_{-\tau}^{0} \eta\,(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau)\,M\,(\xi, \sigma)\,\mathrm{d}\xi,$$

$$<<L\,(\beta), M\,(\beta, \sigma)>, N\,(\sigma)> = <(K\,(\sigma), N\,(\sigma)> = K\,(0)\,N\,(-\tau) +$$

$$+ \int_{-\tau}^{0} K\,(\gamma)\,\mathrm{d}_\gamma \int_{-\tau}^{0} \eta\,(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau)\,N\,(\xi)\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \Big[L\,(0)\,M\,(-\tau, 0) + \int_{-\tau}^{0} L\,(\gamma)\,\mathrm{d}_\gamma \int_{-\tau}^{0} \eta\,(\xi +$$

$$+ \tau, \gamma - \xi - \tau) \, M(\xi, 0) \, d\xi \Big] N(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} \Big[ L(0) M(-\tau, \gamma) +$$

$$+ \int_{-\tau}^{0} L(\zeta) \, d\zeta \int_{-\tau}^{0} \eta(\xi + \tau, \zeta - \xi - \tau) \, M(\xi, \gamma) \, d\xi \Big] d\gamma \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha +$$

$$+ \tau, \gamma - \alpha - \tau) \, N(\alpha) \, d\alpha = L(0) \Big[ M(-\tau, 0) \, N(-\tau) +$$

$$+ \int_{-\tau}^{0} M(-\tau, \gamma) \, d\gamma \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha + \tau, \gamma - \alpha - \tau) \, N(\alpha) \, d\alpha \Big] +$$

$$+ \int_{-\tau}^{0} L(\gamma) \, d\gamma \int_{-\tau}^{0} \eta(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) \, M(\xi, 0) \, N(-\tau) \, d\xi +$$

$$+ \int_{-\tau}^{0} \Big[ \int_{-\tau}^{0} L(\zeta) \, d\zeta \int_{-\tau}^{0} \eta(\xi + \tau, \zeta - \xi - \tau) \, M(\xi, \gamma) \, d\xi \Big] d\gamma \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha +$$

$$+ \tau, \gamma - \alpha - \tau) \, N(\alpha) \, d\alpha = L(0) \, P(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} L(\gamma) \, d\gamma \int_{-\tau}^{0} \eta(\xi +$$

$$+ \tau, \gamma - \xi - \tau) \, M(\xi, 0) \, N(-\tau) \, d\xi + \int_{-\tau}^{0} L(\zeta) \, d\zeta \int_{-\tau}^{0} \Big( \int_{-\tau}^{0} \eta(\xi +$$

$$+ \tau, \zeta - \xi - \tau) \, M(\xi, \gamma) \, d\xi \Big) d\gamma \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha + \tau, \gamma - \alpha - \tau) \, N(\alpha) \, d\alpha =$$

$$= L(0) \, P(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} L(\zeta) \, d\zeta \int_{-\tau}^{0} \eta(\xi + \tau, \zeta - \xi - \tau) \, M(\xi, 0) \, N(-\tau) \, d\xi +$$

$$+ \int_{-\tau}^{0} L(\zeta) \, d\zeta \int_{-\tau}^{0} \eta(\xi + \tau, \zeta - \xi - \tau) \Big( \int_{-\tau}^{0} M(\xi, \gamma) \, d\gamma \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha +$$

$$+ \tau, \gamma - \alpha - \tau) \, N(\alpha) \, d\alpha \Big) d\xi = L(0) \, P(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} L(\zeta) \, d\zeta \int_{-\tau}^{0} \eta(\xi +$$

$$+ \tau, \zeta - \xi - \tau) \Big[ M(\xi, 0) \, N(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} M(\xi, \gamma) \, d\gamma \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha +$$

$$+ \tau, \gamma - \alpha - \tau) \, N(\alpha) \, d\alpha \Big] d\xi = L(0) \, P(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} L(\zeta) \, d\zeta \int_{-\tau}^{0} \eta, (\xi +$$

$$+ \tau, \zeta - \xi - \tau) \, P(\xi) \, d\xi = \langle L(\beta), P(\beta) \rangle =$$

$$= \langle L(\beta), \langle M(\beta, \alpha) \, N(\alpha) \rangle \rangle .$$

**Relaţia (41) este astfel demonstrată.**

Considerăm ecuația

$$\varphi(s) - \lambda < \varphi(\sigma), K_1(\sigma, s) > = \chi(s)$$

și căutăm soluția ei sub forma

$$\varphi(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \varphi_i(s).$$

Se capătă

$$\varphi_0(s) = \chi(s), \quad \varphi_i(s) = < \varphi_{i-1}(\sigma), K_1(\sigma, s) >.$$

De aici rezultă că dacă $|K_1|$ e suficient de mic, seria este uniform și absolut convergentă pentru $\lambda = 1$.
Avem

$$\varphi_1(s) = < \chi(\sigma), K_1(\sigma, s) >, \quad \varphi_l(s) = < \chi(\sigma), K_l(\sigma, s) >$$

unde

$$K_l(\alpha, s) = < K_{l-1}(\alpha, \sigma), K_1(\sigma, s) >.$$

Într-adevăr,

$$\varphi_{l+1}(s) = < \varphi_l(\sigma), K_1(\sigma, s) > = << \chi(\alpha), K_l(\alpha, \sigma) >, K_1(\sigma, s) > =$$
$$= < \chi(\alpha), < K_l(\alpha, \sigma), K_1(\sigma, s) \gg = < \chi(\alpha), K_{l+1}(\alpha, s) >.$$

Notînd

$$\Gamma(\alpha, s) = \sum_{1}^{\infty} K_l(\alpha, s),$$

deducem că soluția ecuației

$$\varphi(s) - < \varphi(\sigma), K(\sigma, s) > = \chi(s)$$

se scrie

$$\varphi(s) = \chi(s) + < \chi(\sigma), \Gamma(\sigma, s) >.$$

Considerăm acum ecuația

$$\tilde{\varphi}(s) - \lambda < K_1(s, \alpha), \tilde{\varphi}(\alpha) > = \tilde{\chi}(s)$$

și căutăm soluția sub forma

$$\tilde{\varphi}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \tilde{\varphi}_i(s).$$

Obținem

$$\tilde{\varphi}_0(s) = \tilde{\chi}(s), \quad \tilde{\varphi}_i(s) = < K_1(s, \alpha), \tilde{\varphi}_{i-1}(\alpha) >.$$

Ca mai sus se deduce că seria e uniform și absolut convergentă pentru $\lambda = 1$ dacă $|K_1|$ e suficient de mic. De asemenea

$$\tilde{\varphi}_1(s) = < K_1(s, \alpha), \chi(\alpha) >, \quad \tilde{\varphi}_l(s) = < \tilde{K}_l(s, \alpha), \chi(\alpha) >,$$

unde

$$\tilde{K}_l(s, \alpha) = < K_1(s, \sigma), \tilde{K}_{l-1}(\sigma, \alpha) >.$$

Într-adevăr,

$$\tilde{\varphi}_{l+1}(s) = < K_1(s, \alpha), \tilde{\varphi}_l(\alpha) > = < K_1(s, \alpha), < \widetilde{K}_l(\alpha, \beta), \tilde{\chi}(\beta) >> =$$
$$= << K_1(s, \alpha), \widetilde{K}_l(\alpha, \beta)>, \chi(\beta)> = <\widetilde{K}_{l+1}(s, \beta), \chi(\beta)>.$$

Rezultă că soluţia ecuaţiei

$$\tilde{\varphi}(s) - < K_1(s, \alpha), \tilde{\varphi}(\alpha) > = \tilde{\chi}(s)$$

e dată de

$$\tilde{\varphi}(s) = \tilde{\chi}(s) + < \widetilde{\Gamma}(s, \alpha), \tilde{\chi}(\alpha) >,$$

unde

$$\widetilde{\Gamma}(s, \alpha) = \sum_1^\infty \widetilde{K}_l(s, \alpha).$$

Dovedim că

$$\widetilde{K}_l(s, \alpha) = K_l(s, \alpha).$$

Avem

$$\widetilde{K}_2(s, \alpha) = < K_1(s, \sigma), K_1(\sigma, \alpha) > = K_2(s, \alpha).$$

Presupunem egalitatea adevărată pentru $j \leqslant l$. Atunci

$$K_l(s, \alpha) = < K_{l-1}(s, \beta), K_1(\beta, \alpha) > = \widetilde{K}_l(s, \alpha) = < K_1(s, \beta), \widetilde{K}_{l-1}(\beta, \alpha)> =$$
$$= < K_1(s, \beta), K_{l-1}(\beta, \alpha) >$$
$$K_{l+1}(s, \alpha) = < K_l(s, \beta), K_1(\beta, \alpha) > =$$
$$= << K_1(s, \gamma), K_{l-1}(\gamma, \beta)>, K_1(\beta, \alpha)> = <K_1(s, \gamma) < K_{l-1}(\gamma, \beta), K_1(\beta, \alpha)>> =$$
$$= < K_1(s, \gamma), K_l(\gamma, \alpha) > = < K_1(s, \gamma), \widetilde{K}_l(\gamma, \alpha) > = \widetilde{K}_{l+1}(s, \alpha).$$

Rezultă de aici

$$\widetilde{\Gamma}(s, \alpha) = \Gamma(s, \alpha).$$

Deoarece $X(\omega + s, \alpha + \tau)$ este uniform continuă în $-\tau \leqslant \alpha \leqslant 0$, $-\tau \leqslant s \leqslant 0$, putem scrie

$$X(\omega + s, \alpha + \tau) = \sum_k a_k(\alpha) b_k(s) + K_1(\alpha, s),$$

unde $a_k(\alpha)$ sînt vectori coloană, $b_k(s)$ vectori linie, $\{a_k\}$ şi $\{b_k\}$ sînt formate din vectori liniar independenţi, iar $|K_1|$ poate fi luat oricît de mic. Ecuaţia (40) se scrie

$$\varphi(s) = < \varphi(\sigma), X(\omega + s, \sigma + \tau) > + F(s),$$

deci

$$\varphi(s) = < \varphi(\sigma), \sum_k a_k(\sigma) b_k(s) + K_1(\sigma, s) > + F(s)$$

sau

$$\varphi(s) - < \varphi(\sigma), K_1(\sigma, s) > = \sum_k < \varphi(\sigma), a_k(\sigma) > b_k(s) + F(s).$$

Notăm

$$\varphi(s) - < \varphi(\sigma), K_1(\sigma, s) > = \chi(s);$$

obţinem

$$\varphi(s) = \chi(s) + < \chi(\sigma), \Gamma(\sigma, s) >,$$

de unde deducem pentru $\chi$ ecuaţia

$$\chi(s) = \sum_k < \chi(\sigma) + < \chi(\alpha), \Gamma(\alpha, \sigma) >, a_k(\sigma) > b_k(s) + F(s)$$

sau

$$\chi(s) = \sum_k \{< \chi(\sigma), a_k(\sigma) > + < \chi(\alpha), < \Gamma(\alpha, \sigma), a_k(\sigma) > > \} b_k(s) + F(s). \quad (*)$$

Notînd

$$a_k(\alpha) + < \Gamma(\alpha, \sigma), a_k(\sigma) > = \bar{a}_k(\alpha),$$

obţinem

$$\chi(s) = \sum_k < \chi(\sigma), \bar{a}_k(\sigma) > b_k(s) + F(s).$$

De aici deducem

$$\chi(s) - F(s) = \sum_k \lambda_k b_k(s),$$

şi înlocuind în ecuaţia (*), obţinem

$$\sum_k \lambda_k b_k(s) = \sum_k < \sum_j \lambda_j b_j(\sigma), \bar{a}_k(\sigma) > b_k(s) + \sum_k < F(\sigma), \bar{a}_k(\sigma) > b_k(s)$$

de unde

$$\lambda_k = \sum_j \gamma_{kj} \lambda_j + f_k, \quad \gamma_{kj} = < b_j(\sigma), \bar{a}_k(\sigma) >,$$

$$f_k = < F(\sigma), \bar{a}_k(\sigma) >. \quad (42)$$

Sistemul (42) are soluţii dacă şi numai dacă

$$\sum_k f_k \mu_k = 0 \quad (43)$$

pentru toate soluţiile sistemului

$$\mu_k = \sum_j \gamma_{jk} \mu_j. \quad (44)$$

Deoarece (42) este echivalent cu ecuaţia în $\chi(s)$ iar aceasta e echivalentă cu (40), rezultă că (43) reprezintă condiţia necesară şi suficientă pentru ca (40) să aibă soluţii, deci pentru ca sistemul (16) să aibă soluţii periodice.
Ecuaţia (39) se scrie

$$\tilde{\varphi}(s) = < X(\omega + \sigma, s + \tau), \tilde{\varphi}(\sigma) >,$$

deci

$$\tilde{\varphi}(s) = < \sum_k a_k(s) b_k(\sigma) + K_1(s, \sigma), \tilde{\varphi}(\sigma) >,$$

sau

$$\tilde{\varphi}(s) - < K_1(s, \sigma), \tilde{\varphi}(\sigma) > = \sum_k a_k(s) < b_k(\sigma), \tilde{\varphi}(\sigma) >.$$

Punem

$$\tilde{\varphi}(s) - < K_1(s, \sigma), \tilde{\varphi}(\sigma) > = \tilde{\chi}(s)$$

şi obţinem

$$\tilde{\varphi}(s) = \tilde{\chi}(s) + < \Gamma(s, \alpha)\tilde{\chi}(\alpha) >,$$

de unde deducem pentru $\tilde{\chi}(s)$ ecuaţia

$$\tilde{\chi}(s) = \sum_k a_k(s) < b_k(\sigma), \tilde{\chi}(\sigma) + < \Gamma(\sigma, \alpha), \tilde{\chi}(\alpha) >> =$$

$$= \sum_k a_k(s) \{ < b_k(\sigma), \tilde{\chi}(\sigma) > + << b_k(\sigma), \Gamma(\sigma, \alpha) >, \tilde{\chi}(\alpha) > \} =$$

$$= \sum_k a_k(s) < \bar{b}_k(\alpha), \tilde{\chi}(\alpha) >,$$

unde

$$\bar{b}_k(\alpha) = b_k(\alpha) + < b_k(\sigma), \Gamma(\sigma, \alpha) >.$$

Rezultă

$$\tilde{\chi}(s) = \sum_k \mu_k a_k(s)$$

şi înlocuind

$$\sum_k \mu_k a_k(s) = \sum_k a_k(s) < \bar{b}_k(\alpha), \sum_j \mu_j a_j(\alpha) >,$$

deci

$$\mu_k = \sum_j \tilde{\gamma}_{kj} \mu_j,$$

unde

$$\tilde{\gamma}_{kj} = < \bar{b}_k(\alpha), a_j(\alpha) >.$$

Avem $\tilde{\gamma}_{kj} = \gamma_{jk}$. Într-adevăr,

$$\tilde{\gamma}_{kj} = < b_k(\alpha) + < b_k(\sigma), \Gamma(\sigma, \alpha) >, a_j(\alpha) > = < b_k(\alpha), a_j(\alpha) > +$$
$$+ < b_k(\sigma), < \Gamma(\sigma, \alpha), a_j(\alpha) >>$$

$$\gamma_{jk} = < b_k(\sigma), \bar{a}_j(\sigma) > = < b_k(\sigma), a_j(\sigma) + < \Gamma(\sigma, \alpha), a_j(\alpha) >> =$$
$$= < b_k(\sigma), a_j(\sigma) > + < b_k(\sigma), < \Gamma(\sigma, \alpha), a_j(\alpha) >>.$$

Rezultă că dacă $\mu_k$ verifică sistemul (44), atunci

$$\tilde{\varphi}(s) = \tilde{\chi}(s) + < \Gamma(s, \alpha), \tilde{\chi}(\alpha) >,$$

unde

$$\tilde{\chi}(\alpha) = \sum \mu_k a_k(\alpha)$$

verifică ecuaţia (39) şi reciproc.

Mai departe,

$$\sum_k f_k \mu_k = \sum_k \mu_k < F(\sigma), \bar{a}_k(\sigma) > = \sum_k \mu_k < F(\sigma), a_k(\sigma) +$$

$$+ < \Gamma(\sigma, \alpha), a_k(\alpha) >> = < F(\sigma), \sum_k \mu_k a_k(\sigma) > +$$

$$+ < F(\sigma), < \Gamma(\sigma, \alpha), \sum_k \mu_k a_k(\alpha) >> = < F(\sigma), \tilde{\chi}(\sigma) > +$$

$$+ < F(\sigma), < \Gamma(\sigma, \alpha), \tilde{\chi}(\alpha) >> = < F(\sigma), \tilde{\varphi}(\sigma) >.$$

Rezultă de aici că (43) se scrie

$$< F(\sigma), \tilde{\varphi}(\sigma) > = 0,$$

pentru toate soluțiile ecuației (39). Avem

$$< F(\sigma), \tilde{\varphi}(\sigma) > = \int_0^{\omega} f(\alpha) X(\omega, \alpha)\, d\alpha\, \tilde{\varphi}(-\tau) +$$

$$+ \int_{-\tau}^{0} \left( \int_0^{\omega+\beta} f(\alpha) X(\omega+\beta, \alpha)\, d\alpha \right) d_\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha+\tau, \beta-\alpha-\tau)\, \tilde{\varphi}(\alpha)\, d\alpha.$$

Dar

$$\tilde{\varphi}(s) = \psi(s+\omega+\tau)$$

și avem succesiv

$$< F(\sigma), \tilde{\varphi}(\sigma) > = \int_0^{\omega} f(\alpha) X(\omega, \alpha)\, d\alpha\, \psi(\omega) +$$

$$+ \int_{-\tau}^{0} \left( \int_0^{\omega+\beta} f(\alpha) X(\omega+\beta, \alpha)\, d\alpha \right) d_\beta \int_{\omega}^{\omega+\tau} \eta(\xi, \beta-\xi+\omega)\, \psi(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_0^{\omega} f(\alpha) X(\omega, \alpha)\, \psi(\omega)\, d\alpha + \int_{-\omega}^{0} \left( \int_0^{\omega+\beta} f(\alpha) X(\omega +$$

$$+ \beta, \alpha)\, d\alpha \right) d_\beta \int_{\omega}^{\omega+\tau} \eta(\xi, \beta-\xi+\omega)\, \psi(\xi)\, d\xi = \int_0^{\omega} f(\alpha) X(\omega, \alpha)\, \psi(\omega)\, d\alpha +$$

$$+ \int_0^{\omega} f(\alpha) \left[ \int_{\alpha-\omega}^{0} X(\omega+\beta, \alpha)\, d_\beta \int_{\omega}^{\omega+\tau} \eta(\xi, \beta-\xi+\omega)\, \psi(\xi)\, d\xi \right] d\alpha =$$

$$= \int_0^{\omega} f(\alpha) \left[ X(\omega, \alpha)\, \psi(\omega) + \int_{\alpha}^{\omega} X(\gamma, \alpha)\, d_\gamma \int_{\omega}^{\omega+\tau} \eta(\xi, \gamma-\xi)\, \psi(\xi)\, d\xi \right] d\alpha.$$

Ținînd seama de formula (38) deducem în definitiv că

$$< F(\sigma), \tilde{\varphi}(\sigma) > = \int_0^{\omega} f(\alpha)\, y(\alpha)\, d\alpha,$$

unde $y$ este soluţia periodică a sistemului (37) determinată de funcţia iniţială $\psi$. Am obţinut astfel următoarea teoremă :

TEOREMA 4.19′. *Sistemele* (17) *şi* (37) *au acelaşi număr* (*finit*) *de soluţii periodice de perioadă* $\omega$ *liniar independente. Condiţia necesară şi suficientă ca sistemul* (16) *să admită soluţii periodice de perioadă* $\omega$ *este ca* $\int_0^\omega f(\alpha) y(\alpha) \, d\alpha = 0$ *pentru toate soluţiile periodice* $y(\alpha)$, *de perioadă* $\omega$ *ale sistemului* (37).

## § 9. TEORIA STABILITĂŢII SISTEMELOR LINIARE PERIODICE CU ÎNTÎRZIERE

Ne propunem să studiem problema stabilităţii soluţiei banale pentru sistemul (17) în cazul cînd matricea $\eta(t, s)$ este periodică în $t$ cu perioadă $\omega > \tau$.

Fie $x(t, t_0, \varphi)$ soluţia sistemului (17) definită pentru $t \geqslant t_0 - \tau$ care pe $[t_0 - \tau, t_0]$ coincide cu $\varphi$. Din cauza periodicităţii sistemului, $x(t+\omega, t_0, \varphi)$ va fi de asemenea soluţie. Notăm $U_{t,t_0}$ operatorul definit de

$$U_{t,t_0} \varphi = x(t + s - t_0, t_0, \varphi) \quad t_0 - \tau \leqslant s \leqslant t_0.$$

Avem

$$U_{t_0,t_0} \varphi = \varphi$$

şi

$$x(t + \omega + s - t_0, t_0, \varphi) = U_{t,t_0} x(\omega + s, t_0, \varphi) = U_{t,t_0} U_{t_0+\omega,t_0} \varphi,$$

deci

$$U_{t+\omega,t_0} = U_{t,t_0} U_{t_0+\omega,t_0}.$$

Fie

$$N\omega \leqslant t - t_0 < (N + 1)\omega,$$

deci

$$t = t_0 + N\omega + t', \quad 0 \leqslant t' < \omega.$$

Avem

$$U_{t,t_0} = U_{t_0+t'+N\omega,t_0} = U_{t_0+t',t_0} \cdot U^N_{t_0+\omega,t_0}.$$

Pe baza inegalităţii (3) rezultă

$$\| U_{t_0+t',t_0} \| < M_0,$$

unde $M_0$ este o constantă care depinde numai de funcţia $\eta$. Prin urmare

$$\| U_{t,t_0} \| \leqslant M_0 \| U^N_{t_0+\omega,t_0} \|.$$

Rezultă de aici

$$| x(t, t_0, \varphi) | \leqslant M_0 \| U^N_{t_0+\omega,t_0} \| \| \varphi \|,$$

deci proprietăţile de stabilitate vor depinde numai de comportarea şirului $\| U^N_{t_0+\omega,t_0} \|$. Dacă există $M > 0$ astfel ca pentru orice $N$ natural şi orice $t_0 \geqslant 0$ să avem

$$\| U^N_{t_0+\omega,t_0} \| \leqslant M,$$

soluţia banală a sistemului (17) este uniform stabilă. Dacă există $k > 0$ şi $\varepsilon > 0$ astfel încît pentru orice $N$ natural şi orice $t_0 \geqslant 0$ să avem

$$\| U^N_{t_0 + \omega, t_0} \| \leqslant k(1-\varepsilon)^N ,$$

va rezulta stabilitatea asimptotică uniformă.

După cum am mai văzut, operatorul $U_{t_0+\omega, t_0}$ este compact, dacă $\omega > \tau$ (am arătat acest lucru în cazul $t_0 = 0$, dar demonstraţia e aceeaşi şi în cazul general). Pentru orice operator $U$, valorile $\lambda$ cu $|\lambda| > \|U\|$ nu se află în spectru, deci pentru orice $\lambda$ din spectru avem $|\lambda| \leqslant \|U\|$, deci $|\lambda^N| \leqslant \|U^N\|$ şi din $\|U^N\| \leqslant M$ rezultă $|\lambda|^N \leqslant M$ pentru $N = 1,2,\ldots,n,\ldots$ ceea ce implică $|\lambda| \leqslant 1$. Rezultă că dacă $\|U^N\| \leqslant M$, atunci spectrul lui $U$ se află în cercul unitate. Notînd cu $\sigma(U)$ spectrul operatorului $U$, fie $\sigma(U) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, unde $\sigma_1$ este în $|\lambda| < 1$ iar $\sigma_2$ pe $|\lambda| = 1$. Dacă $U$ este compact, atunci $\sigma_1$ şi $\sigma_2$ sînt separate şi $\sigma_2$ este finită. Spaţiul $\mathfrak{X}$ pe care este dat $U$ se descompune în sumă directă $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$ şi corespunzător $U = U_1 \oplus U_2$, astfel ca $\sigma(U_1) = \sigma_1$, $\sigma(U_2) = \sigma_2$. Rezultă $U^N = U_1^N \oplus U_2^N$ şi dacă $\|U^N\| \leqslant M$, atunci $\|U_2^N\| \leqslant M$.

Deoarece $U_2$ nu are originea în spectru, rezultă că $\mathfrak{X}_2$ este de dimensiune finită, deci $U_2$ poate fi reprezentat printr-o matrice. Dacă $\|U_2^N\| \leqslant M$, valorile proprii ale acestei matrici fiind situate pe cercul unitate, trebuie să aibă divizori elementari simpli.

Prin urmare, dacă $U$ e compact şi $\|U^N\| \leqslant M$ pentru orice $N$ natural, spectrul său este în cercul $|\lambda| \leqslant 1$ iar valorilor proprii situate pe $|\lambda| = 1$ le corespund divizori elementari simpli. Reciproc, dacă spectrul operatorului compact $U$ se află în cercul $|\lambda| \leqslant 1$ iar valorile proprii de pe $|\lambda| = 1$ au divizori elementari simpli, rezultă $U = U_1 \oplus U_2$, $\|U_2^N\| \leqslant M$ şi $\sigma(U_1)$ situat în cercul $|\lambda| < 1$. Dar pentru orice operator avem relaţia

$$\sup |\sigma(U)| = \lim \|U^n\|^{\frac{1}{n}} ;$$

dacă operatorul e compact, atunci $\sup |\sigma(U)|$ e atinsă pentru o valoare proprie, căci singurul punct de acumulare al spectrului e origina. Rezultă că dacă $\sigma(U_1)$ e în cercul $|\lambda| < 1$, atunci $\sup |\sigma(U_1)| < 1$, deci

$$\lim_{n\to\infty} \|U_1^n\|^{\frac{1}{n}} = \alpha < 1 .$$

De aici deducem că pentru $n$ suficient de mare

$$\|U_1^n\| < (1-\varepsilon)^n,$$

ceea ce arată că pentru orice $N$ natural avem

$$\|U_1^N\| < k(1-\varepsilon)^N .$$

În definitiv $\|U^N\|$ rezultă mărginită. Am arătat astfel că dacă $U$ e compact, necesar şi suficient pentru ca $\|U^N\| \leqslant M$ pentru orice $N$ natural este ca spectrul său să se afle în cercul $|\lambda| \leqslant 1$ iar valorilor proprii de pe $|\lambda| = 1$ să le corespundă divizori elementari simpli. Vom aplica acest rezultat general operatorului $U_{t_0+\omega, t_0}$.

DEFINIȚIE. *Valorile proprii ale operatorului* $U_{t_0+\omega, t_0}$ *se numesc multiplicatorii sistemului.*

Pentru a justifica această definiție să arătăm că dacă $\rho$ este un multiplicator, există o soluție a sistemului (17) pentru care

$$x(t+\omega) = \rho\, x(t).$$

Într-adevăr, fie $\varphi$ o funcție proprie corespunzătoare lui $\rho$; avem

$$U_{t_0+\omega, t_0}\ \varphi = \rho\varphi,$$

deci

$$U_{t+\omega, t_0}\ \varphi = U_{t,t_0}\ U_{t_0+\omega, t_0}\ \varphi = \rho U_{t,t_0}\ \varphi$$

sau

$$x(t+\omega+s-t_0,\ t_0,\ \varphi) = \rho\ x(t+s-t_0,\ t_0,\ \varphi).$$

Pentru $s = t_0$ obținem

$$x(t+\omega,\ t_0,\ \varphi) = \rho x(t,\ t_0, \varphi).$$

Reciproc, dacă există o soluție de forma $x(t, t_0, \varphi)$, cu proprietatea

$$x(t+\omega,\ t_0,\ \varphi) = \rho x(t,\ t_0, \varphi),$$

atunci $\rho$ este valoare proprie a lui $U_{t_0+\omega, t_0}$.

Într-adevăr, egalitatea scrisă devine pentru $t_0 - \tau \leqslant s \leqslant t_0$,

$$x(s+\omega,\ t_0, \varphi) = \rho\varphi$$

deci

$$U_{t_0+\omega, t_0}\ \varphi = \rho\varphi$$

și $\rho$ e valoare proprie a lui $U_{t_0+\omega, t_0}$. Se vede imediat că dacă notăm $\lambda = \frac{1}{\omega} \ln\rho$, soluția $x(t)$ cu proprietatea $x(t+\omega) = \rho x(t)$ are structura $x(t) = e^{\lambda t} u(t)$ cu $u(t)$ periodică de perioadă $\omega$. Într-adevăr, $u(t+\omega) = e^{-\lambda(t+\omega)}\ x(t+\omega) = e^{-\lambda t}\, e^{-\lambda\omega}\ \rho x(t) = e^{-\lambda t}\ x(t) = u(t)$.

În concluzie putem formula următorul rezultat:

TEOREMA 4.21. *Dacă soluția banală a sistemului* (17) *este uniform stabilă, multiplicatorii sistemului se află pentru orice* $t_0$ *în cercul* $|z| \leqslant 1$, *celor de pe cercul* $|z| = 1$ *corespunzîndu-le divizori elementari simpli. Dacă soluția banală a sistemului* (17) *este uniform asimptotic stabilă, există* $\varepsilon > 0$ *astfel ca pentru orice* $t_0$ *multiplicatorii sistemului să se afle în* $|z| \leqslant 1-\varepsilon$. *Dacă există* $\varepsilon > 0$ *astfel încît pentru orice* $t_0$ *multiplicatorii sistemului să se afle în cercul* $|z| \leqslant 1-\varepsilon$, *atunci soluția banală a sistemului este uniform asimptotic stabilă. Dacă multiplicatorii sistemului se află în cercul* $|z| \leqslant 1$, *celor de pe cercul* $|z| = 1$ *corespunzîndu-le divizori elementari simpli, soluția banală a sistemului* (*17*) *este stabilă.*

Considerăm sistemul (16) cu $f(t) = e^{\lambda t} g(t)$ şi căutăm condiţii care asigură că el admite soluţii de forma $e^{\lambda t} h(t)$, $g$ şi $h$ fiind periodice de perioadă $\omega$. Punînd $x(t) = e^{\lambda t} h(t)$ avem

$$\lambda e^{\lambda t} h(t) + e^{\lambda t} \dot{h}(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda(t+s)} h(t+s)\, d_s \eta(t,s) + e^{\lambda t} g(t)$$

deci

$$\dot{h}(t) = -\lambda h(t) + \int_{-\infty}^{0} h(t+s) e^{\lambda s} d_s \eta(t,s) + g(t)$$

sau

$$\dot{h}(t) = \int_{-\infty}^{0} h(t+s)\, d_s \eta_1(t,s) + g(t),$$

unde $\eta_1$ are aceleaşi proprietăţi ca şi $\eta$. Rezultă că necesar şi suficient pentru ca oricare ar fi $g$ periodică de perioadă $\omega$, sistemul (16) cu $f(t) = e^{\lambda t} g(t)$ să aibă soluţii de forma $e^{\lambda t} h(t)$ este ca sistemul în $h$ să admită soluţii periodice de perioadă $\omega$ pentru orice $g$ periodică de perioadă $\omega$, deci, conform teoremei 4.16, ca sistemul

$$\dot{h}(t) = \int_{-\infty}^{0} h(t+s)\, d_s \eta_1(t,s)$$

să nu admită soluţii periodice de perioadă $\omega$, diferite de cea banală. Aceasta este echivalent cu a cere ca multiplicatorii sistemului de mai sus să fie diferiţi de 1. Dar aceşti multiplicatori se obţin din cei ai sistemului (17) prin înmulţirea cu $e^{-\lambda\omega}$. Într-adevăr, fie

$$x(t+\omega) = \rho x(t);$$

rezultă

$$e^{\lambda(t+\omega)} h(t+\omega) = \rho e^{\lambda t} h(t),$$

deci

$$e^{\lambda\omega} h(t+\omega) = \rho h(t),$$

$$h(t+\omega) = e^{-\lambda\omega} \rho h(t).$$

Reciproc, dacă

$$h(t+\omega) = \rho_1 h(t),$$

avem

$$x(t+\omega) = e^{\lambda(t+\omega)} h(t+\omega) = e^{\lambda t} e^{\lambda\omega} \rho_1 h(t) = e^{\lambda\omega} \rho_1 h(t),$$

deci

$$\rho = e^{\lambda\omega} \rho_1, \quad \rho_1 = e^{-\lambda\omega} \rho.$$

Ţinînd seama de aceasta, condiţia ca sistemul (16) cu $f(t) = e^{\lambda t} g(t)$ să admită, oricare ar fi $g(t)$ periodică de perioadă $\omega$, soluţii de forma $e^{\lambda t} h(t)$, cu $h(t)$ periodică de perioadă $\omega$ este echivalentă cu cererea ca $e^{\lambda\omega}$ să nu fie multiplicator al sistemului (17).

TEOREMA 4.22. *Dacă pentru orice $g(t)$ periodică, de perioadă $\omega$ şi pentru orice $\lambda$ cu $|e^{\lambda\omega}| \geqslant 1$ sistemul (16) cu $f(t) = e^{\lambda t} g(t)$ admite o*

*soluție de forma* $e^{\lambda t}$ $h(t)$, *cu* $h(t)$ *periodică de perioadă* $\omega$, *soluția banală a sistemului* (17) *este asimptotic stabilă.*

Într-adevăr, dacă e îndeplinită condiția din enunț rezultă că numerele $e^{\lambda\omega}$ cu $|e^{\lambda\omega}| \geqslant 1$ nu sînt multiplicatori ai sistemului (17) deci multiplicatorii sistemului (17) se află în cercul $|z| < 1$ și concluzia rezultă din teorema 4.20.

Să observăm că teorema 4.21 este de același tip cu 4.15.

## § 10. STABILITATEA SISTEMELOR LINIARE PERIODICE CU ÎNTÎRZIERE MICĂ

Pentru a înțelege mai bine semnificația rezultatelor care urmează vom presupune că sistemul (17) are forma

$$\dot{x}(t) = x(t)\ A(t) + \int_{-\infty}^{0} x(t+s)\mathrm{d}_s\ \eta_1(t, s), \tag{45}$$

unde $A(t)$ este continuă și periodică în $t$, iar $\eta_1$ are aceleași proprietăți ca $\eta$ în (17). Fie $Y(\alpha,t)$ o matrice care verifică pentru $\alpha < t$ ecuația

$$Y(\alpha, t) + \int_{\alpha}^{t} [\eta_1(\beta, \alpha - \beta) - A(\beta)]\ Y(\beta,t)\ \mathrm{d}\beta = E \tag{46}$$

și astfel încît $Y(\alpha,t) \equiv 0$ pentru $\alpha > t$, $Y(t,t) = E$.

Ecuația (46) este de același tip cu (19) și rămîn valabile proprietățile de existență, unicitate și regularitate formulate relativ la soluțiile ecuației (19). Avem

$$\int_{\sigma}^{t} \dot{x}(\alpha) Y(\alpha, t)\mathrm{d}\alpha = \int_{\sigma}^{t} x(\alpha) A(\alpha)\ Y(\alpha, t)\mathrm{d}\alpha + \int_{\sigma}^{t}\left[\int_{-\infty}^{0} x(\alpha+s)\,\mathrm{d}_s\,\eta_1(\alpha, s)\right] Y(\alpha,t)\mathrm{d}\alpha$$

de unde, integrînd prin părți,

$$x(t)\ Y(t,t) - y(\sigma)\ Y(\sigma, t) - \int_{\sigma}^{t} x(\alpha)\ \mathrm{d}_\alpha\ Y(\alpha,t) =$$

$$= -\int_{\sigma}^{t} x(\alpha)\ \mathrm{d}_\alpha \int_{\alpha}^{t} A(\beta)\ Y(\beta, t)\,\mathrm{d}\beta + \int_{-\infty}^{\sigma} x(s)\,\mathrm{d}_s \int_{\sigma}^{t} \eta_1(\alpha, s-\alpha)\ Y(\alpha, t)\mathrm{d}\alpha +$$

$$+ \int_{\sigma}^{t} x(s)\ d_s \int_{s}^{t} \eta_1(\alpha, s-\alpha)\ Y(\alpha, t)\ d\alpha.$$

Rezultă

$$x(t) = x(\sigma)\ Y(\sigma, t) + \int_{-\infty}^{\sigma} x(s)\ d_s \int_{\sigma}^{t} \eta_1(\alpha, s-\alpha)\ Y(\alpha, t) d\alpha +$$

$$+ \int_{\sigma}^{t} x(\alpha)\mathrm{d}_\alpha \left\{ Y(\alpha, t) + \int_{\alpha}^{t} [\eta_1(\beta, \alpha-\beta) - A(\beta)]\ Y(\beta, t)\,\mathrm{d}\beta \right\}$$

și ținînd seama de (46)

$$x(t) = x(\sigma)\, Y(\sigma, t) + \int_{-\infty}^{\sigma} x(s)\, \mathrm{d}_s \int_{\sigma}^{t} \eta_1(\alpha, s-\alpha)\, Y(\alpha, t)\, \mathrm{d}\alpha.$$

Dacă $X(t,\sigma)$ este o matrice ale cărei linii verifică sistemul (45) și condițiile $X(\sigma,\sigma) = E$, $X(t,\sigma) \equiv 0$ pentru $t < \sigma$, avem

$$X(t, \sigma) = Y(\sigma, t).$$

Putem scrie deci formula, corespunzătoare formulei (18),

$$x(t) = x(\sigma)\, X(t, \sigma) + \int_{-\infty}^{\sigma} x(s)\, \mathrm{d}_s \int_{\sigma}^{t} \eta_1(\alpha, s-\alpha)\, X(t, \alpha)\, d\alpha. \qquad (47)$$

Ținînd seama de proprietățile matricii $\eta_1$, formula (47) se poate scrie

$$x(t, t_0, \varphi) = \varphi(t_0)\, X(t, t_0) + \int_{t_0-\tau}^{t_0} \varphi(s)\, \mathrm{d}_s \int_{t_0}^{t_0+\tau} \eta_1(\alpha, s-\alpha)\, X(t, \alpha)\, \mathrm{d}\alpha$$

de unde rezultă

$$U_{t,t_0}\, \varphi = \varphi(t_0)\, X(t+s-t_0, t_0) +$$
$$+ \int_{t_0-\tau}^{t_0} \varphi(\beta)\, \mathrm{d}_\beta \int_{t_0}^{t_0+\tau} \eta_1(\alpha, \beta-\alpha)\, X(t+s-t_0, \alpha)\, \mathrm{d}\alpha$$

deci

$$U_{t_0+\omega, t_0}\, \varphi = \varphi(t_0)\, X(\omega+s, t_0) +$$
$$+ \int_{t_0-\tau}^{t_0} \varphi(\beta)\, \mathrm{d}_\beta \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\alpha+\tau, \beta-\alpha-\tau)\, X(\omega+s, \alpha+\tau)\, \mathrm{d}\alpha. \qquad (48)$$

Definim operația

$$< \varphi, \psi > = \varphi(t_0)\, \psi(t_0-\tau) + \int_{t_0-\tau}^{t_0} \varphi(\gamma)\, \mathrm{d}_\gamma \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi+\tau, \gamma-\xi-\tau)\; \psi(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

(funcțiile $\varphi, \psi$ sînt definite pe $[t_0-\tau, t_0]$ și înmulțirea matricială este admisă). Pentru această operație are loc relația (41) care se demonstrează exact cu aceleași calcule ca în cazul $t_0=0$. Operatorul $U_{t_0+\omega, t_0}$ se poate scrie

$$U_{t_0+\omega, t_0}\, \varphi = <\varphi(\sigma), X(\omega+s, \sigma+\tau)> .$$

LEMA 1. *Spectrul operatorului* $< \varphi(\sigma), M(\sigma,s) >$ *se află în cercul*

$$|z| \leqslant M(1+\tau V), \ \textit{unde}\ M = \sup_{\sigma, s \in [t_0-\tau, t_0]} |M(\sigma, s)|, \quad V \geqslant V(t),$$

$$V(t) = \overset{0}{\underset{s=-\tau}{\mathrm{V}}}\, \eta_1(t, s).$$

*Demonstrație*. Soluția ecuației

$$\varphi(s) = \lambda < \varphi(\sigma), M(\sigma, s)> + \chi(s)$$

poate fi căutată sub forma

$$\varphi(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \varphi_i(s).$$

Se capătă

$$\varphi_0(s) = \chi(s), \quad \varphi_i(s) = < \varphi_{i-1}(\sigma), M(\sigma,s) > .$$

Fie $M_i = \sup |\varphi_i(s)|$. Rezultă

$$|\varphi_i(s)| \leqslant M_{i-1} M + M_{i-1} \bigvee_{\beta=t_0-\tau}^{t_0} \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\alpha+\tau, \beta-\alpha-\tau) M(\alpha, s)\, d\alpha.$$

Dar

$$\bigvee_{\beta=t_0-\tau}^{t_0} \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\alpha+\tau, \beta-\alpha-\tau) M(\alpha, s)\, d\alpha = \sup \sum_j \Big| \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\alpha+\tau, \beta_{j+1} - $$

$$- \alpha - \tau) M(\alpha,s)\, d\alpha - \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\alpha+\tau, \beta_j - \alpha - \tau) M(\alpha, s)\, d\alpha \Big| =$$

$$= \sup \sum_j \Big| \int_{t_0-\tau}^{t_0} [\eta_1(\alpha+\tau, \beta_{j+1}-\alpha-\tau) - \eta_1(\alpha+\tau, \beta_j-\alpha-\tau)] M(\alpha, s)\, d\alpha \Big| \leqslant$$

$$\leqslant M \int_{t_0-\tau}^{t_0} \sup \sum_j |\eta_1(\alpha+\tau, \beta_{j+1}-\alpha-\tau) - \eta_1(\alpha+\tau, \beta_j-\alpha-\tau)|\, d\alpha \leqslant M\tau V.$$

Rezultă

$$|\varphi_i(s)| \leqslant M_{i-1} M(1+\tau V),$$

deci

$$M_i \leqslant M_{i-1}(1+\tau V)$$

şi prin inducţie

$$M_i \leqslant M^i (1+\tau V)^i \sup |\chi(s)|.$$

De aici rezultă că seria $\Sigma\lambda^i\varphi_i$ este uniform şi absolut convergentă pentru $|\lambda| < \dfrac{1}{M(1+\tau V)}$ deci dacă $|\lambda| < \dfrac{1}{M(1+\tau V)}$, ecuaţia considerată are soluţie unică pentru orice $\chi$, deci operatorul $(I - \lambda U)$, unde $U\varphi = <\varphi(\sigma), M(\sigma, s)>$, admite un invers pentru $|\lambda| < \dfrac{1}{M(1+\tau V)}$; rezultă că pentru $|\rho| > M(1+\tau V)$, operatorul $\rho I - U$ are invers, deci spectrul operatorului $U$ este în cercul $|z| \leqslant M(1+\tau V)$ şi lema e demonstrată.

LEMA 2. *Fie $\sigma_K$, $\sigma_L$, $\sigma_M$ spectrele operatorilor* $<\varphi(\sigma), K(\sigma, s)>$, $<\varphi(\sigma), L(\sigma, s)>$, $<\varphi(\sigma), M(\sigma,s)>$; *dacă avem* $K(\alpha, s) = L(\alpha,s) + M(\alpha, s)$ *şi dacă* $<L(\alpha,\sigma), M(\sigma, s)> = 0$ *atunci* $\sigma_K = \sigma_L \cup \sigma_M$.

*Demonstraţie.* Fie $\lambda$ astfel încît $\dfrac{1}{\lambda} \in \sigma_L$; există $\varphi(s)$ neidentic nul, astfel încît $\varphi(s) = \lambda<\varphi(\sigma), L(\sigma,s)>$. Avem $\varphi(s) - \lambda<\varphi(\sigma), K(\sigma,s)> =$

$$=\varphi(s)-\lambda<\varphi(\sigma),\ L(\sigma,\ s)>-\lambda<\varphi(\sigma),\ M(\sigma,\ s)>=-\lambda<\varphi(\sigma),\ M(\sigma,\ s)>+$$
$$+\ \lambda^2<<\varphi(\alpha),\ L(\alpha,\sigma)>,\ M\ (\sigma,\ s)>=$$
$$=-\lambda<\varphi(\sigma)-\lambda<\varphi(\alpha),\ L\ (\alpha,\sigma)>,M\ (\sigma,s)>\ =\ 0.$$

Rezultă că ecuaţia

$$\varphi(s)\ -\ \lambda\ <\varphi(\sigma),\ K\ (\sigma,s)>=0$$

are soluţie neidentic nulă, deci $\frac{1}{\lambda}\in\sigma_K$; aşadar $\sigma_L\subset\sigma_K$.

Fie $\lambda$ astfel încît $\frac{1}{\lambda}\in\sigma_M$; există $f(s)$ neidentic nulă astfel ca

$$f(s)\ =\ \lambda\ <f(\sigma),\ M(\sigma,s)>.$$

Dacă $\frac{1}{\lambda}\in\sigma_L$, atunci, conform celor de mai sus $\frac{1}{\lambda}\in\sigma_K$. Dacă $\frac{1}{\lambda}\notin\sigma_L$ există $\varphi(s)$ astfel ca

$$\varphi\ (s)\ =\ \lambda\ <\varphi\ (\sigma),\ L\ (\sigma,\ s)>\ +f\ (s).$$

Atunci

$$\varphi(s)-\lambda<\varphi(\sigma),K\ (\sigma,\ s)>=\varphi(s)-\lambda<\varphi(\sigma),L(\sigma,\ s)>-\lambda<\varphi(\sigma),\ M\ (\sigma,\ s)>=$$
$$=f(s)-\lambda<\varphi(\sigma),M\ (\sigma,\ s)>+\lambda^2<<\varphi(\alpha),L(\alpha,\ \sigma)>,\ M\ (\sigma,s)>=$$
$$=f\ (s)-\lambda<\varphi\ (\sigma)-\lambda<\varphi\ (\alpha),L\ (\alpha,\ \sigma)>,\ M\ (\sigma,\ s)>\ =$$
$$=f\ (s)\ -\ \lambda\ <f\ (\sigma)M\ (\sigma,\ s)>\ =0$$

deci $\frac{1}{\lambda}\in\sigma_K$. Rezultă $\sigma_M\subset\sigma_K$ deci $\sigma_L\cup\sigma_M\subset\sigma_K$.

Fie acum $\frac{1}{\lambda}\in\complement\,\sigma_L$, $\frac{1}{\lambda}\in\complement\,\sigma_M$. Pentru orice $\chi$ ecuaţia

$$f\ (s)\ =\ \lambda<f\ (\sigma),\ M\ (\sigma,\ s)>\ +\chi(s)$$

are soluţie $f(s)$; pentru acest $f$, ecuaţia

$$\varphi\ (s)\ =\ \lambda<\varphi\ (\sigma),\ L\ (\sigma,\ s)>\ +f\ (s)$$

are soluţie $\varphi$.
Avem

$$\varphi(s)-\lambda<\varphi(\sigma),K(\sigma,s)>=\varphi(s)-\lambda<\varphi(\sigma),\ L(\sigma,\ s)>-\lambda<\varphi(\sigma),\ M\ (\sigma,s)>=$$
$$=f\ (s)-\lambda<\varphi(\sigma),\ M\ (\sigma,\ s)>+\lambda^2<<\varphi\ (\alpha),\ L\ (\alpha,\ \sigma)>,\ M\ (\sigma,\ s)>=$$
$$=f\ (s)\ -\ \lambda\ <\ \varphi\ (\sigma)\ -\ \lambda\ <\ \varphi\ (\alpha),\ L\ (\alpha,\ \sigma)>,\ M\ (\sigma,\ s)>=$$
$$=f\ (s)\ -\ \lambda\ <f\ (\sigma),M\ (\sigma,\ s)>=\chi\ (s)$$

deci pentru orice $\chi$ ecuaţia

$$\varphi\ (s)\ -\ \lambda\ <\ \varphi\ (\sigma),\ K\ (\sigma,\ s)>\ =\chi\ (s)$$

are soluţie, ceea ce arată că $\frac{1}{\lambda} \in \complement \sigma_K$. Rezultă $\complement \sigma_L \cup \complement \sigma_M \subset \complement \sigma_K$ deci $\sigma_L \cup \sigma_M \supset \sigma_K$. În definitiv $\sigma_L \cup \sigma_M = \sigma_K$ şi lema e demonstrată.

Avem, pe baza formulei de integrare prin părţi ($\sigma \geqslant \alpha'$),

$$X(t, \alpha') Y(t, t) - X(\sigma, \alpha') Y(\sigma, t) = \int_\sigma^t X(\alpha, \alpha') \mathrm{d}_\alpha Y(\alpha, t) + \int_\sigma^t \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} X(\alpha, \alpha')\right] Y(\alpha, t) \mathrm{d}\alpha = \int_\sigma^t X(\alpha, \alpha') \mathrm{d}_\alpha Y(\alpha, t) + \int_\sigma^t \Big\{ X(\alpha, \alpha') A(\alpha) + \int_{-\infty}^0 X(\alpha + s, \alpha') \mathrm{d}_s \eta_1(\alpha, s) \Big\} Y(\alpha, t) \mathrm{d}\alpha = \int_\sigma^t X(\alpha, \alpha') \mathrm{d}_\alpha Y(\alpha, t) - \int_\sigma^t X(\alpha, \alpha') \mathrm{d}_\alpha \int_\alpha^t A(\beta) Y(\beta, t) \mathrm{d}\beta + \int_\sigma^t \left[ \int_{-\infty}^\alpha X(\gamma, \alpha') \mathrm{d}_\gamma \eta_1(\alpha, \gamma - \alpha) \right] Y(\alpha, t) \mathrm{d}\alpha = \int_\sigma^t X(\alpha, \alpha') \mathrm{d}_\alpha \left| Y(\alpha, t) - \int_\alpha^t A(\beta) Y(\beta, t) \mathrm{d}\beta \right] + \int_{-\infty}^\sigma X(\gamma, \alpha') \mathrm{d}_\gamma \int_\sigma^t \eta_1(\alpha, \gamma - \alpha) Y(\alpha, t) \mathrm{d}\alpha + \int_\sigma^t X(\gamma, \alpha') \mathrm{d}_\gamma \int_\gamma^t \eta_1(\alpha, \gamma - \alpha) Y(\alpha, t) \mathrm{d}\alpha = \int_\sigma^t X(\alpha, \alpha') \mathrm{d}_\alpha \left[ Y(\alpha, t) + \int_\alpha^t \left[ \eta_1(\beta, \alpha - \beta) - A(\beta) \right] Y(\beta, t) \mathrm{d}\beta \right] + \int_{-\infty}^\sigma X(\gamma, \alpha') \mathrm{d}_\gamma \int_\sigma^t \eta_1(\alpha, \gamma - \alpha) Y(\alpha, t) \mathrm{d}\alpha = \int_{-\infty}^\sigma X(\gamma, \alpha') \mathrm{d}_\gamma \int_\sigma^t \eta_1(\alpha, \gamma - \alpha) Y(\alpha, t) \mathrm{d}\alpha.$$

Rezultă

$$X(t, \alpha') = X(\sigma, \alpha') X(t, \sigma) + \int_{-\infty}^\sigma X(\gamma, \alpha') \mathrm{d}_\gamma \int_\sigma^t \eta_1(\alpha, \gamma - \alpha) Y(\alpha, t) \mathrm{d}\alpha.$$

De aici

$$X(\omega + s, \alpha + \tau) = X(\sigma, \alpha + \tau) X(\omega + s, \sigma) + \int_{-\infty}^\sigma X(\gamma, \alpha + \tau) \mathrm{d}_\gamma \int_\sigma^{\omega + s} \eta_1(\xi, \gamma - \xi) Y(\xi, \omega + s) \mathrm{d}\xi.$$

Avem $t_0 - \tau \leqslant \alpha \leqslant t_0, \quad t_0 - \tau \leqslant s \leqslant t_0$, deci

$$t_0 \leqslant \alpha + \tau \leqslant t_0 + \tau, \quad \omega + t_0 - \tau \leqslant \omega + s \leqslant \omega + t_0.$$

Condiţia $\sigma \geqslant \alpha + \tau$ este sigur verificată dacă $\sigma \geqslant t_0 + \tau$; condiţia $\omega + s \geqslant \sigma$ este sigur verificată dacă $\omega + t_0 - \tau \geqslant t_0 + \tau$ şi $\sigma = t_0 + \tau$. Vom presupune deci $\omega \geqslant 2\tau$ şi vom lua $\sigma = t_0 + \tau$.

Obţinem formula

$$X(\omega + s, \alpha + \tau) = X(t_0 + \tau, \alpha + \tau)\, X(\omega + s, t_0 + \tau) +$$
$$+ \int_{-\infty}^{t_0+\tau} X(\gamma, \alpha + \tau)\, d_\gamma \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\xi, \gamma - \xi)\, Y(\xi, \omega + s)\, d\xi.$$

Pentru $\gamma \leqslant t_0$, $\xi \geqslant t_0 + \tau$ avem $\gamma - \xi \leqslant -\tau$ şi deci $\eta_1(\xi, \gamma - \xi) \equiv 0$, deci formula poate fi scrisă

$$X(\omega + s, \alpha + \tau) = X(t_0 + \tau, \alpha + \tau)\, X(\omega + s, t_0 + \tau) +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\gamma, \alpha + \tau)\, d_\gamma \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\xi, \gamma - \xi)\, Y(\xi, \omega + s)\, d\xi. \qquad (49)$$

LEMA 3. *Fie*

$$L(\alpha, s) = X(t_0 + \tau, \alpha + \tau)\, X(\omega + s, t_0 + \tau),$$
$$M(\alpha, s) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\gamma, \alpha + \tau)\, d_\gamma \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\xi, \gamma - \xi)\, Y(\xi, \omega + s)\, d\xi.$$

*Avem relaţia*

$$< L(\alpha, \sigma), M(\sigma, s) > = 0.$$

*Demonstraţie.* Pe baza formulei (49) avem

$$X(\omega + s, \alpha + \tau) = L(\alpha, s) + M(\alpha, s)$$

deci

$$< L(\alpha, \sigma), M(\sigma, s) > = < L(\alpha, \sigma), X(\omega + s, \sigma + \tau) - L(\sigma, s) > =$$
$$= < L(\alpha, \sigma), X(\omega + s, \sigma + \tau) > - < L(\alpha, \sigma), L(\sigma, s) >.$$

Avem deci de dovedit relaţia

$$< L(\alpha, \sigma), X(\omega + s, \sigma + \tau) > = < L(\alpha, \sigma), L(\sigma, s) >.$$

Avem

$$< L(\alpha, \sigma), X(\omega + s, \sigma + \tau) > = L(\alpha, t_0)\, X(\omega + s, t_0) +$$
$$+ \int_{t_0-\tau}^{t_0} L(\alpha, \gamma)\, d_\gamma \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau)\, X(\omega + s, \xi + \tau)\, d\xi =$$
$$= X(t_0 + \tau, \alpha + \tau)\, X(\omega + t_0, t_0 + \tau)\, X(\omega + s, t_0) +$$
$$+ \int_{t_0-\tau}^{t_0} X(t_0 + \tau, \alpha + \tau)\, X(\omega + \gamma, t_0 + \tau)\, d_\gamma \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma -$$
$$- \xi - \tau)\, X(\omega + s, \xi + \tau)\, d\xi = X(t_0 + \tau, \alpha + \tau) \Big\{ X(t_0 +$$
$$+ \omega, t_0 + \tau)\, X(\omega + s, t_0) + \int_{t_0-\tau}^{t_0} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau)\, d_\gamma \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi +$$
$$+ \tau, \gamma - \xi - \tau)\, X(\omega + s, \xi + \tau)\, d\xi \Big\}.$$

Pe de altă parte,

$$< L(\alpha, \sigma), L(\sigma, s) > = L(\alpha, t_0)\, L(t_0 - \tau, s) + \int_{t_0-\tau}^{t_0} L(\alpha, \gamma)\, d_\gamma \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau)\, L(\xi, s)\, d\xi = X(t_0 + \tau, \alpha + \tau)\, X(t_0 + \omega, t_0 + \tau)\, X(t_0 + \tau, t_0)\, X(\omega + s, t_0 + \tau) + \int_{t_0-\tau}^{t_0} X(t_0 + \tau, \alpha + \tau)\, X(\omega + \gamma, t_0 + \tau)\, d_\gamma \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau)\, X(t_0 + \tau, \xi + \tau)\, X(\omega + s, t_0 + \tau)\, d\xi = X(t_0 + \tau, \alpha + \tau)\Big[X(t_0 + \omega, t_0 + \tau)\, X(t_0 + \tau, t_0) + \int_{t_0-\tau}^{t_0} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau)\, d_\gamma \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau)\, X(t_0 + \tau, \xi + \tau)\, d\xi\Big] X(\omega + s, t_0 + \tau).$$

Vom dovedi relația

$$X(t_0 + \omega, t_0 + \tau)\, X(\omega + s, t_0) + \int_{t_0-\tau}^{t_0} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau)\, d_\gamma \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau)\, X(\omega + s, \xi + \tau)\, d\xi = \Big[X(t_0 + \omega, t_0 + \tau)\, X(t_0 + \tau, t_0) + \int_{t_0-\tau}^{t_0} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau)\, d_\gamma \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau)\, X(t_0 + \tau, \xi + \tau)\, d\xi\Big] X(\omega + s, t_0 + \tau).$$

Dar, pe baza formulei (49), avem

$$X(\omega + s, \xi + \tau) = X(t_0 + \tau, \xi + \tau)\, X(\omega + s, t_0 + \tau) + \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\gamma, \xi + \tau)\, d_\gamma \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\zeta, \gamma - \zeta)\, Y(\zeta, \omega + s)\, d\zeta.$$

Relația de dovedit devine

$$X(t_0 + \omega, t_0 + \tau)\, X(\omega + s, t_0) + \int_{t_0-\tau}^{t_0} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau)\, d_\gamma \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau)\, X(t_0 + \tau, \xi + \tau)\, X(\omega + s, t_0 + \tau)\, d\xi + \int_{t_0-\tau}^{t_0} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau)\, d_\gamma \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau)\Big[\int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\beta, \xi +$$

$$+ \tau)\, d_\beta \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\zeta, \beta - \zeta)\, Y(\zeta, \omega + s)\, d\zeta \Big] d\xi = \Big[ X(t_0 + \omega, t_0 + $$

$$+ \tau) X(t_0 + \tau, t_0) + \int_{t_0-\tau}^{t_0} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau)\, d_\gamma \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - $$

$$- \xi - \tau) X(t_0 + \tau, \xi + \tau)\, d\xi \Big] X(\omega + s, t_0 + \tau).$$

Rămîne astfel de dovedit relaţia

$$\int_{t_0-\tau}^{t_0} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau) d_\gamma \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) \Big[ \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\beta, \xi + $$

$$+ \tau)\, d_\beta \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\zeta, \beta - \zeta)\, Y(\zeta, \omega + s)\, d\zeta \Big] d\xi = X(t_0 + \omega, t_0 + $$

$$+ \tau) \Big[ X(t_0 + \tau, t_0) X(\omega + s, t_0 + \tau) - X(\omega + s, t_0) \Big].$$

Vom nota

$$F(\xi, s) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\beta, \xi + \tau)\, d_\beta \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\zeta, \beta - \zeta)\, Y(\zeta, \omega + s)\, d\zeta.$$

Avem

$$\int_{t_0-\tau}^{t_0} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau)\, d_\gamma \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau)\, F(\xi, s)\, d\xi = $$

$$= \int_{t_0-\tau}^{t_0} \Big[ \int_{t_0-\tau}^{t_0} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau)\, d_\gamma\, \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) \Big] F(\xi, s)\, d\xi = $$

$$= \int_{t_0-\tau}^{t_0} \Big[ \int_{t_0-\xi-2\tau}^{t_0-\xi-\tau} X(\omega + \xi + \tau + \beta, t_0 + \tau)\, d_\beta\, \eta_1(\omega + \xi + $$

$$+ \tau, \beta) \Big] F(\xi, s)\, d\xi = \int_{t_0-\tau}^{t_0} \Big[ \int_{-\infty}^{t_0-\xi-\tau} X(\omega + \xi + \tau + \beta, t_0 + \tau)\, d_\beta\, \eta_1(\omega + $$

$$+ \xi + \tau, \beta) \Big] F(\xi, s)\, d\xi = \int_{t_0-\tau}^{t_0} \Big[ \int_{-\infty}^{0} X(\omega + \xi + \tau + \beta, t_0 + \tau) d_\beta\, \eta_1(\omega + $$

$$+ \xi + \tau, \beta) \Big] F(\xi, s)\, d\xi - \int_{t_0-\tau}^{t_0} \Big[ \int_{t_0-\xi-\tau}^{0} X(\omega + \xi + \tau + \beta, t_0 + \tau)\, d_\beta\, \eta_1(\omega + $$

$$+ \xi + \tau, \beta) \Big] F(\xi, s)\, d\xi = \int_{t_0-\tau}^{t_0} \Big[ \frac{d}{d\xi} X(\omega + \xi + \tau, t_0 + \tau) - X(\omega + \xi + \tau, t_0 + $$

$$+ \tau) A(\xi + \tau) \Big] F(\xi, s)\, d\xi - \int_{t_0-\tau}^{t_0} \Big[ \int_{t_0}^{\xi+\tau} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau)\, d_\gamma\, \eta_1(\xi + \tau, \gamma - $$

$$- \xi - \tau)\Big] F(\xi, s)\, d\xi = X(\omega + t_0 + \tau, t_0 + \tau) F(t_0, s) - X(\omega +$$

$$+ t_0, t_0 + \tau) F(t_0 - \tau, s) - \int_{t_0-\tau}^{t_0} X(\omega + \xi + \tau, t_0 + \tau)\, d_\xi F(\xi, s) -$$

$$- \int_{t_0-\tau}^{t_0} X(\omega + \xi + \tau, t_0 + \tau) A(\xi + \tau) F(\xi, s)\, d\xi - \int_{t_0-\tau}^{t_0} \Big[ \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\omega + \gamma, t_0 +$$

$$+ \tau)\, d_\gamma \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau)\Big] F(\xi, s)\, d\xi = X(\omega + t_0 + \tau, t_0 +$$

$$+ \tau) \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\beta, t_0 + \tau)\, d_\beta \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\zeta, \beta - \zeta)\, Y(\zeta, \omega + s)\, d\zeta - X(t_0 +$$

$$+ \omega, t_0 + \tau) \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\beta, t_0)\, d_\beta \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\zeta, \beta - \zeta)\, Y(\zeta, \omega + s)\, d\zeta -$$

$$- \int_{t_0-\tau}^{t_0} X(\omega + \xi + \tau, t_0 + \tau)\, d_\xi F(\xi, s) - \int_{t_0-\tau}^{t_0} X(\omega + \xi + \tau, t_0 +$$

$$+ \tau) A(\xi + \tau) F(\xi, s)\, d\xi - \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau)\, d_\gamma \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma -$$

$$- \xi - \tau) F(\xi, s)\, d\xi = - X(t_0 + \omega, t_0 + \tau)[X(\omega + s, t_0) - X(t_0 +$$

$$+ \tau, t_0) X(\omega + s, t_0 + \tau)] - \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau)\, d_\gamma F(\gamma - \tau, s) -$$

$$- \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau) A(\gamma) F(\gamma - \tau, s)\, d\gamma - \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\omega + \gamma, t_0 +$$

$$+ \tau)\, d_\gamma \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) F(\xi, s)\, d\xi = X(t_0 + \omega, t_0 + \tau)[X(t_0 +$$

$$+ \tau, t_0) X(\omega + s, t_0 + \tau) - X(\omega + s, t_0)] - \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\omega + \gamma, t_0 +$$

$$+ \tau)\, d_\gamma \Big[ F(\gamma - \tau, s) + \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) F(\xi, s)\, d\xi -$$

$$- \int_{\gamma}^{t_0} A(\beta) F(\beta - \tau, s)\, d\beta \Big].$$

Pentru a termina demonstraţia lemei rămîne de arătat că ultima integrală e nulă. Vom dovedi pentru aceasta că

$$F(\gamma - \tau, s) + \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) F(\xi, s)\, d\xi -$$

$$- \int_{\gamma}^{t_0} A(\beta) F(\beta - \tau, s)\, d\beta = G(\gamma, s)$$

nu depinde de $\gamma$. Avem

$$G(\gamma, s) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\beta, \gamma)\, d_\beta \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\zeta, \beta - \zeta)\, Y(\zeta, \omega + s)\, d\zeta -$$

$$-\int_{\gamma}^{t_0} A(\xi) \left[ \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\beta, \xi)\, d_\beta \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\zeta, \beta - \zeta)\, Y(\zeta, \omega + s)\, d\zeta \right] d\xi +$$

$$+\int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) \left[ \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\beta, \xi + \tau)\, d_\beta \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\zeta, \beta -\right.$$

$$\left. - \zeta)\, Y(\zeta, \omega + s)\, d\zeta \right] d\xi = \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\beta,\gamma)\, d_\beta \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\zeta,\beta - \zeta)\, Y(\zeta,\omega + s)\, d\zeta -$$

$$-\int_{t_0}^{t_0+\tau} \left[ \int_{\gamma}^{t_0} A(\xi)\, X(\beta, \xi)\, d\xi \right] d_\beta \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\zeta, \beta - \zeta)\, Y(\zeta, \omega + s)\, d\zeta +$$

$$+\int_{t_0}^{t_0+\tau} \left[ \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau)\, X(\beta, \xi + \tau)\, d\xi \right] d_\beta \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\zeta, \beta -$$

$$- \zeta)\, Y(\zeta, \omega + s)\, d\zeta = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left[ Y(\gamma, \beta) - \int_{\gamma}^{t_0} A(\xi)\, Y(\xi,\beta)\, d\xi + \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi +\right.$$

$$\left. + \tau, \gamma - \xi - \tau)\, Y(\xi + \tau, \beta)\, d\xi \right] d_\beta \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\zeta, \beta - \zeta)\, Y(\zeta, \omega + s)\, d\zeta.$$

Pe baza formulei (46) rezultă

$$Y(\gamma, \beta) = E + \int_{\gamma}^{\beta} A(\xi)\, Y(\xi, \beta)\, d\xi - \int_{\gamma}^{\beta} \eta_1(\xi, \gamma - \xi)\, Y(\xi, \beta)\, d\xi = E +$$

$$+ \int_{\gamma}^{\beta} A(\xi)\, Y(\xi, \beta)\, d\xi - \int_{\gamma-\tau}^{\beta-\tau} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau)\, Y(\xi + \tau, \beta)\, d\xi = E +$$

$$+ \int_{\gamma}^{t_0} A(\xi)\, Y(\xi,\beta)\, d\xi + \int_{t_0}^{\beta} A(\xi)\, Y(\xi,\beta)\, d\xi -$$

$$- \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau)\, Y(\xi + \tau, \beta)\, d\xi$$

deci

$$Y(\gamma, \beta) - \int_{\gamma}^{t_0} A(\xi)\, Y(\xi, \beta)\, d\xi + \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau)\, Y(\xi + \tau, \beta)\, d\xi =$$

$$= \int_{t_0}^{\beta} A(\xi)\, Y(\xi, \beta)\, d\xi + E.$$

Prin urmare

$$G(\gamma,s) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left[ E + \int_{t_0}^{\beta} A(\xi)\, Y(\xi,\beta)\, d\xi \right] d_\beta \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\zeta, \beta - \zeta)\, Y(\zeta,\omega + s)\, d\zeta$$

nu depinde de $\gamma$. Lema este demonstrată.

LEMA 4. *Dacă $L(\alpha,s)$ este ca în lema 3, spectrul operatorului $<\varphi(\sigma),L(\sigma,s)>$ coincide cu cel al matricii $X(t_0+\tau+\omega, t_0+\tau)$.*

*Demonstrație.* Formăm ecuația

$$\rho\varphi(s) = <\varphi(\sigma), L(\sigma, s)> = <\varphi(\sigma), X(t_0+\tau, \sigma+\tau)X(\omega+s, t_0+\tau)> =$$
$$= <\varphi(\sigma), X(t_0+\tau, \sigma+\tau)> X(\omega+s, t_0+\tau).$$

Căutăm soluția ecuației sub forma

$$\varphi(s) = \frac{1}{\rho} aX(\omega+s, t_0+\tau),$$

unde $a$ este un vector linie, constant. Înlocuind în ecuație se capătă

$$aX(\omega+s, t_0+\tau) = \frac{1}{\rho} a<X(\omega+\sigma, t_0+\tau), \quad X(t_0+\tau, \sigma+\tau)> X(\omega+$$
$$+ s, t_0+\tau),$$

sau

$$a[\rho E - <X(\omega+\sigma, t_0+\tau), X(t_0+\tau, \sigma+\tau)>]X(\omega+s, t_0+\tau) = 0.$$

Fie $\rho \in \sigma_L$; atunci ecuația are soluție și această soluție este de forma arătată; dacă det $X(\omega+s, t_0+\tau)$ nu este identic nul, rezultă că $\rho$ e valoare proprie a matricii $<X(\omega+\sigma, t_0+\tau), X(t_0+\tau, \sigma+\tau)>$. Reciproc, fie $\rho$ o valoare proprie a acestei matrici; atunci există $a \neq 0$ care verifică ecuația

$$a[\rho E - <X(\omega+\sigma, t_0+\tau), X(t_0+\tau, \sigma+\tau)>] = 0,$$

deci

$$\varphi(s) = \frac{1}{\rho} aX(\omega+s, t_0+\tau)$$

verifică ecuația

$$\rho\varphi(s) = <\varphi(\sigma), L(\sigma, s)>.$$

Dacă det $X(\omega+s, t_0+\tau)$ nu este identic nul, $\varphi(s)$ nu poate fi identic nul, deci $\rho \in \sigma_L$. Să verificăm că det $X(\omega+s, t_0+\tau)$ nu este identic nul. Din formula (47) deducem

$$x(\omega+s) = x(t_0+\tau)X(\omega+s, t_0+\tau) + \int_{t_0}^{t_0+\tau} x(\sigma)d\sigma \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\alpha, \sigma -$$
$$- \alpha)X(\omega+s, \alpha)\,d\alpha.$$

Dacă det $X(\omega+s, t_0+\tau) \equiv 0$, există $a \neq 0$ astfel ca $aX(\omega+s, t_0+\tau) = 0$. Rezultă că soluția ecuației (45) care verifică condițiile $x(t) \equiv 0$ pentru $t_0 \leqslant t < t_0+\tau$, $x(t_0+\tau) = a$ este astfel încît $x(\omega+s) \equiv 0$ pentru $t_0 - \tau \leqslant s \leqslant t_0$, ceea ce ar atrage după sine faptul că e identic nulă peste tot unde e definită, și acest lucru e contradictoriu căci $a \neq 0$.

Prin urmare, det $X(\omega + s, t_0 + \tau)$ nu este identic nul şi $\sigma_L$ coincide cu spectrul matricii $< X(\omega + \sigma, t_0 + \tau), X(t_0 + \tau, \sigma + \tau) >$.
Avem

$$< X(\omega + \sigma, t_0 + \tau), X(t_0 + \tau, \sigma + \tau) > = X(t_0 + \omega, t_0 + \tau) X(t_0 + \tau, t_0) + $$
$$+ \int_{t_0-\tau}^{t_0} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau) \, d_\gamma \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) X(t_0 + \tau, \xi + \tau) \, d\xi.$$

Folosind formula de integrare prin părţi deducem

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} X(t + \omega, t_0 + \tau) \, d_t Y(t, t_0 + \tau) = X(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau) Y(t_0 + \tau, t_0 + \tau) -$$
$$- X(t_0 + \omega, t_0 + \tau) Y(t_0, t_0 + \tau) - \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left[ \frac{d}{dt} X(t + \omega, t_0 + \tau) \right] Y(t, t_0 +$$
$$+ \tau) \, dt = X(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau) - X(t_0 + \omega, t_0 + \tau) X(t_0 + \tau, t_0) -$$
$$- \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(t + \omega, t_0 + \tau) A(t) Y(t, t_0 + \tau) \, dt - \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left[ \int_{-\infty}^{0} X(t + \omega + s, t_0 +\right.$$
$$\left. + \tau) \, d_s \eta_1(t, s) \right] Y(t, t_0 + \tau) \, dt = X(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau) - X(t_0 + \omega, t_0 +$$
$$+ \tau) X(t_0 + \tau, t_0) - \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(t + \omega, t_0 + \tau) A(t) Y(t, t_0 + \tau) \, dt -$$
$$- \int_{-\infty}^{t_0} X(\omega + u; t_0 + \tau) \, d_u \int_{t_0}^{t_0+\tau} \eta_1(t, u - t) Y(t, t_0 + \tau) \, dt -$$
$$- \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\omega + u, t_0 + \tau) \, d_u \int_{u}^{t_0+\tau} \eta_1(t, u - t) Y(t, t_0 + \tau) \, dt =$$
$$= X(t_0 + \tau + \omega_0, t_0 + \tau) - X(t_0 + \omega, t_0 + \tau) X(t_0 + \tau, t_0) +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(u + \omega, t_0 + \tau) \, d_u \int_{u}^{t_0+\tau} A(t) Y(t, t_0 + \tau) \, dt -$$
$$- \int_{t_0-\tau}^{t_0} X(\omega + u, t_0 + \tau) \, d_u \int_{t_0}^{t_0+\tau} \eta_1(t, u - t) Y(t, t_0 + \tau) \, dt -$$
$$- \int_{t_0}^{t+\tau} X(\omega + u, t_0 + \tau) \, d_u \int_{u}^{t_0+\tau} \eta_1(t, u - t) Y(t, t_0 + \tau) \, dt.$$

Rezultă

$$X(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau) = X(t_0 + \omega, t_0 + \tau) X(t_0 + \tau, t_0) + \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\omega +$$
$$+ u, t_0 + \tau) \, d_u \left[ Y(u, t_0 + \tau) + \int_{u}^{t_0+\tau} [\eta_1(t, u - t) - A(t)] Y(t, t_0 + \tau) \, dt \right] +$$
$$+ \int_{t_0-\tau}^{t_0} X(\omega + u, t_0 + \tau) \, d_u \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, u - \xi - \tau) X(t_0 + \tau, \xi + \tau) \, d\xi.$$

Ținînd seama de formula (46) rezultă

$$X(t_0+\tau+\omega,\ t_0+\tau) = X(t_0+\omega,\ t_0+\tau)\, X(t_0+\tau,\ t_0) +$$

$$+\int_{t_0-\tau}^{t_0} X(\omega+u,\ t_0+\tau)\, d_u \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi+\tau, u-\xi-\tau) X(t_0+\tau,\ \xi+\tau)\, d\xi =$$

$$= < X(\omega+\sigma,\ t_0+\tau),\ X(t_0+\tau,\ \sigma+\tau) >.$$

În defintiv $\sigma_L$ coincide cu spectrul matricii $X(t_0+\tau+\omega,\ t_0+\tau)$.

LEMA 5. *Dacă $\tau V$ e suficient de mic spectrul operatorului $<\varphi(\sigma), M(\sigma, s)>$, unde $M$ e ca în lema 3, se află în cercul $|z| \leqslant 1-\varepsilon$.*

*Demonstrație.* Pe baza lemei 1 spectrul operatorului $<\varphi(\sigma), M(\sigma, s)>$ se află în cercul $|z| \leqslant M(1+\tau V)$, $M = \sup\limits_{\sigma, s \in [t_0-\tau, t_0]} |M(\sigma, s)|$.

Avem

$$M(\alpha, s) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\gamma,\ \alpha+\tau)\, d_\gamma \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\xi, \gamma-\xi) X(\omega+s,\ \xi)\, d\xi =$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\gamma,\ \alpha+\tau)\, d_\gamma \int_{t_0+\tau}^{t_0+2\tau} \eta_1(\xi, \gamma-\xi) X(\omega+s,\ \xi)\, d\xi =$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\gamma,\ \alpha+\tau)\, d_\gamma \int_{t_0}^{t_0+\tau} \eta_1(\beta+\tau,\ \gamma-\beta-\tau) X(\omega+s,\ \beta+\tau)\, d\beta.$$

Pe baza inegalității (3) deducem

$$|X(\omega+s,\ \beta+\tau)| \leqslant e^{(V+A)\omega}$$

$$|X(\gamma, \alpha+\tau)| \leqslant e^{(V+A)\tau},$$

unde $A = \sup |A(t)|$. Rezultă

$$|M(\alpha, s)| \leqslant e^{(V+A)\tau} \bigvee_{\gamma=t_0}^{t_0+\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \eta_1(\beta+\tau,\ \gamma-\beta-\tau) X(\omega+s,\ \beta+\tau)\, d\beta \leqslant$$

$$\leqslant \tau V e^{(V+A)(\omega+\tau)}$$

deci $M \leqslant \tau V e^{(V+A)(\omega+\tau)}$. Rezultă că spectrul operatorului considerat se află în cercul $|z| \leqslant V(1+\tau V)\, e^{(V+A)(\omega+\tau)}$. Dacă $\tau V$ este destul de mic pentru ca $\tau V(1+\tau V)\, e^{(V+A)(\omega+\tau)} \leqslant 1-\varepsilon$, spectrul $\sigma_M$ se află în cercul $|z| \leqslant 1-\varepsilon$. Lema este demonstrată.

Putem acum demonstra teorema fundamentală relativă la stabilitatea soluției banale pentru sistemul de forma (45).

TEOREMA 4.23. *Fie $\tau V$ suficient de mic; dacă există $C>0$ astfel încît pentru orice $t_0 \geqslant 0$ și orice $n$ natural să avem $|X^n(t_0+\tau+\omega,\ t_0+\tau)| < C$, atunci soluția banală a sistemului* (45) *este uniform stabilă; dacă pentru orice $t_0 \geqslant 0$ avem $|X^n(t_0+\tau+\omega,\ t_0+\tau)| \leqslant k(1-\varepsilon)^n$, atunci soluția banală a sistemului* (45) *este uniform asimptotic stabilă; dacă $X(t_0+\tau+\omega,\ t_0+\tau)$ are o valoare proprie în regiunea $|z|>1$, soluția banală a sistemului* (45) *este nestabilă.*

*Demonstraţie.* Pe baza formulei (48) avem

$$U_{t_0+\omega,t_0}\varphi = < \varphi(\sigma), X(\omega + s, \sigma + \tau >$$

iar din formula (49) deducem

$$X(\omega + s, \alpha + \tau) = L(\alpha, s) + M(\alpha, s).$$

Din lema 3 rezultă

$$< L(\alpha, \sigma), M(\sigma, s)> = 0.$$

Din lema 2 deducem că spectrul lui $U_{t_0+\omega,t_0}$ este egal cu $\sigma_L \cup \sigma_M$. Din lema 4 rezultă că $\sigma_L$ coincide cu spectrul matricii $X(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau)$ iar din lema 5 rezultă, $\tau V$ fiind suficient de mic, că $\sigma_M$ e în $|z| \leqslant 1-\varepsilon$. Dacă

$$|X^n(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau)| < C,$$

spectrul matricii $X(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau)$ se află în cercul $|z| \leqslant 1$ şi valorilor proprii de pe $|z| = 1$ le corespund divizori elementari simpli; deducem că $U_{t_0+\omega,t_0} = U_1 \oplus U_2$ cu $\sigma(U_1)$ în $|z| \leqslant 1 - \varepsilon$ şi $\sigma(U_2)=\sigma_L$. De aici, pe baza teoremei 4.20, rezultă stabilitatea uniformă. Dacă

$$|X^n(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau)| \leqslant k(1 - \varepsilon)^n$$

rezultă $\sigma_L$ situat în $|z| \leqslant 1 - \varepsilon$ deci şi $\sigma(U_2)$ situat în $|z| \leqslant 1 - \varepsilon$ şi stabilitatea asimptotică uniformă rezultă din teorema 4. 20. Dacă $X(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau)$ are o valoare proprie în $|z| > 1$, rezultă că $U_{t_0+\omega,0}$ are o asemenea valoare proprie şi instabilitatea rezultă din prima parte a teoremei 4.20. Teorema este demonstrată.

*Aplicaţie.* 1° Să considerăm ecuaţia scalară

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)x(t - \tau)$$

unde $a(t)$ şi $b(t)$ sînt funcţii continue periodice. $x(t, t_0 + \tau)$ este soluţia sistemului determinată pentru $t \geqslant t_0 + \tau$ prin condiţiile $x(t, t_0+\tau) \equiv 0$ pentru $t_0 \leqslant t < t_0 + \tau$, $x(t_0 + \tau, t_0 + \tau) = 1$. Pentru $t_0 + \tau \leqslant t \leqslant t_0+2\tau$ această soluţie este dată de sistemul

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t), \quad x(t_0 + \tau, t_0 + \tau) = 1.$$

Rezultă

$$x(t, t_0 + \tau) = e^{\int_{t_0+\tau}^{t} a(s)\,ds}, \qquad t_0 + \tau \leqslant t \leqslant t_0 + 2\tau.$$

Pe intervalul $t_0 + 2\tau \leqslant t \leqslant t_0 + 3\tau$, soluţia e dată de sistemul

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)e^{\int_{t_0+\tau}^{t-\tau} a(s)\,ds}, \quad x(t_0 + 2\tau, t_0 + \tau) = e^{\int_{t_0+\tau}^{t_0+2\tau} a(s)\,ds}.$$

Şi această soluţie poate fi scrisă explicit. Procedeul continuă şi conduce la formula explicită pentru $x\,(\omega + t_0 + \tau,\ t_0 + \tau)$. Condiţia de stabilitate se scrie $|x(\omega + t_0 + \tau,\ t_0 + \tau)| \leqslant 1$, iar de stabilitate asimptotică $|x(\omega + t_0 + \tau, t_0 + \tau)| \leqslant 1 - \varepsilon$. După cum se vede pentru $\tau \sup |b(t)|$ suficient de mic problema stabilităţii pentru ecuaţia scalară considerată poate fi rezolvată pînă la capăt.

2°. Să considerăm un sistem de forma

$$\dot{x}(t) = [A(t) + C(t)]\,x(t) + [B(t) + D(t)]\,x(t - \tau) \tag{50}$$

unde $A$, $B$, $C$, $D$, sînt matrici periodice cu perioadă $\omega > \tau$.
Demonstrăm că *dacă soluţia banală a sistemului*

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,x(t - \tau) \tag{51}$$

*este uniform asimptotic stabilă şi* $\int_0^{\omega} \{|C(t)| + |D(t)|\}\,\mathrm{d}t$ *este suficient de mică, atunci soluţia banală a sistemului* (50) *este de asemenea uniform asimptotic stabilă.*

Fie $U'_{t_0+\omega,t_0}$ operatorul ataşat sistemului (50), $U''_{t_0+\omega,t_0}$ operatorul ataşat sistemului (51). Din cauza ipotezei făcute asupra sistemului (51), spectrul operatorului $U''_{t_0+\omega,t_0}$ se află în cercul $|z| \leqslant 1 - \varepsilon$ (pe baza teoremei 4.20). Dar $\sigma(U''_{t_0+\omega,t_0}) = \sigma_{L''} \cup \sigma_{M''}$ şi deci $\sigma_{L''}$ şi $\sigma_{M''}$ se află în cercul $|z| \leqslant 1 - \varepsilon$. Avem şi o descompunere de forma $\sigma(U'_{t_0+\omega,t_0}) = \sigma_{L'} \cup \sigma_{M'}$. Rămîne de dovedit că în ipoteza din enunţ, $\sigma_{L'}$ diferă oricît de puţin de $\sigma_{L''}$ iar $\sigma_{M'}$, diferă oricît de puţin de $\sigma_{M''}$; pentru aceasta e suficient să arătăm că în ipoteza din enunţ $X'(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau)$ diferă oricît de puţin de $X''(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau)$ şi că $M'$ diferă oricît de puţin de $M''$.

Pentru sistemele de forma considerată avem

$$M''(\alpha, s) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} X''(\omega + s,\ \xi + \tau)\,B(\xi + \tau)\,X''(\xi,\ \alpha + \tau)\,\mathrm{d}\xi,$$

$$M'(\alpha, s) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} X'(\omega + s, \xi + \tau)\,[B(\xi + \tau) + D(\xi + \tau)]\,X'(\xi, \alpha + \tau)\,\mathrm{d}\xi.$$

Operatorii corespunzători se scriu

$$< M''(\sigma, s), \varphi(\sigma) >'' = M''(t_0 - \tau, s)\,\varphi(t_0) + \int_{t_0-\tau}^{t_0} M''(\xi, s)\,B(\xi + \tau)\,\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

$$< M'(\sigma, s), \varphi(\sigma) >' = M'(t_0 - \tau, s)\,\varphi(t_0) + \int_{t_0-\tau}^{t_0} M'(\xi, s)\,[B(\xi + \tau) + D(\xi + \tau)]\,\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

**Rezultă**

$$< M''(\sigma, s), \varphi(\sigma) >'' - < M'(\sigma, s), \varphi(\sigma) >' = [M''(t_0 - \tau, s) - M'(t_0 - \tau, s)]\varphi(t_0) + \int_{t_0-\tau}^{t_0} \{[M''(\xi, s) - M'(\xi, s)]B(\xi + \tau) + M'(\xi, s)D(\xi + \tau)\}\varphi(\xi)\, d\xi.$$

Avem, notînd $X(t, u) = X'(t,u) - X''(t,u)$,

$$\frac{d}{dt}X(t, u) = [A(t) + C(t)]X'(t, u) + [B(t) + D(t)]X'(t-\tau, u) - A(t)X''(t, u) - B(t)X''(t-\tau, u) = A(t)X(t, u) + B(t)X(t-\tau, u) + C(t)X'(t, u) + D(t)X'(t-\tau, u)$$

și $X(t,u) \equiv 0$ pentru $t \leqslant u$.

**Rezultă**

$$X(t, u) = \int_u^t X''(t, \alpha)[C(\alpha)X'(\alpha, u) + D(\alpha)X'(\alpha - \tau, u)]\, d\alpha.$$

Avem

$|X''(t, \alpha)| \leqslant e^{A\tau}$ pentru $\alpha \leqslant t \leqslant \alpha + \tau$, $A = \sup |A(t)|$, $B = \sup |B(t)|$.

Din

$$\frac{d}{dt}X''(t, \alpha) = A(t)X''(t, \alpha) + B(t)X''(t-\tau, \alpha)$$

rezultă

$$X''(t, \alpha) = X''(\alpha+\tau, \alpha) + \int_{\alpha+\tau}^t A(u)X''(u, \alpha)\, du + \int_{\alpha+\tau}^t B(u)X''(u-\tau, \alpha)\, du$$

deci

$$|X''(t, \alpha)| \leqslant |X''(\alpha+\tau, \alpha)| + \int_{\alpha+\tau}^t |A(u)||X''(u, \alpha)|\, du + \tau|B|e^{A\tau} \text{ pentru } \alpha - \tau \leqslant t \leqslant \alpha + 2\tau.$$

**Rezultă**

$$|X''(t,\alpha)| \leqslant (1 + \tau B)e^{A\tau}e^{A\tau} = (1 + \tau B)e^{2A\tau} \text{ pentru } \alpha \leqslant t \leqslant \alpha + 2\tau.$$

La fel, pentru $\alpha + 2\tau \leqslant t \leqslant \alpha + 3\tau$, avem

$$|X''(t, \alpha)| \leqslant (1 + \tau B)e^{2A\tau} + \tau B(1 + \tau B)e^{2A\tau} + \int_{\alpha+2\tau}^t |A(u)|\, |X''(u, \alpha)|\, du$$

deci

$$|X''(t, \alpha)| \leqslant (1 + \tau B)^2 e^{2A\tau} e^{A\tau} = (1 + \tau B)^2 e^{3A\tau}, \text{ pentru } \alpha \leqslant t \leqslant \alpha + 3\tau.$$

Rezultă în general pentru $\alpha \leqslant t \leqslant \alpha + k\tau$ evaluarea

$$|X''(t, \alpha)| \leqslant (1 + \tau B)^{k-1} e^{kA\tau}.$$

Analog

$$|X'(t, \alpha)| \leqslant [1 + \tau(B + D)]^{k-1} e^{k\tau(A+C)}.$$

Dacă $\tau < \omega \leqslant k\tau$, rezultă

$$|X(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau) \leqslant (1 + \tau B)^{k-1} e^{kA\tau}[1 + \tau(B +$$

$$+ D)]^{k-1} e^{k\tau(A+C)} \int_{t_0+\tau}^{t_0+\tau+\omega} (|C(\alpha)| + |D(\alpha)|) d\alpha = K_1 \int_0^{\omega} (|C(\alpha)| + |D(\alpha)|) d\alpha$$

şi se vede că dacă $\int_0^{\omega} (|C(\alpha)| + |D(\alpha)|) d\alpha$ e suficient de mică $|X'(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau) - X''(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau)|$ este oricît de mică.
La fel

$$|M'(\alpha, s)| \leqslant \tau [1 + \tau(B + D)]^{k-1} e^{k\tau(A+C)} (B + D) e^{\tau(A+C)} = K_2$$

$$|M''(\alpha, s) - M'(\alpha, s)| \leqslant \tau B e^{k\tau(A+C)} (1 + \tau(B + D))^{k-1} K_1 \int_0^{\omega} (|C(\alpha)| +$$

$$+ |D(\alpha)|) d\alpha + [1 + \tau(B + D)]^{k-1} e^{k\tau(A+B)} e^{\tau(A+B)} \int_0^{\omega} |D(\alpha)| d\alpha$$

deci

$$|M''(\alpha, s) - M'(\alpha, s)| \leqslant K_3 \int_0^{\omega} (|C(\alpha)| + |D(\alpha)|) d\alpha.$$

Ţinînd seama de aceste evaluări rezultă

$$|< M''(\sigma, s), \varphi(\sigma) >'' - < M'(\sigma, s), \varphi(\sigma) >'| \leqslant$$
$$\leqslant K_4 \int_0^{\omega} (|C(\alpha)| + |D(\alpha)|) d\alpha \|\varphi\|.$$

De aici se capătă concluzia anunţată.

## § 11. SISTEME CU PARAMETRU MIC, CU ÎNTÎRZIERE

Începem studiul sistemelor neliniare cu problema soluţiilor periodice ale sistemelor cu parametru mic.

Considerăm un sistem de forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[t, x(t + s), \mu], \tag{52}$$

unde $f$ este periodică de perioadă $\omega > \tau$ şi are proprietăţile din § 1.

TEOREMA 4.24. *Dacă pentru $\mu = 0$ sistemul (52) admite o soluţie periodică $x_0(t)$, de perioadă $\omega$, astfel încît sistemul în variaţii corespunzător nu admite soluţii periodice de perioadă $\omega$ diferite de soluţia banală, atunci există $\mu_0 > 0$ astfel încît pentru $|\mu| < \mu_0$ sistemul (52) admite o soluţie periodică unică $x(t, \mu)$ de perioadă $\omega$, cu proprietatea $\lim_{\mu \to 0} x(t, \mu) = x_0(t)$.*

*Demonstraţie.* Deoarece componentele lui $f$ sînt diferenţiabile putem scrie

$$f[t, x(t+s), 0] - f[t, x_0(t+s), 0] = A[t, x(t+s) - x_0(t+s)] + \\ + o(\|x - x_0\|),$$

unde

$$A(t, \varphi) = \int_{-\tau}^{0} \varphi(s) \, d_s \eta(t, s).$$

Sistemul în variaţii corespunzător soluţiei $x_0(t)$ este sistemul liniar

$$\dot{y}(t) = \int_{-\tau}^{0} y(t+s) d_s \eta(t, s). \tag{53}$$

În § 1 am demonstrat relaţia (8) din care rezultă în particular

$$|x(\omega+s; \varphi, 0) - x(\omega+s; \varphi_0, 0) - y(\omega+s; \varphi-\varphi_0)| = o(\|\varphi-\varphi_0\|),$$

unde am notat $x(t;\varphi,\mu)$ soluţia sistemului (52) care pentru $t \in [-\tau, 0]$ coincide cu $\varphi$ şi $y(t;\varphi)$ soluţia sistemului (53) care pentru $t \in [-\tau, 0]$ coincide cu $\varphi$. Din cauza periodicităţii sistemului (52), $x(t+\omega; \varphi, \mu)$ este de asemenea soluţie şi dacă $x(\omega+s; \varphi, \mu) = \varphi(s)$ pentru $s \in [-\tau, 0]$ această soluţie este periodică (şi reciproc). Fie $F[\varphi, \mu] = x(\omega+s; \varphi, \mu) - \varphi$. Dacă $\varphi_0$ este funcţia iniţială a soluţiei periodice $x_0(t)$, avem $F[\varphi_0, 0] = 0$. Din relaţia (8) rezultă că pentru orice $\mu$, $F[\varphi, \mu]$ e diferenţiabilă; într-adevăr,

$$F[\varphi_2, \mu] - F[\varphi_1, \mu] = x(\omega+s; \varphi_2, \mu) - \varphi_2 - x(\omega+s; \varphi_1, \mu) + \varphi_1$$

şi pe baza relaţiei (8),

$$\|F[\varphi_2, \mu] - F[\varphi_1, \mu] - I(\varphi_2-\varphi_1) - U_\mu(\varphi_2-\varphi_1)\| = \|x(\omega+s; \varphi_2, \mu) - \\ - x(\omega+s; \varphi_1, \mu) - y(\omega+s; \varphi_2-\varphi_1, \mu)\| = o(\|\varphi_2-\varphi_1\|),$$

unde $y(t; \varphi, \mu)$ este soluţia sistemului în variaţii corespunzător soluţiei $x(t; \varphi_1, \mu)$. Rezultă că diferenţiala lui $F[\varphi, \mu]$ este $I - U_\mu$, unde $U_\mu \varphi = y(\omega+s; \varphi, \mu)$.

În particular, diferenţiala în punctul $[\varphi_0, 0]$ este $I - U_0$, unde $U_0\varphi = y(\omega+s; \varphi)$ (reamintim că $y(t;\varphi)$ este soluţia sistemului (53), sistemul în variaţii corespunzător soluţiei $x_0(t)$). Operatorul $U_0$ este complet continuu (compact) după cum s-a arătat în § 5. Deoarece prin ipoteză sistemul (53) nu admite soluţii periodice de perioadă $\omega$ diferite de cea banală, ecuaţia $\varphi - U_0\varphi = 0$ nu are soluţii diferite de cea banală. Dar atunci din proprietăţile generale ale operatorilor complet continui rezultă că $I - U_0$ e inversabil. Deoarece $F[\varphi, \mu]$ e diferenţiabilă, $F[\varphi_0, 0] = 0$ şi diferenţiala în punctul $[\varphi_0, 0]$ e inversabilă; rezultă, pe baza teoremei funcţiilor implicite în spaţii Banach, că există $\mu_0 > 0$ astfel încît pentru $|\mu| < \mu_0$ ecuaţia $F[\varphi, \mu] = 0$ admite o soluţie $[\varphi_\mu, \mu]$ cu proprietatea $\lim_{\mu\to 0} \varphi_\mu = \varphi_0$. Din $F[\varphi_\mu, \mu] \equiv 0$ rezultă că soluţia $x(t; \varphi_\mu, \mu)$ este periodică; în plus $\lim_{\mu\to 0} x(t; \varphi_\mu, \mu) = x(t; \varphi_0, 0) = x_0(t)$. Teorema este demonstrată.

*Aplicație.* Considerăm sistemul

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{0} x(t+s)\,d_s\,\eta(t, s) + f(t) + \mu\, g\,[t, x(t+s), \mu], \tag{54}$$

unde $\eta$ are aceleași proprietăți ca în § 5, iar $g$ are pentru $t$ fixat drept componente funcționale definite pe spațiul funcțiilor vectoriale continue pe $[-\tau, 0]$ și e periodică în $t$ de perioadă $\omega$. Ca peste tot pînă acum presupunem $\omega > \tau$. Presupunem că sistemul liniar

$$\frac{dy(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{0} y(t+s)\,d_s\,\eta(t, s) \tag{55}$$

nu are soluții periodice de perioadă $\omega$ diferite de cea banală. Atunci, pe baza teoremei 4.16, sistemul (54) admite pentru $\mu = 0$ o soluție periodică unică $x_0(t)$, de perioadă $\omega$.

Sistemul în variații corespunzător este tocmai sistemul (55). Condițiile teoremei 4.23 sînt verificate, deci există $\mu_0 > 0$ astfel încît dacă $|\mu| < \mu_0$ sistemul (54) admite o soluție periodică $x(t, \mu)$ unică, de perioadă $\omega$, cu proprietatea $\lim\limits_{\mu \to 0} x(t, \mu) = x_0(t)$.

Să presupunem acum că sistemul (55) admite soluții periodice de perioadă $\omega$. Conform teoremei 4.19′ există un număr finit de astfel de soluții liniar independente; le vom nota $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Sistemul adjunct admite și el același număr finit de soluții periodice independente, $q_1, q_2, \ldots, q_k$.

Sistemul (54) pentru $\mu = 0$ admite soluții periodice de perioadă $\omega$ dacă și numai dacă $\int_0^{\omega} f(t)\,q_j(t)\,dt = 0$ pentru $j = 1, 2, \ldots, k$. Soluțiile periodice ale sistemului (54) pentru $\mu = 0$ sînt date de formula

$$x(t) = x(0)X(t, 0) + \int_{-\tau}^{0} x(s)\,d_s \int_0^{\tau} \eta(\alpha, s-\alpha)X(t, \alpha)\,d\alpha + \\ + \int_0^{t} f(\alpha)X(t, \alpha)\,d\alpha;$$

unde funcțiile inițiale $x(s)$, $s \in [-\tau, 0]$ sînt date de sistemul

$$x(s) = x(0)X(\omega+s, 0) + \int_{-\tau}^{0} x(\beta)\,d_\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha+\tau, \beta-\alpha-\tau)X(\omega + \\ + s, \alpha+\tau)\,d\alpha + \int_0^{\omega+s} f(\alpha)X(\omega+s, \alpha)\,d\alpha$$

(vezi (40)). După cum s-a văzut în § 7, soluțiile acestui sistem sînt de forma

$$x(s) = \chi(s) + \chi(0)\,\Gamma(-\tau, s) + \\ + \int_{-\tau}^{0} \chi(\beta)\,d_\beta \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha+\tau, \beta-\alpha-\tau)\,\Gamma(\alpha, s)\,d\alpha,$$

unde $\Gamma$ depinde numai de sistemul (55), iar

$$\chi(s) = \int_0^{\omega+s} f(\alpha) X(\omega + s, \alpha) \mathrm{d}\alpha + \sum_j \lambda_j b_j(s),$$

unde $b_k(s)$ depind numai de sistemul (55) și $\lambda_j$ verifică sistemul

$$\lambda_i = \sum_j \gamma_{ij} \lambda_j + f_i.$$

Dacă $\int_0^{\omega} f(t) q_j(t) \mathrm{d}t = 0, j = 1, \ldots k$, sistemul în $\lambda_i$ admite soluții. Proprietăți simple din algebra liniară arată că există o soluție și numai una care verifică o evaluare de forma $|\lambda_i| \leqslant K_1 \max_j |f_j|$, unde $K_1$ depinde numai de $\gamma_{ij}$, deci de sistemul (55). Ținînd seama de expresiile pentru $f_j$, rezultă o evaluare de forma $|\lambda_i| \leqslant K_2 \sup |f|$, unde $K_2$ depinde numai de sistemul (55). Rezultă de aici că există $\chi(s)$ unic admițînd o evaluare de forma $|\chi(s)| \leqslant K_3 \sup |f|$, unde $K_3$ depinde numai de sistemul (55). În definitiv, deducem că există o soluție periodică unică a sistemului (54), pentru $\mu = 0$ care admite o evaluare de forma $|x(t)| < K \sup |f|$, unde $K$ depinde numai de sistemul (55).

Notînd cu $p(t)$ această soluție, soluțiile periodice de perioadă $\omega$ ale sistemului (54) pentru $\mu = 0$ vor fi de forma $p(t) + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j p_j(t)$.

TEOREMA 4.25. *Fie*

$$P_j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \mu) = \int_0^{\omega} g\left[t, p(t+s) + \sum_{j=1}^{k} \alpha_i p_i(t+s), \mu\right] q_j(t) \mathrm{d}t.$$

*Dacă* $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_k^0$ *verifică relațiile*

$$P_j(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_k^0, 0) = 0, \quad \frac{\partial(P_1, P_2, \ldots, P_k)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)} \neq 0 \text{ pentru } \alpha_j = \alpha_j^0, \mu = 0,$$

*atunci există* $\mu_0 > 0$ *astfel încît pentru* $|\mu| < \mu_0$ *sistemul* (54) *admite o soluție periodică* $x(t, \mu)$ *de perioadă* $\omega$ *cu proprietatea*

$$\lim_{\mu \to 0} x(t, \mu) = p(t) + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^0 p_j(t).$$

*Se presupune că* $g$ *este diferențiabilă într-o vecinătate a punctului* $p(t+s) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^0 p_i(t+s)$.

*Demonstrație*. Pe baza teoremei funcțiilor implicite există funcțiile $\alpha_j^0(\mu)$ cu $\alpha_j^0(0) = \alpha_j^0$, astfel ca

$$P_j[\alpha_1^0(\mu), \ldots, \alpha_k^0(\mu), \mu] \equiv 0.$$

Ţinînd seama de felul cum sînt definite $P_j$, rezultă că sistemul

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{0} x(t+s)\,d_s\,\eta(t, s) + g[t, p(t+s) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^0(\mu)p_i(t+s), \mu],$$

admite soluţii periodice de perioadă $\omega$. Fie $x_1^*(t)$ soluţia periodică a acestui sistem aleasă astfel ca

$$|x_1^*| < K \sup |g[t, p(t+s) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^0(\mu)p_i(t+s), \mu]|.$$

Punem

$$x_1(t) = p(t) + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^1 p_j(t) + \mu x_1^*(t).$$

Funcţia $x_1(t)$ este o soluţie periodică, de perioadă $\omega$, a sistemului

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{0} x(t+s)\,d_s\,\eta(t, s) + f(t) + \mu g[t, p(t+s) + \sum_{j=1}^{k} \alpha_i^0(\mu)p_i(t+s), \mu].$$

Considerăm sistemul

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{0} x(t+s)\,d_s\,\eta(t, s) + g[t, x_1(t+s), \mu]. \tag{56}$$

Condiţia ca acest sistem să admită soluţie periodică de perioadă $\omega$ se scrie

$$\int_0^{\omega} g[t, p(t+s) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^1 p_i(t+s) + \mu x_1^*(t+s), \mu]\,q_j(t)\,dt = 0, \quad j = 1,2,\ldots,k.$$

Aceste condiţii sînt verificate pentru $\mu = 0$, $\alpha_i^1 = \alpha_i^0$ şi în plus determinantul funcţional în raport cu $\alpha_1^1, \ldots, \alpha_k^1$ este nenul în acest punct, deci, pe baza teoremei funcţiilor implicite, putem găsi funcţiile $\alpha_i^1(\mu)$ cu $\alpha_i^1(0) = \alpha_i^0$, astfel încît condiţiile să fie verificate.

Presupunem $\alpha_i^1$ astfel alese şi $x_1(t)$ definit corespunzător. Fie $x_2^*(t)$ soluţia periodică, de perioadă $\omega$, a sistemului (56) care admite evaluarea

$$|x_2^*(t)| < K \sup |g[t, x_1(t+s), \mu]|.$$

Punem

$$x_2(t) = p(t) + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^2 p_j(t) + \mu x_2^*(t)$$

şi alegem pe $\alpha_j^2(\mu)$ astfel încît procedeul să poată continua. Obţinem astfel un şir $\alpha_j^i(\mu)$ cu $\alpha_j^i(0) = \alpha_j^0$ şi un şir de funcţii periodice

$$x_i(t) = p(t) + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^i(\mu) p_j(t) + \mu x_i^*(t)$$

care verifică relaţiile

$$\dot{x}_i(t) = \int_{-\infty}^{0} x_i(t+s)\,d_s\,\eta(t, s) + f(t) + \mu g[t, x_{i-1}(t+s), \mu],$$

$$|x_i^*(t)| < K \sup |g[t, x_{i-1}(t+s), \mu]|.$$

Este uşor de verificat că pentru $|\mu|$ suficient de mic, funcţiile $x_i(t)$ astfel construite nu părăsesc vecinătatea punctului $p(t+s)+\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^0 p_i(t+s)$ în care $g$ este diferenţiabilă.

Dacă vom demonstra că şirul $x_i(t)$ converge uniform, va rezulta că limita lui este o soluţie periodică, de perioadă $\omega$, a sistemului (54) cu proprietăţile din enunţ.

Avem

$$x_{i+1}(t)-x_i(t)=\sum_j [\alpha_j^{i+1}(\mu)-\alpha_j^i(\mu)]p_j(t)+\mu[\overset{*}{x}_{i+1}(t)-\overset{*}{x}_i(t)].$$

Ţinînd seama de felul în care au fost alese soluţiile $\overset{*}{x}_i(t)$ rezultă

$$|\overset{*}{x}_{i+1}(t)-\overset{*}{x}_i(t)|\leqslant K\sup|g[t, x_i(t+s), \mu]-g[t, x_{i-1}(t+s), \mu]|\leqslant$$
$$\leqslant KL\|x_i(t+s)-x_{i-1}(t+s)\|\leqslant KL\sup|x_i(t)-x_{i-1}(t)|.$$

Să notăm $a_i=\sup|x_{i+1}(t)-x_i(t)|$, $b_i=\max\limits_j\sup|\alpha_j^{i+1}(\mu)-\alpha_j^i(\mu)|$, $L_1=\sup\sum_{j=1}^{k}|p_i(t)|$. Rezultă

$$a_i\leqslant L_1 b_i+|\mu|KL\,a_{i-1}.$$

Considerăm funcţiile

$$R_j^l(\beta_1,\ldots,\beta_k,\mu,\lambda)\equiv\int_0^\omega g[t, p(t+s)+\sum_i\beta_i p_i(t+s)+\mu\overset{*}{x}_{l-1}(t+s)+$$
$$+\lambda[\overset{*}{x}_l(t+s)-\overset{*}{x}_{l-1}(t+s)], \mu]q_j(t)\,dt.$$

Fie $\beta_i^l(\mu,\lambda)$ definite de relaţiile $R_j^l(\beta_1,\ldots,\beta_k,\mu,\lambda)=0$ şi de condiţiile $\beta_i^l(0,0)=\alpha_j^0$ (pe baza teoremei funcţiilor implicite). Se vede că $\beta_i^l(\mu,0)=\alpha_i^{l-1}(\mu)$, $\beta_i^l(\mu,\mu)=\alpha_i^l(\mu)$, deci

$$\alpha_i^l(\mu)-\alpha_i^{l-1}(\mu)=\beta_i^l(\mu,\mu)-\beta_i^l(\mu,0)=\frac{\partial}{\partial\lambda}\beta_i^l(\mu,\theta\mu)\mu.$$

De aici rezultă o evaluare de forma

$$|\alpha_i^l(\mu)-\alpha_i^{l-1}(\mu)|\leqslant|\mu|L_2\sup|\overset{*}{x}_l-\overset{*}{x}_{l-1}|\leqslant|\mu|L_2 KL\,a_{l-}$$

deoarece

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\beta_i^l=-\frac{\dfrac{\partial(R_1, R_2^l,\ldots R_k^l)}{\partial(\beta_1,\ldots,\lambda,\beta_{i+1},\ldots,\beta_k)}}{\dfrac{\partial(R_1^l,\ldots,R_k^l)}{\partial(\beta_1,\ldots,\beta_i,\ldots,\beta_k)}}\quad\text{şi}\quad\frac{\partial R_j}{\partial\lambda}=\mathfrak{L}[\overset{*}{x}_l(t+s)-\overset{*}{x}_{l-1}(t+s)],$$

$\mathfrak{L}$ fiind un operator liniar.

Deducem $b_{l-1}\leqslant|\mu|LL_2K\,a_{l-1}$ şi deci

$$a_i\leqslant L_1|\mu|LL_2\,Ka_i+|\mu|KLa_{i-1},\quad a_i\leqslant\frac{|\mu|L_3}{1+|\mu|L_4}a_{i-1}.$$

Ținînd seama de această evaluare rezultă pentru $|\mu|$ suficient de mic convergența seriei $\Sigma a_i$, deci convergența uniformă a șirului $x_i(t)$. Teorema este demonstrată.

## § 12. SISTEME CU ARGUMENT ÎNTÎRZIAT CU PARAMETRU MIC

În cele ce urmează părăsim cadrul general al sistemelor cu întîrziere și considerăm numai sisteme cu argument întîrziat de forma

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = f[t, x(t), x(t-\tau), \mu]. \tag{57}$$

Aici $x$ și $f$ sînt vectori coloană; $f$ este periodică în $t$ de perioadă $\omega > \tau$.

Să presupunem că sistemul generator obținut pentru $\mu = 0$ admite o familie de soluții periodice de perioadă $\omega$. Fie $x_0(t, h)$ această familie. Sistemul în variații

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = f'_u[t, x_0(t, h_0), x_0(t-\tau, h_0), 0]\, y(t) + $$
$$+ f'_v[t, x_0(t, h_0), x_0(t-\tau, h_0), 0]\, y(t-\tau) \tag{58}$$

admite soluțiile periodice $\dfrac{\partial x_0(t, h_0)}{\partial h}$. Într-adevăr, din

$$\frac{\mathrm{d}x_0(t, h)}{\mathrm{d}t} = f[t, x_0(t, h), x_0(t-\tau, h), 0]$$

rezultă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial h} x_0(t, h) = f'_u[t, x_0(t, h), x_0(t-\tau, h), 0]\frac{\partial x_0(t, h)}{\partial h} + $$
$$+ f'_v[t, x_0(t, h), x_0(t-\tau, h), 0]\frac{\partial x_0(t-\tau, h)}{\partial h}$$

deci coloanele matricii $\dfrac{\partial x_0(t, h)}{\partial h}$ reprezintă soluții ale sistemului în variații considerat. *Presupunem că sistemul în variații* (58) *nu mai admite, oricare ar fi $h_0$ într-un anumit domeniu, alte soluții periodice de perioadă $\omega$ independente de acestea.*

Fie $q_1(t, h_0), \ldots, q_k(t, h_0)$ soluțiile periodice independente ale sistemului adjunct sistemului (58). Dacă sistemul (57) admite o soluție periodică de perioadă $\omega$ de forma

$$x(t, \mu) = x_0(t, h_0) + \mu x_1(t, \mu),$$

atunci

$$\int_0^\omega q_j(t, h_0) f'_\mu[t, x_0(t, h_0), x_0(t-\tau, h_0), 0]\,\mathrm{d}t = 0, \quad j = 1, \ldots, k \tag{59}$$

Într-adevăr, avem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t, \mu) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_0(t, h_0) + \mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_1(t, \mu) =$$

$$= f[t, x_0(t, h_0) + \mu x_1(t, \mu), x_0(t-\tau, h_0) + \mu x_1(t-\tau, \mu), \mu] =$$

$$= f[t, x_0(t, h_0), x_0(t-\tau, h_0), 0] + \mu f'_u[t, x_0(t, h_0), x_0(t-\tau, h_0), 0] x_1(t, 0) +$$

$$+ \mu f'_v[t, x_0(t, h_0), x_0(t-\tau, h_0), 0] x_1(t-\tau, 0) +$$

$$+ \mu f'_\mu[t, x_0(t, h_0), x_0(t-\tau, h_0), 0] + O(\mu^2).$$

Rezultă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t, 0) = f'_u[t, x_0(t, h_0), x_0(t-\tau, h_0), 0] x_1(t, 0) +$$

$$+ f'_v[t, x_0(t, h_0), x_0(t-\tau, h_0), 0] x_1(t-\tau, 0) +$$

$$+ f'_\mu[t, x_0(t, h_0), x_0(t-\tau, h_0), 0].$$

Deoarece $x_1(t, 0)$ este periodică de perioadă $\omega$, rezultă, pe baza teoremei 4.18, egalitățile (59).

TEOREMA 4.26. *Fie*

$$P_j(h) \equiv \int_0^\omega q_j(t, h), f'_\mu[t, x_0(t, h), x_0(t-\tau, h), 0]\,\mathrm{d}t.$$

*Dacă* $h_0$ *verifică relațiile*

$$P_j(h_0) = 0, \quad \det \frac{\partial}{\partial h_l} \int_0^\omega q_j(t, h_0) f'_\mu[t, x_0(t, h), x_0(t-\tau, h), 0]\,\mathrm{d}t \neq 0$$

*pentru* $h = h_0$, *iar* $f$ *este analitică, atunci sistemul* (57) *admite o soluție periodică* $x(t, \mu)$ *astfel ca*

$$\lim_{\mu \to 0} x(t, \mu) = x_0(t, h_0).$$

*Demonstrație.* Scriem sistemul (57) sub forma

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = f_0[t, x(t), x(t-\tau)] + \mu f_1[t, x(t), x(t-\tau)] +$$

$$+ \mu^2 f_2[t, x(t), x(t-\tau)] + \ldots$$

unde, evident,

$$f_0(t, u, v) = f(t, u, v, 0), \quad f_1(t, u, v) = f'_\mu(t, u, v, 0).$$

Căutăm soluția periodică sub forma

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \ldots$$

Înlocuind în sistem obţinem

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = f_0[t,\ x_0(t),\ x_0(t-\tau)],$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = f'_{0u}[t,\ x_0(t),\ x_0(t-\tau)]\,x_1(t) + f'_{0v}[t,\ x_0(t),\ x_0(t-\tau)]\,x_1(t-\tau) +$$
$$+ f_1[t,\ x_0(t),\ x_0(t-\tau)],$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = f'_{0u}[t,\ x_0(t),\ x_0(t-\tau)]\,x_2(t) + f'_{0v}[t,\ x_0(t),\ x_0(t-\tau)]\,x_2(t-\tau) +$$
$$+ f'_{1u}[t,\ x_0(t),\ x_0(t-\tau)]\,x_1(t) + f'_{1v}[t,\ x_0(t),\ x_0(t-\tau)]\,x_1(t-\tau) +$$
$$+ f_2[t,\ x_0(t),\ x_0(t-\tau)]$$

şi aşa mai departe.

Alegem $x_0(t) = x_0(t,\ h_0)$. Deoarece $P_j(h_0) = 0,\ j = 1, \ldots, k$, există soluţii periodice ale sistemului care determină pe $x_1(t)$. Aceste soluţii sînt de forma

$$p^1(t) + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^1 p_j(t), \quad p_j(t) = \frac{\partial x_0(t, h_0)}{\partial h_j}.$$

Pentru ca sistemul care determină pe $x_2(t)$ să admită soluţii periodice este necesar şi suficient ca

$$\int_0^{\omega} q_j(t, h_0)\Big\{ f'_{1u}[t,\ x_0(t),\ x_0(t-\tau)]\,[p^1(t) +$$
$$+ \sum_{l=1}^{k} \alpha_l^1 p_l(t) + f'_{1v}[\,]\,p^1(t-\tau) + \sum_{l=1}^{k} \alpha_l^1 p_l(t-\tau)] + f_2\Big\}\,dt = 0.$$

Aceste condiţii reprezintă un sistem de ecuaţii liniare în $\alpha_l^1$ a cărui matrice are elementele $A_{jl}$ date de

$$A_{jl} = \int_0^{\omega} q_j(t, h_0)\Big\{ f'_{1u}[t, x_0(t), x_0(t-\tau)]\,\frac{\partial x_0(t, h_0)}{\partial h_l} + f'_{1v}[\,]\,\frac{\partial x_0(t-\tau, h_0)}{\partial h_l}\Big\}\,dt =$$
$$= \frac{\partial}{\partial h_l}\int_0^{\omega} q_j(t, h_0) f'_{\mu}[t, x_0(t,\ h_0), x_0(t-\tau,\ h_0), 0]\ dt.$$

Conform ipotezei din enunţ, det $A_{jl} \neq 0$, deci putem alege, în mod unic, constantele $\alpha_l^1$ astfel ca sistemul care determină pe $x_2(t)$ să admită soluţii periodice.

Continuînd calculul se determină succesiv în mod unic funcţiile $x_2(t),\ x_3(t), \ldots$

Din ipotezele de analiticitate făcute, rezultă evaluări de forma

$$|f_j| \leqslant K_1 L^j, \quad |f'_{ju}| + |f'_{jv}| \leqslant K_2 L^j.$$

Avem

$$| p^1 (t) | \leqslant K_0 K_1 L, \quad \Sigma | p_j (t) | \leqslant K_3, \quad | \alpha_i^1 | \leqslant K_4 K_1 L^2$$

deci

$$| x_1 (t) | \leqslant K_1 L (K_0 + K_3 K_4 L).$$

Mai departe

$$| p^2(t) | \leqslant K_0 [K_2 L K_1 L (K_0 + K_3 K_4 L) + K_1 L^2] = K_0 K_1 L^2 [1+ + K_2 (K_0 + K_3 K_4 L)], \quad | \alpha_i^2 | \leqslant K_4 \{K_2 L^2 K_1 L (K_0 + K_3 K_4 L) + K_1 L^3\} = = K_1 K_4 L^3 [1 + K_2 (K_0 + K_3 K_4 L)]$$

deci

$$| x_2 (t) | \leqslant K_1 L^2 \{K_0 [1 + K_2 (K_0 + K_3 K_4 L) + K_3 K_4 L [1 + K_2 (K_0 + + K_3 K_4 L)]\} = K_1 L^2 (K_0 + K_3 K_4 L) [1 + K_2 (K_0 + K_3 K_4 L)].$$

În general

$$| p^j (t)| \leqslant K_0 \{K_2 L \sup | x_{j-1}| + K_2 L^2 | \sup x_{j-2} | + \ldots + + K_2 L^{j-1} \sup | x_1 | + K_1 L^j\}$$

$$| \alpha_j^l | \leqslant K_4 \{K_2 L^2 \sup | x_{j-1} | + \ldots + K_2 L^j \sup | x_1 | + K_1 L^{j+1}\}$$

deci

$$| x_j (t) | \leqslant K_2 L (K_0 + K_3 K_4 L) \sup | x_{j-1} | + \ldots + K_2 L^{j-1} (K_0 + + K_3 K_4 L) \sup | x_1 | + K_1 L^j (K_0 + K_3 K_4 L).$$

Să presupunem că

$$| x_{j-1} (t) | \leqslant K_1 L^{j-1} (K_0 + K_3 K_4 L) [1 + K_2 (K_0 + K_3 K_4 L^{j-2})].$$

Avem

$$| x_j (t) | \leqslant K_2 L (K_0 + K_3 K_4 L) K_1 L^{j-1} (K_0 + K_3 K_4 L)[1 + K_2 (K_0 + + K_3 K_4 L)]^{j-2} + K_2 L^2 (K_0 + K_3 K_4 L) K_1 L^{j-2} (K_0 + K_3 K_4 L) [1 + + K_2 (K_0 + K_3 L_4 L)]^{j-3} + \ldots + K_2 L^{j-1} (K_0 + K_3 K_4 L) K_1 L (K_0 + + K_3 K_4 L) + K_1 L^j (K_0 + K_3 K_1 L) = K_1 L^j (K_0 + K_3 K_4 L) \{1 + K_2 (K_0 + + K_3 K_4 L) + \ldots + K_2 (K_0 + K_3 K_4 L) [1 + K_2 (K_0 + K_3 K_4 L)]^{j-3} + + K_2 (K_0 + K_3 K_4 L) [1 + K_2 (K_0 + K_3 K_4 L)]^{j-2}\} = K_1 L^j (K_0 + + K_3 K_4 L) [1 + K_2 (K_0 + K_3 K_4 L)] \{1 + \ldots + K_2 (K_0 + + K_3 K_4 L) [1 + K_2 (K_0 + K_3 K_4 L)]^{j-4} + K_2 (K_0 + K_3 K_4 L) [1 + + K_2 (K_0 + K_3 K_4 L)]^{j-3} = K_1 L^j (K_0 + K_3 K_4 L) [1 + K_2 (K_0 + K_3 K_4 L)]^{j-1}.$$

În definitiv se obține o evaluare de forma $| x_j (t) | \leqslant K_5 K_6^{j-1}$ care arată că pentru $|\mu|$ suficient de mic seria e convergentă. Cu aceasta demonstrația este încheiată.

Considerăm acum cazul sistemelor autonome de forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t),\ x(t-\tau),\ \mu]. \tag{60}$$

Presupunem că pentru $\mu = 0$ sistemul (60) admite o soluție periodică $p(t)$ cu perioadă $\omega_0 > \tau$. Fie

$$A(t) = f'_u[p(t),\ p(t-\tau),\ 0],\quad B(t) = f'_v\ [p(t),\ p(t-\tau),\ 0].$$

Sistemul

$$\frac{dz(t)}{dt} = A(t)z(t) + B(t)z(t-\tau) \tag{61}$$

este sistemul în variații corespunzătoare soluției $p(t)$; el are coeficienții periodici de perioadă $\omega_0$ și admite în orice caz soluția $z(t) = \frac{dp(t)}{dt}$. Într-adevăr, din

$$\frac{dp(t)}{dt} = f\ [p(t),\ p(t-\tau),\ 0]$$

rezultă

$$\frac{d}{dt}\frac{dp}{dt} = f'_u[p(t), p(t-\tau), 0]\frac{dp(t)}{dt} = f'_v[p(t), p(t-\tau), 0]\frac{dp(t-\tau)}{dt}.$$

LEMĂ. *Să presupunem că sistemul* (61) *nu admite soluții de forma* $z_1(t) + tz_0(t)$, $z_1(t)$ *fiind periodică de perioadă* $\omega_0$. *Atunci*

$$\int_0^{\omega} q(t)G(t)\,dt \neq 0,$$

*unde* $q(t)$ *este o soluție periodică a sistemului adjunct sistemului* (61), *iar*

$$G(t) = f[p(t),\ p(t-\tau),\ 0] + \tau B(t) f[p(t-\tau),\ p(t-2\tau),\ 0] =$$
$$= z_0(t) + \tau B(t) z_0(t-\tau).$$

*Reciproc, dacă*

$$\int_0^{\omega_0} q(t)\ G(t)\,dt \neq 0$$

*pentru o soluție periodică a sistemului adjunct, atunci sistemul* (61) *nu admite soluții de forma considerată.*

*Demonstrație.* Să presupunem că

$$\int_0^{\omega_0} q(t)G(t)\,dt = 0$$

pentru toate soluţiile periodice ale sistemului adjunct sistemului (61). Fie $z(t)$ o soluţie a sistemului (61) şi $z_1(t) = z(t) - t z_0(t)$. Avem

$$\frac{dz_1(t)}{dt} = \frac{dz(t)}{dt} - z_0(t) - t\frac{dz_0(t)}{dt} = A(t)z(t) + B(t)z(t-\tau) - z_0(t) -$$

$$- tA(t)z_0(t) - tB(t)z_0(t-\tau) = A(t)[z(t) - tz_0(t)] + B(t)[z(t-\tau) -$$

$$-(t-\tau)z_0(t-\tau)] - z_0(t) - \tau B(t)z_0(t-\tau) = A(t)z_1(t) +$$

$$+ B(t)z_1(t-\tau) - G(t).$$

Deoarece

$$\int_0^{\omega_0} q(t)G(t)\,dt = 0$$

pentru toate soluţiile periodice de perioadă $\omega_0$ ale sistemului adjunct sistemului (61), pe baza teoremei 4.19 există o soluţie $z_1(t)$ periodică de perioadă $\omega_0$, deci o soluţie $z(t)$ a sistemului (61) de forma $z_1(t) + tz_0(t)$ ceea ce am exclus. La fel se vede că dacă sistemul (61) admite soluţii de această formă, integrala trebuie să fie nulă pentru toate soluţiile periodice de perioadă $\omega_0$ ale sistemului adjunct sistemului (61). Lema este demonstrată.

TEOREMA 4.27. *Dacă sistemul* (61) *nu admite soluţii periodice de perioadă* $\omega_0$ *independente de* $z_0(t)$ *şi nici soluţii de forma* $z_1(t) + tz_0(t)$, *cu* $z_1(t)$ *periodică de perioadă* $\omega_0$, *atunci pentru* $|\mu|$ *suficient de mic sistemul* (60) *admite o soluţie periodică* $x(t, \mu)$ *de perioadă* $\omega(\mu)$ *astfel ca*

$$\lim_{\mu\to 0} \omega(\mu) = \omega_0, \quad \lim_{\mu\to 0} x(t, \mu) = p(t).$$

*Demonstraţie.* Fie $\omega(\mu) = \omega_0(1+\mu\alpha(\mu))$, $t = s[1 + \mu\alpha(\mu)]$, $y(s, \mu) = x \quad x[s(1+\mu\alpha), \mu]$. Avem

$$\frac{d}{ds}y(s, \mu) = \frac{d}{dt}x[s(1+\mu\alpha), \mu](1+\mu\alpha) =$$

$$= (1+\mu\alpha)f\{x[s(1+\mu\alpha), \mu], x[s(1+\mu\alpha)-\tau, \mu], \mu\} =$$

$$= (1+\mu\alpha)f[y(s, \mu), y(s-\theta(\mu), \mu), \mu], \ \theta(\mu) = \frac{\tau}{1+\mu\alpha(\mu)}.$$

Dacă $x$ e periodică de perioada $\omega(\mu)$, $y$ va fi periodică de perioadă $\omega_0$ şi reciproc. Avem

$$\frac{d}{ds}y(s, \mu) = f[y(s, \mu), y(s-\theta, \mu), \mu] + \mu\alpha f[y(s, \mu), y(s-\theta, \mu), \mu]. \tag{62}$$

Punem $y(s, \mu) = p(s) + \mu z(s, \mu)$. Rezultă

$$\frac{d}{ds}p(s) + \mu\frac{d}{ds}z(s, \mu) = f[p(s) + \mu z(s, \mu), p(s-\theta) + \mu z(s-\theta, \mu), \mu] +$$

$$+ \mu\alpha f[p(s) + \mu z(s, \mu), p(s-\theta) + \mu z(s-\theta, \mu), \mu] =$$

$$= f[p(s), p(s-\theta), 0] + \mu f'_u[p(s), p(s-\theta), 0] z(s, \mu) +$$

$$+ \mu f'_v[p(s), p(s-\theta), 0] z(s-\theta, \mu) + \mu f'_\mu[p(s), p(s-\theta), 0] +$$

$$+ \mu\alpha f[p(s), p(s-\theta), 0] + \mu O(\mu) = f[p(s), p(s-\tau), 0] +$$

$$+ \mu f'_u[p(s), p(s-\tau), 0] z(s, \mu) + \mu f'_v[p(s), p(s-\tau), 0] z(s-\theta, \mu) +$$

$$+ \mu f'_\mu[p(s), p(s-\tau), 0] + \mu\alpha f[p(s), p(s-\tau), 0] +$$

$$+ f[p(s), p(s-\theta), 0] - f[p(s), p(s-\tau), 0] + \mu O(\mu).$$

Avem

$$f[p(s), p(s-\theta), 0] - f[p(s), p(s-\tau), 0] =$$

$$= f'_v[p(s), p(s-\tau), 0][p(s-\theta) - p(s-\tau)] + O(\mu^2) =$$

$$= f'_v[p(s), p(s-\tau), 0]\dot{p}(s-\tau)(\theta-\tau) + O(\mu^2) =$$

$$= \frac{\mu\alpha\tau}{1+\mu\alpha} f'_v[p(s), p(s-\tau), 0] f[p(s-\tau), p(s-2\tau), 0] + O(\mu^2).$$

Rezultă

$$\frac{dz(s,\mu)}{ds} = A(s) z(s, \mu) + B(s) z(s-\theta, \mu) + F(s) + \alpha(\mu) G(s) +$$

$$+ \mu H(s, z(s, \mu), z(s-\theta, \mu), \mu), \tag{63}$$

unde am notat

$$F(s) = f'_\mu[p(s), p(s-\tau), 0].$$

Considerăm sistemul

$$\dot{z}(s) = A(s) z(s) + B(s) z(s-\tau) + F(s) + \alpha_0 G(s). \tag{64}$$

Condiția ca acest sistem să aibă o soluție periodică de perioadă $\omega_0$ este

$$\int_0^{\omega_0} q(s)\,[F(s) + \alpha_0 G(s)]\,ds = 0.$$

Deoarece conform ipotezei din enunț, pe baza lemei rezultă

$$\int_0^{\omega_0} q(s) G(s)\,ds \neq 0$$

această condiție permite determinarea unică a lui $\alpha_0$. Fie $\alpha_0$, determinat astfel și $z_0(s)$ soluția periodică a sistemului (64) care admite evaluarea

$$|z_0(s)| \leqslant K(\sup|F| + |\alpha_0|\sup|G|).$$

Formăm sistemul

$$\dot{z}(s) = A(s)z(s) + B(s)z(s-\tau) + F(s) + \alpha_1(\mu)G(s) +$$
$$+ B(s)[z_0(s-\theta_0) - z_0(s-\tau)] + \mu H_0[s, z_0(s), z_0(s-\theta_0), \mu], \quad (65)$$

unde $\theta_0 = \dfrac{\tau}{1+\mu\alpha_0}$, iar $H_0$ este ceea ce devine $H$ cînd $\alpha$ se înlocuiește cu $\alpha_0$. Sistemul (65) admite soluție periodică de perioadă $\omega_0$ dacă și numai dacă

$$\int_0^{\omega_0} q(s)\{F(s) + \alpha_1 G(s) + B(s)[z_0(s-\theta_0) - z_0(s-\tau)] +$$
$$+ \mu H_0[s, z_0(s), z_0(s-\theta_0), \mu]\} ds = 0.$$

Deoarece

$$\int_0^{\omega_0} q(s)G(s)\,ds \neq 0,$$

această ecuație permite determinarea unică a lui $\alpha_1(\mu)$ astfel ca $\lim\limits_{\mu\to 0} \alpha_1(\mu) = \alpha_0$. Presupunem $\alpha_1(\mu)$ astfel determinat și fie $z_1(s, \mu)$ soluția periodică corespunzătoare aleasă în mod unic la fel ca mai sus. Formăm sistemul

$$\dot{z}(s) = A(s)z(s) + B(s)z(s-\tau) + F(s) + \alpha_2(\mu)G(s) +$$
$$+ B(s)[z_1(s-\theta_1, \mu) - z_1(s-\tau, \mu)] + \mu H_1[s, z_1(s, \mu), z_1(s-\theta_1, \mu), \mu],$$

unde $\theta_1 = \dfrac{\tau}{1+\mu\alpha_1}$, iar $H_1$ este ceea ce devine $H$ cînd $\alpha$ se înlocuiește cu $\alpha_1$. Ca mai sus, din condiția ca acest sistem să admită o soluție periodică, de perioadă $\omega_0$ se determină $\alpha_2(\mu)$ și apoi se alege soluția periodică $z_2(s, \mu)$. În general, se consideră sistemul

$$\dot{z}(s) = A(s)z(s) + B(s)z(s-\tau) + F(s) + \alpha_n(\mu)G(s) +$$
$$+ B(s)[z_{n-1}(s-\theta_{n-1}, \mu) - z_{n-1}(s-\tau, \mu)] +$$
$$+ \mu H_{n-1}[s, z_{n-1}(s, \mu), z_{n-1}(s-\theta_{n-1}, \mu), \mu],$$

unde $\theta_{n-1} = \dfrac{\tau}{1+\mu\alpha_{n-1}}$, iar $H_{n-1}$ este ceea ce devine $H$ cînd $\alpha$ este înlocuit cu $\alpha_{n-1}$. Condiția ca acest sistem să admită o soluție periodică permite determinarea lui $\alpha_n(\mu)$ și apoi se alege soluția periodică $z_n(s, \mu)$. Dacă demonstrăm că șirurile $\alpha_n(\mu)$ și $z_n(s, \mu)$ converg uniform pentru $|\mu| \leqslant \mu_0$ și dacă

$$\alpha(\mu) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n(\mu), \quad z(s, \mu) = \lim_{n\to\infty} z_n(s, \mu), \quad \theta(\mu) = \lim_{n\to\infty} \theta_n(\mu),$$

atunci $z(s, \mu)$ verifică sistemul (63). Calculele efectuate arată că $y(s, \mu) = p(s) + \mu z(s, \mu)$ este o soluție periodică de perioadă $\omega_0$ a sistemului (62)

şi $x(t, \mu)$ obţinută din $y(s, \mu)$ punînd $s = \dfrac{t}{1 + \mu\alpha}$ va fi o soluţie periodică de perioadă $\omega(\mu) = \omega_0(1 + \mu\alpha)$ a sistemului (60) care pentru $\mu \to 0$ tinde către $p(t)$. În acest fel, pentru ca teorema să fie demonstrată, rămîne să demonstrăm convergenţa aproximaţiilor succesive. Avem

$$\frac{d}{ds}[z_{n+1}(s, \mu) - z_n(s, \mu)] = A(s)[z_{n+1}(s, \mu) - z_n(s, \mu)] +$$
$$+ B(s)[z_{n+1}(s - \tau, \mu) - z_n(s - \tau, \mu)] + [\alpha_{n+1}(\mu) - \alpha_n(\mu)]G(s) +$$
$$+ B(s)[z_n(s - \theta_n, \mu) - z_{n-1}(s - \theta_{n-1}, \mu)] + B(s)[z_{n-1}(s - \tau, \mu) -$$
$$- z_n(s - \tau, \mu)] + \mu H_n - \mu H_{n-1}.$$

Fie

$$b_n = \sup |z_{n+1}(s, \mu) - z_n(s, \mu)|, \quad a_n = \sup |\alpha_{n+1}(\mu) - \alpha_n(\mu)|.$$

Atunci rezultă

$$b_n \leqslant M_0 a_n + |\mu| M_1 b_{n-1} + |\mu| M_2 b_{n-1} + |\mu| M_3 a_{n-1}$$

deci

$$b_n \leqslant M_0 a_n + |\mu| M(b_{n-1} + a_{n-1}).$$

Mai departe, din

$$\int_0^{\omega_0} q(s)\{F(s) + \alpha_{n+1}G(s) + B(s)[z_n(s - \theta_n, \mu) - z_n(s - \tau, \mu)] +$$
$$+ \mu H_n\}\, ds = 0$$

$$\int_0^{\omega_0} q(s)\{F(s) + \alpha_n G(s) + B(s)[z_{n-1}(s - \theta_{n-1}, \mu) - z_{n-1}(s - \tau, \mu)] +$$
$$+ \mu H_{n-1}\}\, ds = 0$$

rezultă

$$(\alpha_{n+1} - \alpha_n)\int_0^{\omega_0} q(s)G(s)\, ds = \int_0^{\omega_0} q(s)B(s)\,[z_n(s - \theta_n, \mu) - z_{n-1}(s -$$
$$- \theta_{n-1}, \mu) - z_n(s - \tau, \mu) + z_{n-1}(s - \tau, \mu)]\, ds + \mu\int_0^{\omega_0} q(s)[H_n - H_{n-1}]\, ds.$$

De aici se capătă

$$a_n \leqslant M_4 |\mu| b_{n-1} + M_5 |\mu| b_{n-1} + M_6 |\mu| a_{n-1}$$

deci

$$a_n \leqslant |\mu| M(b_{n-1} + a_{n-1}).$$

Rezultă, în definitiv,

$$b_n + a_n \leqslant |\mu| M'(b_{n-1} + a_{n-1}),$$

ceea ce arată că dacă $|\mu|$ e suficient de mic, convergenţa uniformă este asigurată.

Evaluările făcute au presupus evaluări prealabile ale aproximațiilor succesive care să asigure că aceste aproximații nu părăsesc un anumit domeniu, relativ la care se calculează constantele $M$ care apar în aceste evaluări. Asemenea evaluări prealabile se obțin imediat prin inducție. Teorema este demonstrată.

Continuînd studiul sistemelor de forma (60) vom presupune că pentru $\mu = 0$, sistemul admite o familie de soluții periodice $p(t, c_1, \ldots, c_k)$ de perioadă $\omega_0(c_1, c_2, \ldots, c_k) > \tau$. Vom face ipoteza că $\omega_0(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ admite derivate parțiale continue. Acolo unde nu există pericol de confuzii vom scrie $c$ în loc de $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$. Fie

$$A(t, c) = f'_u[p(t, c), p(t-\tau, c), 0], \quad B(t, c) = f'_v[p(t, c), p(t-\tau, c), 0].$$

Considerăm sistemul

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = A(t, c)\, z(t) + B(t, c)\, z(t-\tau). \tag{66}$$

Avem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p(t, c) = f[p(t, c), p(t-\tau, c), 0]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p(t, c) = f'_u[p(t, c), p(t-\tau, c), 0]\frac{\mathrm{d}p(t, c)}{\mathrm{d}t} +$$

$$+ f'_v[p(t, c), p(t-\tau, c), 0]\frac{\mathrm{d}p(t-\tau, c)}{\mathrm{d}t} = A(t, c)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p(t, c) +$$

$$+ B(t, c)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p(t-\tau, c),$$

deci $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p(t, c)$ este o soluție a sistemului (66) și această soluție este periodică de perioadă $\omega_0(c)$.

La fel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial p}{\partial c_i} = \frac{\partial}{\partial c_i}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial c_i} f[p(t, c), p(t-\tau, c), 0] =$$

$$= A(t, c)\frac{\partial p(t, c)}{\partial c_i} + B(t, c)\frac{\partial p(t-\tau, c)}{\partial c_i}$$

și deci $\frac{\partial p}{\partial c_i}$ sînt soluții ale sistemului (66). Dacă $\omega_0(c)$ nu e constantă, aceste soluții nu sînt periodice. În cele ce urmează vom considera tocmai cazul cînd $\omega_0(c)$ *nu e constantă*.

Fie $c^*$ o valoare fixată a lui $c$. Considerăm funcția $p\left[\frac{\omega_0(c)}{\omega_0(c^*)} t, c\right]$ care este periodică de perioadă $\omega_0(c^*)$. Derivatele ei în raport cu $c_i$ în punc-

tul $c^*$ vor fi funcții periodice de perioadă $\omega_0(c^*)$. Vom nota aceste derivate cu $\varphi_i\,(t, c^*)$.

Avem

$$\varphi_i(t, c^*) = \frac{\partial p\left(\frac{\omega_0(c^*)}{\omega_0(c^*)}\, t, c^*\right)}{\partial c_i} + \frac{1}{\omega(c^*)} \frac{\mathrm{d}p\left(\frac{\omega_0(c^*)}{\omega_0(c^*)}\, t, c^*\right)}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \omega_0(c^*)}{\partial c_i}\, t$$

deci

$$\frac{\partial p(t, c^*)}{\partial c_i} = \varphi_i(t, c^*) - \frac{t}{\omega_0(c^*)} \frac{\partial \omega_0(c^*)}{\partial c_i} \frac{\mathrm{d}p(t, c^*)}{\mathrm{d}t}$$

Considerăm funcția

$$z(t) = t\,\frac{\mathrm{d}p(t, c^*)}{\mathrm{d}t} = tf\,[p(t, c^*),\ p(t-\tau, c^*),\ 0].$$

Avem

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = f\,[p(t, c),\ p(t-\tau, c^*),\ 0] + tA(t, c^*)\frac{\mathrm{d}p(t, c^*)}{\mathrm{d}t} + tB(t, c^*)\frac{\mathrm{d}p(t-\tau, c^*)}{\mathrm{d}t}$$

deci

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = A(t, c^*)\,z(t) + B(t, c^*)\,z(t-\tau) + f\,[p(t, c^*),\ p(t-\tau, c^*),\ 0] +$$
$$+ \tau B(t, c^*) f\,[p(t-\tau, c^*),\ p(t-2\tau, c^*),\ 0].$$

Notînd

$$G(t, c^*) = f\,[p(t, c^*),\ p(t-\tau, c^*),\ 0] + \tau B(t, c^*) f\,[p(t-\tau, c^*),\ p(t-2\tau, c^*),\ 0]$$

rezultă

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = A(t, c^*)\,z(t) + B(t, c^*)\,z(t-\tau) + G(t, c^*). \tag{67}$$

Presupunem că pentru indicele $i$, $\dfrac{\partial \omega_0(c^*)}{\partial c_i} \neq 0$. Atunci

$$\frac{\omega_0(c^*)}{\frac{\partial \omega_0(c^*)}{\partial c_i}}\, \varphi_i(t, c^*) = z(t) - \frac{\partial p(t, c^*)}{\partial c_i} \frac{\omega_0(c^*)}{\frac{\partial \omega_0(c^*)}{\partial c_i}}.$$

Dar $\dfrac{\partial p(t, c^*)}{\partial c_i} \dfrac{\omega_0(c^*)}{\frac{\partial \omega_0(c^*)}{\partial c_i}}$ este soluție a sistemului (66) cu $c = c^*$, iar $z$ verifică sistemul (67); rezultă că $\dfrac{\omega_0(c^*)}{\frac{\partial \omega_0(c^*)}{\partial c_i}}\, \varphi_i(t, c^*)$ verifică sistemul (67). Cum $\varphi_i(t, c^*)$ este periodică de perioadă $\omega_0(c^*)$, rezultă că sistemul (67) admite soluții periodice de perioadă $\omega_0(c^*)$.

Pe de altă parte,

$$\frac{\partial p(t,c)}{\partial c_1} = \varphi_1(t,c) - \frac{t}{\omega_0(c)}\frac{\partial \omega_0(c)}{\partial c_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p(t,c)$$

$$\frac{\partial p(t,c)}{\partial c_j} = \varphi_j(t,c) - \frac{t}{\omega_0(c)}\frac{\partial \omega_0(c)}{\partial c_j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p(t,c).$$

Rezultă

$$\frac{\partial \omega_0(c)}{\partial c_j}\frac{\partial p(t,c)}{\partial c_1} - \frac{\partial \omega_0(c)}{\partial c_1}\frac{\partial p(t,c)}{\partial c_j} = \frac{\partial \omega_0(c)}{\partial c_j}\varphi_1(t,c) - \frac{\partial \omega_0(c)}{\partial c_1}\varphi_j(t,c)$$

şi deoarece $\varphi_j(t, c)$ sînt periodice de perioadă $\omega_0(c)$, funcția din primul membru este periodică de perioadă $\omega_0(c)$. Rezultă că pentru toți $c$ sistemul (66) admite cel puțin soluțiile periodice de perioadă $\omega_0(c)$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p(t,c), \quad \frac{\partial \omega_0}{\partial c_j}\frac{\partial p(t,c)}{\partial c_1} - \frac{\partial \omega_0}{\partial c_1}\frac{\partial p(t,c)}{\partial c_j}, \quad (j = 2,3,\ldots, k).$$

Sistemul adjunct sistemului (66) va admite şi el $k$ soluții periodice de perioadă $\omega_0(c)$ pe care le vom nota cu $\psi_j(t, c)$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Deoarece sistemul (67) admite soluții periodice de perioadă $\omega_0(c^*)$, rezultă, pe baza teoremei 4.18, că

$$\int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*)\, G(s, c^*)\,\mathrm{d}s = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

TEOREMA 4.28. *Dacă pentru* $|\mu| < \mu_0$ *sistemul* (50) *admite o soluție periodică* $x(t, c^*, \mu)$ *de perioadă* $\omega(c^*, \mu)$ *astfel ca*

$$\lim_{\mu\to 0} x(t, c^*, \mu) = p(t, c^*), \quad \lim_{\mu\to 0} \omega(c^*, \mu) = \omega_0(c^*),$$

*atunci*

$$P_j(c^*) = 0,$$

*unde*

$$P_j(c) \equiv \int_0^{\omega_0(c)} \psi_j(t,c)\, f'_\mu[p(t,c),\, p(t-\tau, c),\, 0]\,\mathrm{d}t, \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

*Demonstrație*. Fie $\omega(c^*, \mu) = \omega_0(c^*)\,[1 + \mu\alpha(c^*), \mu)]$. Facem schimbarea de variabilă $t = s\,[1 + \mu\alpha(c^*, \mu)]$. Notăm

$$y(s, c^*, \mu) = x\,[s(1+\mu\alpha),\, c^*,\, \mu].$$

Avem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}y(s, c^*, \mu) = (1+\mu\alpha) f\,[y(s, c^*, \mu),\, y(s - \theta(c^*, \mu), c^*, \mu)],$$

unde

$$\theta(c^*, \mu) = \frac{\tau}{1 + \mu\alpha(c^*, \mu)}.$$

Punem

$$y(s, c^*, \mu) = p(s, c^*) + \mu z(s, c^*, \mu).$$

Rezultă

$$\frac{dp(s, c^*)}{ds} + \mu \frac{d}{ds} z(s, c^*, \mu) = (1+\mu\alpha) f[p(s, c^*) + \mu z(s, c^*, \mu), p(s-\theta, c^*) +$$

$$+ \mu z(s-\theta, c^*, \mu), \mu] = (1+\mu\alpha) f[p(s, c^*), p(s-\tau, c^*), 0] +$$

$$+ (1+\mu\alpha)\{f[p(s, c^*) + \mu z(s, c^*, \mu), p(s-\theta, c^*) + \mu z(s-\theta, c^*, \mu), \mu] -$$

$$- f[p(s, c^*), p(s-\tau, c^*), 0]\} = (1+\mu\alpha) f[p(s, c^*), p(s-\tau, c^*), 0] +$$

$$+ (1+\mu\alpha)\{A(s, c^*)\mu z(s, c^*, \mu) + B(s, c^*)[\mu z(s-\theta, c^*, \mu) + p(s-\theta, c^*) -$$

$$- p(s-\tau, c^*)] + \mu f'_\mu[p(s, c^*), p(s-\tau, c^*), 0] + O(\mu^2)\} =$$

$$= (1+\mu\alpha) f[p(s, c^*), p(s-\tau, c^*), 0] + \mu(1+\mu\alpha) A(s, c^*) z(s, c^*, \mu) +$$

$$+ \mu(1+\mu\alpha) B(s, c^*) z(s-\theta, c^*, \mu) + (1+\mu\alpha)\frac{\mu\alpha\tau}{1+\mu\alpha} B(s, c^*) \frac{d}{dt} p(s -$$

$$- \tau, c^*) + \mu f'_\mu[p(s, c^*), p(s-\tau, c^*), 0] + O(\mu^2).$$

De aici se capătă

$$\frac{d}{ds} z(s, c^*, \mu) = A(s, c^*) z(s, c^*, \mu) + B(s, c^*) z(s-\theta, c^*, \mu) +$$

$$+ f'_\mu[p(s, c^*), p(s-\tau, c^*), 0] + \alpha f[p(s, c^*), p(s-\tau, c^*), 0] +$$

$$+ \alpha\tau B(s, c^*) f[p(s-\tau, c^*), p(s-2\tau, c^*), 0] + O(\mu).$$

Notînd

$$F(s, c^*) = f'_\mu[p(s, c^*), p(s-\tau, c^*), 0]$$

avem

$$\frac{d}{ds} z(s, c^*, \mu) = A(s, c^*) z(s, c^*, \mu) + B(s, c^*) z(s-\tau, c^*, \mu) + F(s, c^*) +$$

$$+ \alpha G(s, c^*) + \mu H[s, z(s, c^*, \mu), z(s-\theta, c^*, \mu), \mu]. \tag{68}$$

Dacă $x(t, \mu)$ este de perioadă $\omega(c^*, \mu)$, atunci $y(s, c^*, \mu)$ este periodică de perioadă $\omega_0(c^*)$, deci $z(s, c^*, \mu)$ este periodică de perioadă $\omega_0(c^*)$. Deoarece sistemul (68) admite soluții periodice de perioadă $\omega_0(c^*)$, pe baza teoremei 4.19 rezultă

$$\int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*)\{F(s, c^*) + \alpha G(s, c^*) + \mu H\}\, ds = 0.$$

Am văzut însă că

$$\int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*) G(s, c^*)\, ds = 0,$$

deci

$$\int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*) \{F(s, c^*) + \mu H\} \, ds = 0.$$

Cum această relaţie este verificată pentru toţi $\mu$ cu $|\mu| < \mu_0$, rezultă

$$\int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*) F(s, c^*) \, ds = 0,$$

deci $P_j(c^*) = 0$ şi teorema este demonstrată.

Pentru obţinerea unor condiţii suficiente de existenţă a soluţiilor periodice se poate folosi o metodă dată de S. N. Simanov. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_k$ soluţiile periodice de perioadă $\omega_0(c^*)$ ale sistemului (66) pentru $c = c^*$. *Vom presupune că sistemul* (66) *nu admite soluţii periodice de perioadă* $\omega_0(c^*)$ *independente de acestea şi nici soluţii de forma* $z_0(t) + t \sum_{j=1}^{k} \gamma_j z_j(t, c^*)$, *unde* $z_0$ *e periodică de perioadă* $\omega_0(c^*)$. Această ultimă ipoteză este echivalentă cu faptul că

$$\det \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*) \, [z_i(s, c^*) + \tau B(s, c^*) z_i(s - \tau, c^*)] \, ds \neq 0.$$

Într-adevăr, funcţia $z(t) = t \sum_j \gamma_j \varphi_j$ verifică sistemul

$$\frac{dz(t)}{dt} = A(t, c^*) z(t) + B(t, c^*) z(t - \tau) + $$
$$+ \sum_j \gamma_j [z_j(t, c^*) + \tau B(t, c^*) z_j(t - \tau, c^*)]. \qquad (69)$$

Dacă determinantul e nul, se pot alege $\gamma_i$ astfel ca

$$\sum_i \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*) \, [z_i(s, c^*) + \tau B(s, c^*) z_i(s - \tau, c^*)] \, ds \, \gamma_i = 0$$

deci sistemul (69) admite o soluţie $z_0(t)$ periodică de perioadă $\omega_0(c^*)$. Atunci $z_0(t) - t \sum_j \gamma_j \varphi_j$ ar fi soluţie a sistemului (66). Reciproc, dacă există o soluţie de această formă a sistemului (66), funcţia $z_0(t)$ verifică sistemul (69); dacă sistemul (69) are soluţie periodică, există $\gamma_j$ pentru care sistemul de ecuaţii liniare are soluţii, deci determinantul e nul.

Să formăm acum sistemul ajutător

$$\frac{dz(s)}{ds} = A(s, c^*) z(s) + B(s, c^*) z(s - \tau) + B(s, c^*) [z(s - \theta) - z(s - \tau)] + $$
$$+ F(s, c^*) + \alpha(c^*, \mu) G(s, c^*) + \mu H[s, z(s), z(s - \theta), \mu] + \qquad (70)$$
$$+ \sum_{j=1}^{k} W_j [z_j(s, c^*) + \tau B(s, c^*) z_j(s - \tau, c^*)].$$

Demonstrăm că se poate construi un procedeu de aproximații succesive care să permită determinarea simultană a constantelor $W_j$ și a unei soluții periodice $z(s, M_1, \ldots, M_k, \alpha, \mu)$ a sistemului (70), corespunzătoare unei soluții $\sum M_j z_j$ a sistemului (66). Dacă se pot alege $M_j(\mu)$ și $\alpha_j(\mu)$ astfel încît pentru soluția corespunzătoare să avem $W_j = 0, j = 1, \ldots, k$, această soluție verifică sistemul (68) și conduce la o soluție periodică de perioadă $\omega(c^*, \mu)$ a sistemului (60). Alegem

$$z^0 = M_1 z_1 + \ldots + M_k z_k, \quad W_j^0 = 0$$

și considerăm sistemul

$$\frac{dz(s)}{ds} = A(s, c^*) z(s) + B(s, c^*) z(s-\tau) + B(s, c^*) [z^0(s-\theta) - z^0(s-\tau)] +$$

$$+ F(s, c^*) + \alpha(c^*, \mu) G(s, c^*) + \mu H[s, z^0(s), z^0(s-\theta), \mu] + \sum_j W_j \chi_j(s, c^*),$$

unde am notat

$$\chi_j(s, c^*) = z_j(s, c^*) + \tau B(s, c^*) z_j(s-\tau, c^*).$$

Acest sistem admite soluții periodice de perioadă $\omega_0(c^*)$ dacă și numai dacă

$$\int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*) \{B(s, c^*) [z^0(s-\theta) - z^0(s-\tau)] +$$

$$+ F(s, c^*) + \mu H + \sum W_i \chi_i\} ds = 0.$$

Deoarece

$$\det \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j \chi_i \, ds \neq 0$$

aceste condiții permit determinarea unică a constantelor $W_i^1$ și apoi a soluției periodice

$$z^1(s) = M_1 z_1 + \ldots + M_k z_k + z^{1*}(s).$$

Procedeul continuă; se formează sistemul

$$\frac{dz(s)}{ds} = A(s, c^*) z(s) + B(s, c^*) z(s-\tau) + B(s, c^*) [z^{n-1}(s-\theta) -$$

$$- z^{n-1}(s-\tau)] + F(s, c^*) + \alpha(c^*, \mu) G(s, c^*) +$$

$$+ \mu H[s, z^{n-1}(s), z^{n-1}(s-\theta), \mu] + \sum W_i \chi_i.$$

Se determină $W_i^n$ astfel ca acest sistem să admită soluții periodice de perioadă $\omega_0(c^*)$ și se alege soluția periodică

$$z^n(s) = M_1 z_1 + \ldots + M_k z_k + z^{n*}(s),$$

soluția $z^{n*}(s)$ fiind determinată astfel încît

$$|z^{n*}(s)| < LK,$$

unde $L$ depinde de sistemul omogen (66), iar $K$ este marginea superioară a termenului liber. Constantele $W_i^n$ depind de $\mu$ şi se vede că $W_i^n(0)$ sînt date de sistemul

$$\int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*) F(s, c^*) \,\mathrm{d}s + \sum_i W_i \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j \chi_i \,\mathrm{d}s = 0.$$

Dacă presupunem îndeplinită condiţia $P_j(c^*) = 0$, $j = 1, \ldots, k$, rezultă $W_i^n(0) = 0$ pentru toţi $n$. Vom scrie mai departe $W_i^n(\mu) = \mu \overline{W}_i^n(\mu)$ şi $z^{n*}(s) = z^*(s) + z^{n**}(s)$, unde $z^*(s)$ este soluţia periodică a sistemului

$$\frac{\mathrm{d}z(s)}{\mathrm{d}s} = A(s, c^*) z(s) + B(s, c^*) z(s-\tau) + F(s, c^*) + \alpha(c^*, \mu) G(s, c^*) \tag{71}$$

aleasă astfel ca

$$| z^*(s) | \leqslant L \sup \{ | F(s, c^*) | + | \alpha(c^*, \mu) | \, | G(s, c^*) | \}.$$

Avem

$$z^n(s) = \sum_j M_j z_j + z^*(s) + \mu z^{n**}(s).$$

Funcţia $\mu z^{n**}(s)$ verifică sistemul

$$\frac{\mathrm{d}z(s)}{\mathrm{d}s} = A(s, c^*) z(s) + B(s, c^*) z(s-\tau) +$$
$$+ B(s, c^*) [z_{n-1}(s-\theta) - z_{n-1}(s-\tau)] + \mu H_{n-1} + \mu \sum \overline{W}_j^n \chi_j,$$

unde am notat $H_{n-1}$ ceea ce devine $H$ cînd $z$ se înlocuieşte cu $z^{n-1}$. Fie $u_n = z^{(n+1)**}(s) - z^{n**}(s)$. Avem

$$\mu \frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}s} = A(s, c^*) \mu u_n(s) + B(s, c^*) \mu u_n(s-\tau) +$$
$$+ B(s, c^*) [z^n(s-\theta) - z^{n-1}(s-\theta)] - B(s, c^*) [z^n(s-\tau) - z^{n-1}(s-\tau)] +$$
$$+ \mu (H_n - H_{n-1}) + \mu \sum_j (\overline{W}_j^{(n+1)} - W_j^{(n)}) \chi_j.$$

Dar

$$z^n(s-\theta) - z^{n-1}(s-\theta) = \mu z^{n**}(s-\theta) - \mu z^{n-1**}(s-\theta) = \mu u_{n-1}(s-\theta).$$

Rezultă

$$\mu \frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}s} = \mu A(s, c^*) u_n(s) + \mu B(s, c^*) u_n(s-\tau) + \mu B(s, c^*) u_{n-1}(s-\theta) -$$
$$- \mu B(s, c^*) u_{n-1}(s-\tau) + \mu (H_n - H_{n-1}) + \mu \sum_j (\overline{W}_j^{(n+1)} - \overline{W}_j^n) \chi_j$$

deci

$$\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}s} = A(s, c^*) u_n(s) + B(s, c^*) u_n(s-\tau) +$$
$$+ B(s, c^*) [u_{n-1}(s-\theta) - u_{n-1}(s-\tau)] + H_n - H_{n-1} + \sum_j [\overline{W}_j^{n+1} - \overline{W}_j^n] \chi_j.$$

Fie $b_n = \sup |u_n(s)|$. Avem

$$H_n = H[s, z^n(s), z^{n-1}(s-\theta), \mu],\ H_{n-1} = H[s, z^{n-1}(s), z^{n-1}(s-\theta), \mu]$$

deci

$$|H_n - H_{n-1}| \leqslant L_1 |z^n(s) - z^{n-1}(s)| + L_2 |z^n(s-\theta) - z^{n-1}(s-\theta)| =$$
$$= |\mu| L_1 |u_{n-1}(s)| + |\mu| L_2 |u_{n-1}(s-\theta) \leqslant |\mu| L b_{n-1}.$$

Mai departe

$$u_{n-1}(s-\theta) - u_{n-1}(s-\tau) = \int_{s-\tau}^{s-\theta} \dot{u}_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_{s-\tau}^{s-\theta} \{A(t, c^*)\, u_{n-1}(t) + B(t, c^*)\, u_{n-1}(t-\tau) +$$
$$+ B(t, c^*)\,[u_{n-2}(t-\theta) - u_{n-2}(t-\tau)] + (H_{n-1} - H_{n-2}) + \sum_j (\overline{W}_j^n - \overline{W}_j^{n-1})\,\chi_j\}\,\mathrm{d}t$$

deci

$$|u_{n-1}(s-\theta) - u_{n-1}(s-\tau)| \leqslant |\mu|\,|\alpha\theta|\,(L_3 b_{n-1} + L_4 b_{n-2} +$$
$$+ |\mu| L_5 b_{n-2} + |\mu| L_6 \beta_{n-1}),$$

unde am notat

$$|\mu|\,\beta_n = \sup_j |\overline{W}_j^{n+1} - \overline{W}_j^n|.$$

Rezultă

$$|u_n| \leqslant |\mu| L_7 (b_{n-1} + b_{n-2} + |\mu|\,\beta_{n-1} + \beta_n),$$

deci

$$b_n \leqslant |\mu| L_7 (b_{n-1} + b_{n-2} + |\mu|\,\beta_{n-1} + \beta_n).$$

Constantele $\mu \overline{W}_i^n$ sînt date de sistemul

$$\int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*)\,\{B(s, c^*)\,[z^{n-1}(s-\theta) - z^{n-1}(s-\tau)] + H_{n-1}\}\,\mathrm{d}s +$$
$$+ \mu \sum_i \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j\, \chi_i\, \mathrm{d}s\, \overline{W}_i^n = 0.$$

Notînd $\overline{W}_i^{n+1} - \overline{W}_i^n = v_i^n$ rezultă

$$\mu \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j\, \chi_i\, \mathrm{d}s\, v_i^n + \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*)\, B(s, c^*)\,[z^n(s-\theta) - z^{n-1}(s-\theta) -$$
$$- z^n(s-\tau) + z^{n-1}(s-\tau)]\,\mathrm{d}s + \mu \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*)\,[H_n - H_{n-1}]\,\mathrm{d}s = 0$$

deci

$$\sum_i \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j\, \chi_i\, \mathrm{d}s\, v_i^n + \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_i(s, c^*)\, B(s, c^*)\,[u_{n-1}(s-\theta) - u_{n-1}(s-\tau)]\,\mathrm{d}s +$$
$$+ \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_i(s, c^*)\,[H_n - H_{n-1}]\,\mathrm{d}s = 0.$$

De aici rezultă

$$|\mu|\beta_n \leqslant L_8[|\mu| L_9(b_{n-1}+b_{n-2}+|\mu|\beta_{n-1})+|\mu| L_{10} b_{n-1}]$$

deci

$$\beta_n \leqslant L_{11}(b_{n-1}+b_{n-2})+L_{12}|\mu|\beta_{n-1}.$$

Evaluările obținute pentru $b_n$ și $\beta_n$ permit să se deducă pentru $|\mu|$ suficient de mic convergența uniformă a aproximațiilor succesive. Trecînd la limită în relațiile care dau pe $\overline{W}_i^n$ rezultă că $\overline{W}_i$ verifică relațiile

$$\int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*)\left\{B(s, c^*)\frac{1}{\mu}[z(s-\theta)-z(s-\tau)]+H\right\}ds+$$
$$+\sum_i \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j \chi_i \, ds \, \overline{W}_i = 0.$$

Condiția ca $\overline{W}_i$ să fie nuli se scrie

$$\int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s,c^*)\left\{B(s, c^*)\frac{1}{\mu}[z(s-\theta)-z(s-\tau)]+H\right\}ds=0.$$

Dar

$$z(s-\theta)-z(s-\tau)=\sum_i M_i[z_i(s-\theta, c^*)-z_i(s-\tau, c^*)]+$$
$$+z^*(s-\theta)-z^*(s-\tau)+\mu[z^{**}(s-\theta)-z^{**}(s-\tau)].$$

Rezultă condiția

$$\int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c)\frac{1}{\mu}B(s, c^*)\{\sum_i M_i[z_i(s-\theta, c^*)-z_i(s-\tau, c^*)]+z^*(s-\theta)-$$
$$-z^*(s-\tau)\}\,ds+\int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*)\,B(s, c^*)\,[z^{**}(s-\theta)-z^{**}(s-\tau)+H]\,ds=0. \tag{72}$$

Pentru $\mu \to 0$ această condiție devine

$$\int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*)\,\alpha(c^*, 0)\,\tau\,B(s, c^*)\,[\sum_i M_i \dot{z}_i(s-\tau, c^*)+\dot{z}^*(s-\tau)]\,ds+$$
$$+\int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*)\,B(s, c^*)\,H\,ds=0,$$

unde

$$H=H[s, \sum_i M_i z_i(s, c^*)+z^*(s), \sum_i M_i z_i(s-\tau, c^*)+z^*(s-\tau), 0],$$

iar $z^*$ este soluția periodică a sistemului (71) în care $\alpha(c^*, \mu)$ este înlocuit cu $\alpha(c^*, 0)$.

Aceste condiții permit determinarea constantelor $M_i(0)$ și $\alpha(c^*, 0)$, una din constantele $M_i(0)$ fiind luată nulă. O dată $M_i(0)$ și $\alpha(c^*, 0)$ astfel alese, condițiile (72) permit determinarea, pe baza teoremei funcțiilor

implicite (dacă jacobianul corespunzător este diferit de zero), a funcţiilor $M_i(\mu)$ şi $\alpha(c^*, \mu)$ astfel încît $\overline{W}_i(\mu) \equiv 0$. Se obţine atunci soluţia

$$z(s, \mu) = \sum M_i(\mu) z_i(s, c^*) + z^*(s) + \mu z^{**}(s)$$

a sistemului (68).

Punînd

$$y(s, \mu) = p(s, c^*) + \mu z(s, \mu)$$

şi apoi

$$x(t, \mu) = y\left(\frac{t}{1+\mu\alpha}, \mu\right)$$

sîntem conduşi la o soluţie periodică a sistemului (60) cu proprietăţile cerute.

## § 13. SOLUŢII APROAPE-PERIODICE LA SISTEME CVASILINIARE CU ÎNTÎRZIERE

Pentru sistemele cvasiliniare cu parametru mic vom indica o nouă metodă de demonstrare a existenţei soluţiilor periodice.

În problema soluţiilor periodice această metodă conduce la rezultate mai slabe decît cele pe care le-am obţinut mai înainte, dar avantajul ei constă în faptul că se poate aplica şi la demonstrarea existenţei soluţiilor aproape-periodice. Rolul esenţial îl joacă următoarea :

LEMĂ. *Se consideră sistemul*

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{0} x(t+s)\, d_s\, \eta(t, s) + f(t), \tag{73}$$

*unde* $\eta$ *are proprietăţile precizate în* § 3, *iar* $f$ *e mărginită pentru* $t \geqslant 0$. *Dacă soluţia banală a sistemului omogen corespunzător este uniform asimptotic stabilă, atunci toate soluţiile sistemului* (73) *sînt mărginite pentru* $t \geqslant 0$.

*Observaţie.* Această lemă se prezintă ca o reciprocă a teoremei 4.15.

*Demonstraţie.* Pe baza teoremei 4.4′ există o funcţională $V[t, \varphi]$ definită pentru orice $t \geqslant 0$ pe spaţiul funcţiilor $\varphi$ continue pe $[-\tau, 0]$ cu proprietăţile :

1° $\|\varphi\|^2 \leqslant V[t, \varphi] < K_1 \|\varphi\|^2$;

2° $|V[t, \varphi_1] - V[t, \varphi_2]| \leqslant K_1 (\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|) \|\varphi_1 - \varphi_2\|$;

3° $$\limsup_{h \to 0+} \frac{V[t+h, y(t+h+s; t_0, \varphi)] - V[t, y(t+s; t_0, \varphi)]}{h} \leqslant$$
$$\leqslant -\|y(t+s; t_0, \varphi)\|^2,$$

unde $y(t; t_0, \varphi)$ este soluţia sistemului omogen care pe $[t_0 - \tau, t_0]$ coincide cu $\varphi$.

Ținînd seama de formula (18) rezultă evaluarea

$$\| x(t+h+s\,;\, t,\, x(t+s\,;\, t_0,\, \varphi)\| \leqslant L_1 \| x(t+s\,;\, t_0,\, \varphi)\| + \\ + h L_2 M, \qquad M = \sup\ |f(t)|$$

și

$$\| x(t+h+s\,;\, t,\, x(t+s\,;\, t_0,\, \varphi)) - y(t+h+s\,;\, t,\, x(t+s\,;\, t_0,\, \varphi))\| \leqslant h L_2 M.$$

Rezultă

$$| V[t+h,\, x(t+h+s\,;\, t,\, x(t+s\,;\, t_0,\, \varphi))] - V[t+h,\, y(t+h+s\,;\, t,\, x(t+ \\ + s\,;\, t_0,\, \varphi))]| \leqslant K_1 (2L_1 \| x(t+s\,;\, t_0,\, \varphi)\| + h L_2 M)\, h L_2 M$$

deci

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V[t+h,\, x(t+h+s\,;\, t_0,\, \varphi)] - V[t,\, x(t+s\,;\, t_0,\, \varphi)]}{h} \leqslant \\ \leqslant -\| x(t+s\,;\, t_0,\, \varphi)\|^2 + LM \| x(t+s\,;\, t_0,\, \varphi)\|.$$

Fie acum $x(t;\, 0,\, \varphi)$ o soluție oarecare pentru care funcția inițială verifică relația $V[0,\, \varphi] < K_1 L^2 M^2$. Demonstrăm că pentru orice $t \geqslant 0$ avem

$$V[t,\, x(t+s\,;\, 0,\, \varphi)] \leqslant K_1 L^2 M^2.$$

Dacă acest lucru nu ar avea loc, ar exista $t_1 > 0$ astfel ca

$$V[t_1,\, x(t_1+s\,;\, 0,\, \varphi)] > K_1 L^2 M^2$$

și deci ar exista $0 < t_2 < t_1$ astfel ca

$$V[t_2,\, x(t_2+s\,;\, 0,\, \varphi)] = K_1 L^2 M^2$$

și

$$V(t,\, x(t+s\,;\, 0,\, \varphi)] > K_1 L^2 M^2$$

pentru $t_2 < t \leqslant t_1$. De aici rezultă

$$V[t_2+h,\, x(t_2+h+s\,;\, t_2,\, x(t_2+s\,;\, 0,\, \varphi))] > V[t_2,\, x(t_2+s\,;\, 0,\, \varphi)]$$

și deci

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V[t_2+h, x(t_2+h+s\,; t_2, x(t_2+s\,; 0, \varphi))] - V[t_2, x(t_2+s\,; 0, \varphi)]}{h} \geqslant 0.$$

Pe de altă parte,

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V(t_2+h,\, x(t_2+h+s\,;\, 0,\, \varphi) - V[t_2,\, x(t_2+s\,;\, 0,\, \varphi)]}{h} \leqslant \\ \leqslant -\| x(t_2+s\,;\, 0,\, \varphi)\|^2 + LM \| x(t_2+s\,;\, 0,\, \varphi)\| = \\ = \| x(t_2+s\,;\, 0,\, \varphi)\| (-\| x(t_2+s\,;\, 0,\, \varphi)\| + LM).$$

Din

$$V[t_2,\, x(t_2+s\,;\, 0,\, \varphi)] = K_1 L^2 M^2$$

şi

$$V[t, \varphi] < K_1 \|\varphi\|^2$$

rezultă

$$K_1 L^2 M^2 < K_1 \| x(t_2 + s; 0, \varphi) \|^2,$$

deci

$$\| x(t_2 + s; 0, \varphi) \|^2 > L^2 M^2$$

sau

$$\| x(t_2 + s; 0, \varphi) \| > LM.$$

Rezultă

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{V[t_2 + h, x(t_2 + h + s; 0, \varphi)] - V[t_2, x(t_2 + s; 0, \varphi)]}{h} < 0.$$

Am ajuns la o contradicţie, deci

$$V[t, x(t + s; 0, \varphi)] \leqslant K_1 L^2 M^2$$

pentru toţi $t \geqslant 0$. Dar $V[t, \varphi] \geqslant \|\varphi\|^2$, deci

$$\| x(t + s; 0, \varphi) \| \leqslant \sqrt{K_1} LM = KM.$$

În acest fel lema e demonstrată.

TEOREMA 4.29. *Fie în sistemul* (73) *funcţiile* $\eta$ *şi* $f$ *aproape-periodice în* $t$ ($\eta$ *aproape-periodică în* $t$, *uniform în raport cu* $s$). *Dacă soluţia banală a sistemului omogen corespunzător este uniform asimptotic stabilă, atunci sistemul* (73) *admite o soluţie aproape-periodică. Această soluţie este evident unică şi verifică o evaluare de forma* $|x_0(t)| \leqslant KM$, *unde* $K$ *depinde numai de sistemul omogen, iar* $M = \sup |f|$.

*Demonstraţie.* Conform lemei precedente, soluţiile sistemului (73) sînt mărginite ; fie $u(t)$ o astfel de soluţie. Scriem

$$\frac{d}{dt}[u(t + \theta) - u(t)] = \int_{-\infty}^{0} u(t + \theta + s)\, d_s \eta(t + \theta, s) + f(t + \theta) -$$

$$- \int_{-\infty}^{0} u(t + s)\, d_s \eta(t, s) - f(t) = \int_{-\infty}^{0} [u(t + \theta + s) - u(t + s)]\, d_s \eta(t, s) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} u(t + \theta + s)\, d_s [\eta(t + \theta, s) - \eta(t, s)] + f(t + \theta) - f(t).$$

Fie $y(t)$ soluţia sistemului omogen care pe $[-\tau, 0]$ coincide cu $u(t + \theta) - u(t)$; notăm $v(t) = u(t + \theta) - u(t) - y(t)$.

Avem $v(t) \equiv 0$ pe $[-\tau, 0]$ şi

$$\frac{dv(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{0} v(t + s)\, d_s \eta(t, s) + \int_{-\infty}^{0} u(t + \theta + s)\, d_s [\eta(t + \theta, s) - \eta(t, s)] +$$

$$+ f(t + \theta) - f(t).$$

Pe baza formulei de integrare prin părți,

$$\int_{-\tau}^{0} u(t+\theta+s)\, d_s [\eta(t+\theta, s) - \eta(t, s)] = u(t+\theta)[\eta(t+\theta, 0) -$$

$$- \eta(t, 0)] - u(t+\theta-\tau)[\eta(t+\theta, -\tau) - \eta(t, -\tau)] -$$

$$- \int_{-\tau}^{0} \left(\frac{d}{dt} u(t+\theta+s)\right)[\eta(t+\theta, s) - \eta(t, s)]\, ds.$$

Fie $M_1 = \sup |u(t)|$, $M_2 = \sup \left|\frac{du(t)}{dt}\right|$. Rezultă

$$\left|\int_{-\tau}^{0} u(t+\theta+s)\, d_s [\eta(t+\theta, s) - \eta(t, s)]\right| \leqslant M_1(|\eta(t+\theta, 0) - \eta(t, 0)| +$$

$$+ |\eta(t+\theta, -\tau) - \eta(t, -\tau)|) + M_2 \tau \sup_{s,t} |\eta(t+\theta, s) - \eta(t, s)|.$$

Fie $M_0 = \max\ \{2M_1, \tau M_2, 1\}$ și $\theta$ o $\frac{\varepsilon}{4KM_0}$ — aproape-perioadă comună a funcțiilor $\eta$ și $f$. Atunci

$$|\eta(t+\theta, s) - \eta(t, s)| < \frac{\varepsilon}{4KM_0}, \quad |f(t+\theta) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{4KM_0}.$$

Ținînd seama de lemă, rezultă

$$|v(t)| \leqslant K\{M_1 \sup(|\eta(t+\theta, 0) - \eta(t, 0)| + |\eta(t+\theta, -\tau) - \eta(t, -\tau)|) +$$

$$+ M_2 \tau \sup |\eta(t+\theta, s) - \eta(t, s)| + \sup |f(t+\theta) - f(t)|\}$$

deci

$$|v(t)| \leqslant K\left(2M_1 \frac{\varepsilon}{4KM_0} + M_2 \tau \frac{\varepsilon}{4KM_0} + \frac{\varepsilon}{4KM_0}\right) < \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Prin urmare

$$|u(t+\theta) - u(t) - y(t)| < \frac{3\varepsilon}{4} \text{ pentru } t \geqslant -\tau.$$

Pe baza ipotezei făcute asupra sistemului omogen, există $T(\varepsilon)$ cu proprietatea că $t > T$ implică $|y(t)| < \frac{\varepsilon}{4}$.

De aici, pentru $t > T$, deducem

$$|u(t+\theta) - u(t)| < \varepsilon.$$

Rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $l(\varepsilon)$ şi $T(\varepsilon)$ cu proprietatea că în orice interval de lungime $l$ există $\theta$ astfel ca $|u(t+\theta) - u(t)| < \varepsilon$ dacă $t > T$. Aceasta înseamnă că soluţia $u(t)$ este asimptotic aproape-periodică.

Atunci $u(t) = x_0(t) + \omega(t)$, unde $x_0(t)$ este o funcţie aproape-periodică şi $\lim_{t\to\infty} \omega(t) = 0$. Avem

$$\frac{d x_0(t)}{dt} + \frac{d\omega(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{0} x_0(t+s)\, d_s\eta(t,s) + f(t) + \int_{-\infty}^{0} \omega(t+s)\, d_s\eta(t,s).$$

Deoarece $\omega(t)$ tinde către zero cînd $t\to\infty$, rezultă

$$\lim \int_{-\infty}^{0} \omega(t+s)\, d_s\eta(t,s) = 0 \left(\text{căci} \left|\int_{-\infty}^{0} \omega(t+s)\, d_s\eta(t,s)\right| \leqslant \right.$$

$$\left. \leqslant \sup_s |\omega(t+s)| \bigvee_{s=-\tau}^{0} \eta(t,s)\right).$$

Deducem

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{0} x_0(t+s)\, d_s\eta(t,s) + f(t)$$

şi existenţa soluţiei aproape-periodice este demonstrată.

Din $|u(t)| \leqslant KM$ rezultă $|x_0(t)| \leqslant KM + |\omega(t)|$. Fie $\varepsilon > 0$; din $\lim_{t\to\infty} \omega(t) = 0$ rezultă că există $T > 0$ astfel ca pentru $t > T$ să avem $|\omega(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$, deci $|x_0(t)| \leqslant KM + \frac{\varepsilon}{2}$ pentru $t > T$. Fie $t$ arbitrar; există o $\frac{\varepsilon}{2}$ — aproape-perioadă $\theta$ astfel ca $t + \theta > T$. Atunci

$|x_0(t+\theta)| \leqslant KM + \frac{\varepsilon}{2}$ şi $|x_0(t+\theta) - x_0(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$, deci

$$|x_0(t)| \leqslant KM + \varepsilon.$$

Cum $\varepsilon$ este arbitrar, deducem

$$|x_0(t)| \leqslant KM.$$

Teorema este complet demonstrată.

TEOREMA 4.30. *Se consideră sistemul*

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{0} x(t+s)\, d_s\eta(t,s) + f(t) + \mu g\,[t, x(t+s), \mu], \tag{74}$$

*unde $\eta$ şi $f$ sînt ca în teorema precedentă, iar $g$ verifică o condiţie de tip Lipschitz în vecinătatea soluţiei aproape-periodice $x_0(t)$ a sistemului generator obţinut pentru $\mu = 0$.*

*Dacă soluţia banală a sistemului*

$$\frac{dy(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{0} y(t+s)\, d_s\, \eta(t,s)$$

*este uniform asimptotic stabilă, există* $\mu_0 > 0$ *astfel încît pentru* $|\mu| < \mu_0$ *sistemul* (74) *admite o soluţie aproape-periodică* $x(t, \mu)$ *cu proprietatea* $\lim_{\mu\to 0} x(t, \mu) = x_0(t)$. *Această soluţie este uniform asimptotic stabilă.*

*Demonstraţie.* Existenţa soluţiei aproape-periodice $x_0(t)$ a sistemului pentru $\mu = 0$ rezultă din teorema 4.28. Fie

$$z(t) = x(t) - x_0(t).$$

Obţinem

$$\frac{dz(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{0} z(t+s)\, d_s\, \eta(t,s) + \mu Z[t, z(t+s), \mu].$$

Fie $z_1(t)$ soluţia aproape-periodică a sistemului

$$\frac{dz(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{0} z(t+s)\, d_s\, \eta(t,s) + \mu Z[t, 0, 0]$$

şi $z_k(t)$ soluţia aproape-periodică a sistemului

$$\frac{dz(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{0} z(t+s)\, d_s\, \eta(t,s) + \mu Z[t, z_{k-1}(t+s), \mu].$$

Aceste soluţii există şi sînt determinate unic conform teoremei 4.28. Notînd

$$v_k(t) = z_k(t) - z_{k-1}(t)$$

deducem

$$\frac{dv_k(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{0} v_k(t+s)\, d_s\, \eta(t,s) + \mu\{Z[t, z_{k-1}(t+s), \mu] - Z[t, z_{k-2}(t+s), \mu]\}$$

deci, ţinînd seama de teorema 4.28, rezultă evaluarea

$$|v_k(t)| \leqslant |\mu| KL \sup |z_{k-1}(t) - z_{k-2}(t)| = |\mu| KL \sup |v_{k-1}(t)|.$$

De aici rezultă pentru $|\mu|$ suficient de mic convergenţa uniformă a şirului de aproximaţii succesive. Limita acestui şir este o funcţie aproape-periodică $z(t, \mu)$ cu $\lim_{\mu\to 0} z(t, \mu) = 0$. Punînd $x(t, \mu) = x_0(t) + z(t, \mu)$ se obţine soluţia aproape-periodică a sistemului (74). Stabilitatea soluţiei rezultă aplicînd teorema 4.6 de stabilitate după prima aproximaţie . Teorema este demonstrată.

În cazul particular cînd $\eta$, $f$, $g$ sînt periodice în $t$ cu perioada $\omega$ se obţine un caz particular al teoremei 4.23 (aplicaţia).

Metoda de mai sus se poate aplica la sistemele de forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = X_0[t, x(t), x(t-\tau)] + \mu X_1[t, x(t), x(t-\tau), \mu],$$

unde $X_0$ şi $X_1$ sînt aproape-periodice în $t$, uniform în raport cu celelalte variabile. Presupunem că sistemul generator obţinut pentru $\mu = 0$ admite o soluţie aproape-periodică $x_0(t)$ cu proprietatea că sistemul în variaţii corespunzător are soluţia banală uniform asimptotic stabilă. Atunci pentru $|\mu|$ suficient de mic sistemul admite o soluţie aproape-periodică, care pentru $\mu \to 0$ tinde către soluţia banală. Punînd $z(t) = x(t) - x_0(t)$ se obţine un sistem de forma

$$\frac{dz(t)}{dt} = A(t)z(t) + B(t)z(t-\tau) + Z_0[t, z(t), z(t-\tau)] + \mu Z_1[t, z(t), z(t-\tau)]$$

pentru care aproximaţiile succesive se construiesc după schema

$$z_0(t) = 0,$$

$$\frac{dz_k(t)}{dt} = A(t)z_k(t) + B(t)z_k(t-\tau) + Z_0[t, z_{k-1}(t), z_{k-1}(t-\tau)] + \\ + \mu Z_1[t, z_{k-1}(t), z_{k-1}(t-\tau)],$$

$z_k(t)$ fiind aproape-periodică.

## § 14. METODA LUĂRII MEDIEI LA SISTEME CU ARGUMENT ÎNTÎRZIAT

În cele ce urmează vom prezenta unele rezultate privitoare la extinderea metodei mediei la sistemele cu argument întîrziat.

TEOREMA 4. 31. *Se consideră sistemul*

$$\frac{dx(t)}{dt} = \varepsilon X[t, x(t), x(t-\tau)]. \tag{75}$$

*Presupunem că* $X(t, x, y)$ *e mărginită pentru* $t \in (0, \infty)$, $x \in D$, $y \in D$,

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, y)\, dt = X_0(x, y), \quad x \in D, y \in D,$$

*şi în plus, pentru orice* $\eta > 0$ *există* $\delta(\eta) > 0$ *astfel încît*

$$|x' - x''| < \delta(\eta), |y' - y''| < \delta(\eta)$$

*să implice*

$$|X(t, x', y') - X(t, x'', y'')| < \eta, \quad |X_0(x', y') - X_0(x'', y'')| < \eta.$$

*Presupunem de asemenea că sistemul*

$$\frac{dy(t)}{dt} = X_0[y(t), y(t)] \tag{76}$$

*admite soluţie unică verificînd condiţia* $y(0) = x_0$. *Dacă* $x(t, \varepsilon)$ *este o soluţie arbitrară a sistemului* (75) *cu* $x(0, \varepsilon) = x_0$, *iar* $y(t, \varepsilon)$ *este soluţia sistemului* (76) *cu* $y(0, \varepsilon) = x_0$, *atunci pentru orice* $T > 0$ *şi* $\eta > 0$ *există* $\varepsilon_0 > 0$ *astfel încît pentru* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *să avem*

$$|x(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)| < \eta, \quad t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right].$$

Pentru demonstrarea teoremei stabilim mai întîi cîteva leme.

LEMA 1. *Dacă*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, y)\, dt = X_0(x, y) \text{ pentru orice } x \in D, y \in D,$$

*atunci pentru orice pereche de funcţii* $\tilde{x}(t)$, $\tilde{y}(t)$, *constante pe porţiuni, are loc relaţia*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{t_1} X\left[\frac{t}{\varepsilon}, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)\right] dt = \int_0^{t_1} X_0[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)]\, dt.$$

*Demonstraţie.* Avem

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{t_1} X\left[\frac{t}{\varepsilon}, x, y\right] dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \int_0^{\frac{t_1}{\varepsilon}} X[u, x, y]\, du = t_1 \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{t_1} \int_0^{\frac{t_1}{\varepsilon}} X(u, x, y)\, du =$$

$$= t_1 X_0(x, y) = \int_0^{t_1} X_0(x, y)\, dt_1.$$

De aici

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\tau_1}^{\tau_2} X\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, y\right) dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} X_0(x, y)\, dt$$

şi

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_i \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} X\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_i, y_i\right) dt = \sum_i \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} X_0(x_i, y_i)\, dt.$$

Cu aceasta, lema e demonstrată.

LEMA 2. *Dacă* $X(t, x, y)$ *e mărginită pentru* $t \in [0, \infty)$, $x \in D, y \in D$, *şi* $x_n$ *este soluţia sistemului*

$$\frac{dx(t)}{dt} = \varepsilon_n X[t, x(t), x(t - \tau)],$$

*atunci din* $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$ *şi* $\lim_{n \to \infty} x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n}\right) = y(t)$ *rezultă*

$$\lim_{n \to \infty} x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n} - \tau\right) = y(t);$$

*(presupunem că pentru toţi* $t$ *avem* $x_n(t) \in D$*).*

*Demonstrație.* Avem pentru $u \geqslant \tau$ :

$$x_n(u-\tau) = x_n(u) - \int_{u-\tau}^{u} \dot{x}_n(t)\,dt = x_n(u) - \int_{u-\tau}^{u} \varepsilon_n X[t, x_n(t), x_n(t-\tau)]\,dt.$$

De aici

$$x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n} - \tau\right) = x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n}\right) - \int_{\frac{t}{\varepsilon_n}-\tau}^{\frac{t}{\varepsilon_n}} \varepsilon_n X[s, x_n(s), x_n(s-\tau)]\,ds, \quad t \geqslant \tau\varepsilon_n.$$

Fie $|X(t, x, y)| < M$ pentru $t \in [0, \infty)$, $x \in D$, $y \in D$. Avem

$$x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n} - \tau\right) - y(t) = x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n}\right) - y(t) - \varepsilon_n \int_{\frac{t}{\varepsilon_n}-\tau}^{\frac{t}{\varepsilon_n}} X[s, x_n(s), x_n(s-\tau)]\,ds.$$

Deci

$$\left| x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n} - \tau\right) - y(t) \right| \leqslant \left| x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n}\right) - y(t) \right| + \varepsilon_n \tau M, \quad t \geqslant \tau\varepsilon_n.$$

Pentru orice $t > 0$ și $\eta > 0$ alegem $N(\eta, t)$ astfel încît dacă $n > N(\eta, t)$ să avem

$$\varepsilon_n < \min\left\{\frac{t}{\tau}, \frac{\eta}{2\tau M}\right\}, \left| x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n}\right) - y(t) \right| < \frac{\eta}{2}.$$

Atunci

$$\left| x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n} - \tau\right) - y(t) \right| < \eta \text{ pentru } n > N(\eta, t)$$

și lema e demonstrată.

LEMA 3. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ *și* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n}\right) = y(t)$ *uniform în raport cu* $t$ *în* $[0, T]$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{t_1} X\left[\frac{t_1}{\varepsilon_n}, x_n\left(\frac{t_1}{\varepsilon_n}\right), x_n\left(\frac{t_1}{\varepsilon_n} - \tau\right)\right] dt_1 = \int_0^{t_1} X_0\,[y(t), y(t)]\,dt.$$

*Demonstrație.* Avem

$$\left| \int_0^{t_1} X\left[\frac{t_1}{\varepsilon_n}, x_n\left(\frac{t_1}{\varepsilon_n}\right), x_n\left(\frac{t_1}{\varepsilon_n} - \tau\right)\right] dt_1 - \int_0^{t_1} X_0\,[y(t), y(t)]\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_0^{\varepsilon_n\tau} X\left[\frac{t_1}{\varepsilon_n}, x_n\left(\frac{t_1}{\varepsilon_n}\right), x_n\left(\frac{t_1}{\varepsilon_n} - \tau\right)\right] dt_1 - \int_0^{\varepsilon_n\tau} X_0\,[y(t_1), y(t_1)]\,dt_1 \right| +$$

$$+ \left| \int_{\varepsilon_n\tau}^{t_1} X\left[\frac{t_1}{\varepsilon_n}, x_n\left(\frac{t_1}{\varepsilon_n}\right), x_n\left(\frac{t_1}{\varepsilon_n} - \tau\right)\right] dt_1 - \int_{\varepsilon_n\tau}^{t_1} X_0\,[y(t_1), y(t_1)]\,dt_1 \right|.$$

Dar

$$\left|\int_0^{\varepsilon_n\tau} X\,\mathrm{d}t_1 - \int_0^{\varepsilon_n\tau} X_0\,\mathrm{d}t_1\right| \leqslant 2M\,\varepsilon_n\tau.$$

Fie $\delta(\eta)$ astfel ca pentru $|x' - x''| < \delta$, $|y' - y''| < \delta$ să avem

$$|X(t, x', y') - X(t, x'', y'')| < \frac{\eta}{12T}, \quad |X_0(x', y') - X_0(x'', y'')| < \frac{\eta}{12T}.$$

Fie $\widetilde{y}(t)$ o funcție constantă de porțiuni astfel ca

$$|y(t) - \widetilde{y}(t)| < \delta(\eta) \text{ pentru } t \in [0, T].$$

Alegem $N(\eta)$ astfel ca pentru $n > N(\eta)$ să avem $\varepsilon_n < \dfrac{\eta}{16\,M\tau}$,

$$\left|x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n}\right) - y(t)\right| < \delta(\eta), \left|x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n} - \tau\right) - y(t)\right| < \delta(\eta) \text{ pentru } \varepsilon_n\tau \leqslant t \leqslant T.$$

Pentru aceasta e suficient să luăm pe $N(\eta)$ astfel încît dacă $n > N(\eta)$ să avem

$$\varepsilon_n < \min\left\{\frac{\eta}{16\,M\tau}, \frac{\delta(\eta)}{2M\tau}\right\}, \left|x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n}\right) - y(t)\right| < \frac{1}{2}\,\delta(\eta).$$

În plus, $N(\eta)$ va fi ales astfel încît pentru $n > N(\eta)$ să avem și

$$\left|\int_{\tau\varepsilon_n}^{t_1} X\left[\frac{t_1}{\varepsilon_n}, \widetilde{y}(t_1), \widetilde{y}(t_1)\right]\mathrm{d}t_1 - \int_{\tau\varepsilon_n}^{t_1} X_0\,[\widetilde{y}(t_1), \widetilde{y}(t_1)]\,\mathrm{d}t_1\right| < \frac{\eta}{4}$$

pentru $\dfrac{\eta}{2M} \leqslant t_1 \leqslant T$.

Atunci

$$\left|X\left[\frac{t_1}{\varepsilon_n}, x_n\left(\frac{t_1}{\varepsilon_n}\right), x_n\left(\frac{t_1}{\varepsilon_n} - \tau\right)\right] - X\left[\frac{t_1}{\varepsilon_n}, y(t_1), y(t_1)\right]\right| < \frac{\eta}{12T}, \quad \tau\varepsilon_n \leqslant t_1 \leqslant T,$$

$$\left|X\left[\frac{t_1}{\varepsilon_n}, y(t_1), y(t_1)\right] - X\left[\frac{t_1}{\varepsilon_n}, \widetilde{y}(t_1), \widetilde{y}(t_1)\right]\right| < \frac{\eta}{12T},$$

$$|X_0\,[y(t_1), y(t_1)] - X_0\,[\widetilde{y}(t_1), \widetilde{y}(t_1)]| < \frac{\eta}{12T}.$$

Prin urmare

$$\left|\int_{\tau\varepsilon_n}^{t_1} X\left[\frac{t_1}{\varepsilon_n}, x_n\left(\frac{t_1}{\varepsilon_n}\right), x_n\left(\frac{t_1}{\varepsilon_n} - \tau\right)\right]\mathrm{d}t_1 - \int_{\tau\varepsilon_n}^{t_1} X_0\,[y(t_1), y(t_1)]\,\mathrm{d}t_1\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{\tau\varepsilon_n}^{t_1} X\left[\frac{t_1}{\varepsilon_n}, x_n\left(\frac{t_1}{\varepsilon_n}\right), x_n\left(\frac{t_1}{\varepsilon_n} - \tau\right)\right]\mathrm{d}t_1 - \int_{\tau\varepsilon_n}^{t_1} X\left[\frac{t_1}{\varepsilon_n}, y(t_1), y(t_1)\right]\mathrm{d}t_1\right| +$$

$$+\left|\int_{\tau\varepsilon_n}^{t_1} X\left[\frac{t_1}{\varepsilon_n}, y(t_1), y(t_1)\right]dt_1 - \int_{\tau\varepsilon_n}^{t_1} X\left[\frac{t_1}{\varepsilon_n}, \tilde{y}(t_1), \tilde{y}(t_1)\right]dt_1\right| +$$

$$+\left|\int_{\tau\varepsilon_n}^{t_1} X\left[\frac{t_1}{\varepsilon_n}, \tilde{y}(t_1), \tilde{y}(t_1)\right]dt_1 - \int_{\tau\varepsilon_n}^{t_1} X_0[\tilde{y}(t_1), \tilde{y}(t_1)]\,dt_1\right| +$$

$$+\left|\int_{\tau\varepsilon_n}^{t_1} X_0[\tilde{y}(t_1), \tilde{y}(t_1)]\,dt_1 - \int_{\tau\varepsilon_n}^{t_1} X_0[y(t_1), y(t_1)]\,dt_1\right| <$$

$$< \frac{\eta}{12} + \frac{\eta}{12} + \frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{12} = \frac{\eta}{2}; \quad \left|\int_0^{\varepsilon_n\tau} X dt_1 - \int_0^{\varepsilon_n\tau} X_0\, dt_1\right| < \frac{\eta}{2}.$$

În definitiv, pentru $n > N(\eta)$ avem

$$\left|\int_0^{t_1} X\left[\frac{t_1}{\varepsilon_n}, x_n\left(\frac{t_1}{\varepsilon_n}\right), x_n\left(\frac{t_1}{\varepsilon_n} - \tau\right)\right]dt_1 - \int_0^{t_1} X_0[y(t_1), y(t_1)]\,dt_1\right| < \eta$$

şi lema e demonstrată.

Să observăm că am efectuat toate evaluările noastre pentru $t_1 \geqslant \frac{\eta}{2M}$ deoarece pentru $0 < t_1 < \frac{\eta}{2M}$ avem

$\left|\int_0^{t_1} X\, dt_1 - \int_0^{t_1} X_0\, dt_1\right| < \eta$ pentru toţi $n$.

*Demonstraţia teoremei* 4.31. Avem

$$x(t, \varepsilon) = x_0 + \varepsilon\int_0^t X[u, x(u), x(u-\tau)]\,du.$$

Pentru $t = \frac{t_1}{\varepsilon}$ obţinem

$$x\left(\frac{t_1}{\varepsilon}, \varepsilon\right) = x_0 + \varepsilon\int_0^{\frac{t_1}{\varepsilon}} X[u, x(u), x(u-\tau)]\,du.$$

Facem în integrală schimbarea de variabilă $v = \varepsilon u$. Atunci

$$x\left(\frac{t_1}{\varepsilon}, \varepsilon\right) = x_0 + \int_0^{t_1} X\left[\frac{v}{\varepsilon}, x\left(\frac{v}{\varepsilon}\right), x\left(\frac{v}{\varepsilon} - \tau\right)\right]dv.$$

Din faptul că $|X| < M$, rezultă că pentru $0 \leqslant t_1 \leqslant T$ familia $\left\{x\left(\frac{t_1}{\varepsilon}, \varepsilon\right)\right\}$ e egal mărginită şi are derivate egal mărginite, deci este egal continuă. De aceea familia $\left\{x\left(\frac{t_1}{\varepsilon}, \varepsilon\right)\right\}$ e compactă şi pentru orice şir $\{\varepsilon_n\}$

cu $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ se poate găsi un subșir $\{\varepsilon_{n_k}\}$ astfel ca $\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\left(\frac{t_1}{\varepsilon_{n_k}}, \varepsilon_{n_k}\right) = y(t_1)$,

convergența fiind uniformă pe $[0, T]$. Atunci $y(0) = x_0$ și din

$$x_{n_k}\left(\frac{t_1}{\varepsilon_{n_k}}, \varepsilon_{n_k}\right) = x_0 + \int_0^{t_1} X\left[\frac{v}{\varepsilon_{n_k}}, x_{n_k}\left(\frac{v}{\varepsilon_{n_k}}\right), x_{n_k}\left(\frac{v}{\varepsilon_{n_k}} - \tau\right)\right] dv$$

obținem pe baza lemei 3 că

$$y(t_1) = x_0 + \int_0^{t_1} X_0\,[y(v), y(v)]\,dv.$$

De aici rezultă că $y(t_1)$ e soluție a sistemului

$$\dot{y}(t) = X_0\,[y(t), y(t)].$$

Deoarece această soluție este prin ipoteză unică, deducem că pentru orice șir $\varepsilon_n \to 0$ există un subșir $\varepsilon_{n_k}$ astfel ca

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\left(\frac{t_1}{\varepsilon_{n_k}}, \varepsilon_{n_k}\right) = y(t_1).$$

Dar aceasta înseamnă că $\lim_{\varepsilon\to 0} x\left(\frac{t_1}{\varepsilon}, \varepsilon\right) = y(t_1)$ și deci pentru orice $\eta > 0$ există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încît dacă $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, atunci

$$\left| x\left(\frac{t_1}{\varepsilon}, \varepsilon\right) - y(t_1) \right| < \eta \text{ pentru } t_1 \in [0, T]. \text{ Fie } t = \frac{t_1}{\varepsilon}.$$

Avem $| x(t, \varepsilon) - y(\varepsilon t) | < \eta$.

Notăm $y(\varepsilon t) = y(t, \varepsilon)$. Rezultă $\frac{d}{dt} y(t, \varepsilon) = \frac{d}{dt} y(\varepsilon t) = \varepsilon \frac{d}{dt_1} y(\varepsilon t) =$

$= \varepsilon X_0[y(\varepsilon t), y(\varepsilon t)] = \varepsilon X_0\,[y(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)]$, deci $y(t, \varepsilon)$ este soluția sistemului (2) și $y(0, \varepsilon) = y(0) = x_0$.

Teorema e demonstrată.

TEOREMA 4.32. *Se consideră sistemul*

$$\frac{dz(t)}{dt} = \varepsilon Z\,[t, z(t), z(t - \varepsilon\tau), \varepsilon], \tag{77}$$

*unde $Z(t, u, v, \varepsilon)$ are derivate parțiale continue de ordinul întîi și $Z(t + T, u, v, \varepsilon) \equiv Z(t, u, v, \varepsilon)$. Fie*

$$Z_0(u, v, \varepsilon) = \frac{1}{T}\int_0^T Z(t, u, v, \varepsilon)\,dt$$

*și* $\zeta^0$ *o soluție a ecuației* $Z_0(u,u,0) = 0$. *Dacă valorile proprii ale matricii*

$$\frac{\partial Z_0(\zeta^0, \zeta^0, 0)}{\partial u} + \frac{\partial Z_0(\zeta^0, \zeta^0, 0)}{\partial v}$$

*au părți reale negative, există* $\varepsilon_0 > 0$ *astfel încît pentru* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *sistemul* (77) *admite o soluție periodică de perioadă* $T$ *care pentru* $\varepsilon \to 0$ *tinde către* $\zeta^0$.

Și demonstrația acestei teoreme va fi precedată de cîteva leme.

LEMA 4. *Fie* $H_1$ *și* $H_2$ *matrici pătrate de ordinul* $n$. *Presupunem că valorile proprii ale matricii* $H_1 + H_2$ *au părți reale negative. Atunci există* $\gamma_0 > 0$ *și* $\varepsilon_0 > 0$ *astfel încît dacă* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, *rădăcinile ecuației*

$$\det(\varepsilon H_1 + \varepsilon H_2 e^{-\varepsilon r\tau} - Er) = 0,$$

*unde* $E$ *este matricea unitate, verifică inegalitatea*

$$\mathcal{Re}\, r \leqslant -\varepsilon\gamma_0$$

*Demonstrație*. Punem $r = \varepsilon s$. Ecuația ia forma

$$\det(\varepsilon H_1 + \varepsilon H_2 e^{-\varepsilon^2 s\tau} - E\varepsilon s) = 0$$

sau

$$\det(H_1 + H_2 e^{-\varepsilon^2 s\tau} - Es) = 0.$$

Dar

$$H_1 + H_2 e^{-\varepsilon^2 s\tau} - Es = H_1 + H_2 - Es + H_2(e^{-\varepsilon^2 s\tau} - 1).$$

De aici rezultă că

$$\det(H_1 + H_2 e^{-\varepsilon^2 s\tau} - Es) = \det(H_1 + H_2 - Es) + (e^{-\varepsilon^2 s\tau} - 1) f(s, \varepsilon) =$$
$$= g(s) + (e^{-\varepsilon^2 s\tau} - 1) f(s,\varepsilon).$$

Ecuația $g(s) = 0$ are rădăcinile cu părți reale negative, deci există $\gamma_0 > 0$ astfel ca în semiplanul $\mathcal{Re}\, z \geqslant -\gamma_0$ să nu existe rădăcini ale ecuației $g(s) = 0$. Considerăm conturul care conține porțiunea din dreapta $\mathcal{Re}\, z = -\gamma_0$ pentru care $|\mathcal{Im}\, z| \leqslant R$ și arcul de cerc de rază $R$ situate în semiplanul $\mathcal{Re}\, z > \gamma_0$. Deoarece în interiorul acestui contur $g(s)$ e regulată și nu are zerouri, variația argumentului pe contur e nulă. Atunci, pentru $\varepsilon$ suficient de mic, va fi egală cu zero și variația pe acest contur a argumentului funcției $g(s) + (e^{-\varepsilon^2 s\tau} - 1) f(s,\varepsilon)$. De aici rezultă că există $\varepsilon_0$ astfel încît dacă $\varepsilon < \varepsilon_0$, ecuația dată să nu aibă rădăcini în interiorul conturului considerat. Să arătăm că dacă $R$ e destul de mare, ecuația nu poate avea rădăcini în semiplanul $\mathcal{Re}\, z > -\gamma_0$ în afara acestui contur. Dacă $s$ e o rădăcină a ecuației, există un vector $c$ astfel ca

$$(H_1 + H_2 e^{-\varepsilon^2 s\tau}) c = sc;$$

dar

$$|e^{-\varepsilon^2 s\tau}| \leqslant e^{\varepsilon^2\gamma_0\tau}, \quad |s|\,\|c\| = \|(H_1 + H_2 e^{-\varepsilon^2 s\tau}) c\| \leqslant \|H_1 + H_2 e^{-\varepsilon^2 s\tau}\|\,\|c\| \leqslant$$
$$\leqslant (\|H_1\| + \|H_2\|\, e^{\varepsilon^2\gamma_0\tau})\,\|c\| \leqslant M\|c\|$$

deci $|s| \leqslant M$. Cu aceasta lema e demonstrată, deoarece dacă

$$\mathcal{R}e\, s < -\gamma_0$$

rezultă

$$\mathcal{R}e\, r < -\varepsilon\gamma_0 .$$

LEMA 5. *Dacă numerele caracteristice ale matricii $H_1 + H_2$ au părţi reale negative, există o funcţională $V$ cu următoarele proprietăţi:*

1° *$V[\varphi]$ e definită pe spaţiul funcţiilor continue pe $[-\varepsilon\tau, 0]$.*

2° $\|\varphi\|^2 \leqslant V[\varphi] \leqslant K^2\left(1+\dfrac{1}{2\varepsilon\gamma_0}\right)\|\varphi\|^2$

3° $|V[\varphi_1] - V[\varphi_2]| \leqslant L_0\left(1+\dfrac{1}{\varepsilon\gamma_0}\right)(\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|)\,\|\varphi_1 - \varphi_2\|$

4° *Mulţimea funcţiilor pentru care $V[\varphi] \leqslant C$ e închisă şi convexă*

5° $\lim\limits_{h\to 0+} \sup \dfrac{V[z(t+h+s\,;t,\varphi)] - V[\varphi]}{h} \leqslant -\dfrac{1}{2}\|\varphi\|^2$ *pentru* $\varepsilon < \varepsilon_0$,

$\|\varphi\| < \delta_0(\varepsilon_0)$, *unde* $z(t\,;t_0,\varphi)$ *e soluţia sistemului*

$$\dot{z}(t) = \varepsilon\,[E + A(t, z(t), z(t-\varepsilon\tau), \varepsilon)]\,\{H_1 z(t) + H_2 z(t-\varepsilon\tau) + B[z(t), z(t-\varepsilon\tau)]\}$$

*unde*

$$|A(t, u, v, \varepsilon)| < M_1\,\varepsilon^{\alpha}$$

*pentru*

$$t \geqslant 0,\ |u| + |v| \leqslant M_0$$

$$|B(u,v)| < M_2\,\{|u| + |v|\}^{1+\beta},\ \beta > 0,\ \textit{pentru}\ |u| + |v| \leqslant M_0 .$$

*Demonstraţie.* Considerăm sistemul

$$\dot{y}(t) = \varepsilon\,\{H_1 y(t) + H_2 y(t-\varepsilon\tau)\}. \tag{78}$$

Dacă numerele caracteristice ale matricii $H_1 + H_2$ au părţi reale negative, din lema 4 rezultă că rădăcinile ecuaţiei $\det(\varepsilon H_1 + \varepsilon H_2 e^{-\varepsilon r\tau} - Er) = 0$ verifică inegalitatea $\mathcal{R}e\, r \leqslant -\varepsilon\gamma_1$ pentru $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Dar atunci, după cum se ştie, soluţia banală a sistemului este uniform asimptotic stabilă şi avem pentru orice soluţie evaluarea

$$|y(t\,;t_0,\varphi)| \leqslant K\,e^{-\varepsilon\gamma_0(t-t_0)}\,\|\varphi\|$$

pentru

$$t \geqslant t_0,\ \gamma_0 < \gamma_1\ \text{arbitrar}\ ^{*)}.$$

Fie

$$V[\varphi] = \int_0^{\infty} \|y(t+s\,;\varphi)\|^2\,dt + \sup_{\sigma \geqslant 0} \|y(\sigma+s\,;\varphi)\|^2 .$$

*) Vezi rezultatele lui N. N. Krasovski expuse în anexă.

Am notat $y(t;\varphi)$ soluţia sistemului (78) care pentru $-\varepsilon\tau \leqslant t \leqslant 0$ coincide cu $\varphi(t)$; peste tot în formulele noastre $s \in [-\varepsilon\tau, 0]$ şi

$$\|y(t+s;\varphi)\| = \sup_{-\varepsilon\tau \leqslant s \leqslant 0} |y(t+s;\varphi)|.$$

Deoarece integrala e pozitivă şi $y(s;\varphi) = \varphi$, rezultă că $V[\varphi] \geqslant \|\varphi\|^2$. Pe de altă parte,

$$\|y(t+s;\varphi)\| \leqslant K e^{-\varepsilon\gamma_0 t}\|\varphi\|$$

deci

$$V[\varphi] \leqslant K^2\|\varphi\|^2 \int_0^\infty e^{-2\varepsilon\gamma_0 t} dt + K^2\|\varphi\|^2 = K^2\left(1 + \frac{1}{2\varepsilon\gamma_0}\right)\|\varphi\|^2.$$

Fie

$$\delta_0 > 0$$

şi

$$T(\eta) = \frac{1}{\varepsilon\gamma_0}\ln\frac{K\delta_0}{\eta};$$

dacă

$$\|\varphi\| < \delta,\ t > T(\eta)$$

avem

$$|y(t,\varphi)| < \eta$$

deci dacă

$$\|\varphi\| < \delta_0$$

şi

$$\sigma > \frac{1}{\varepsilon\gamma_0}\ln\frac{2K\delta_0}{\|\varphi\|}$$

avem

$$\|y(\sigma+s;\varphi)\|^2 < \frac{\|\varphi\|^2}{4}$$

şi

$$\sup_{\sigma\geqslant 0}\|y(\sigma+s;\varphi)\|^2 = \sup_{0\leqslant\sigma\leqslant\frac{1}{\varepsilon\gamma_0}\frac{2K\delta_0}{\|\varphi\|}}\|y(\sigma+s;\varphi)\|^2 = \|y(\sigma'+s;\varphi)\|^2,$$

deoarece $\|y(\sigma+s;\varphi)\|^2$ e o funcţie continuă de $\sigma$.

Mai departe

$$|\,\|y(\sigma+s;\varphi_1)\|^2 - \|y(\sigma+s;\varphi_2)\|^2\,| =$$

$$= (\|y(\sigma+s;\varphi_1)\| + \|y(\sigma+s;\varphi_2)\|)\,|\,\|y(\sigma+s;\varphi_1)\| -$$

$$- \|y(\sigma+s;\varphi_2)\|\,| \leqslant (\|y(\sigma+s;\varphi_1)\| + \|y(\sigma+s;\varphi_2)\|)\|y(\sigma+s;\varphi_1-\varphi_2)\| \leqslant$$

$$\leqslant 2Ke^{\varepsilon^2\gamma_0\tau}(\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|)\,Ke^{\varepsilon^2\gamma_0\tau}\|\varphi_1-\varphi_2\| < L_0(\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|)\|\varphi_1-\varphi_2\|.$$

De aici rezultă

$$\sup_{\sigma\geqslant 0}\|y(\sigma+s\,;\,\varphi_1)\|^2=\|y(\sigma'+s\,;\,\varphi_1)\|^2\leqslant\|y(\sigma'+s\,;\,\varphi_1)\|+$$

$$+L_0(\|\varphi_1\|+\|\varphi_2\|)\,\|\varphi_1-\varphi_2\|\leqslant\sup_{\sigma\geqslant 0}\|y(\sigma+s\,;\,\varphi_2)\|^2+L_0(\|\varphi_1\|+\|\varphi_2\|)\|\varphi_1-\varphi_2\|.$$

În definitiv

$$|\sup_{\sigma\geqslant 0}\|y(\sigma+s\,;\,\varphi_2)\|^2-\sup_{\sigma\geqslant 0}\|y(\sigma+s\,;\,\varphi_1)\|^2|\leqslant L_0(\|\varphi_1\|+\|\varphi_2\|)\|\varphi_1-\varphi_2\|,$$

$$|V[\varphi_1]-V[\varphi_2]|\leqslant\int_0^\infty|\,\|y(t+s\,;\,\varphi_1)\|^2-\|y(t+s\,;\,\varphi_2)\|^2|\,dt+$$

$$+L_0(\|\varphi_1\|+\|\varphi_2\|)\|\varphi_1-\varphi_2\|\leqslant L_0(\|\varphi_1\|+\|\varphi_2\|)\int_0^\infty e^{-\varepsilon\gamma_0 t}\,dt\,\|\varphi_1-\varphi_2\|+$$

$$+L_0(\|\varphi_1\|+\|\varphi_2\|)\|\varphi_1-\varphi_2\|$$

deci

$$|V[\varphi_1]-V[\varphi_2]|\leqslant L_0\left[1+\frac{1}{\varepsilon\gamma_0}\right](\|\varphi_1\|+\|\varphi_2\|)\|\varphi_1-\varphi_2\|.$$

Am arătat că funcționala $V[\varphi]$ verifică condiția lui Lipschitz, deci $V[\varphi]$ e continuă și de aceea mulțimea $V[\varphi]\leqslant C$ e închisă. Să verificăm că e convexă. Fie $V[\varphi_1]\leqslant C$, $V[\varphi_2]\leqslant C$.
Avem

$$V[\lambda\varphi_1+(1-\lambda)\varphi_2]=\int_0^\infty\|y(t+s\,;\,\lambda\varphi_1+(1-\lambda)\varphi_2)\|^2\,dt+$$

$$+\sup_{\sigma\geqslant 0}\|y(\sigma+s\,;\,\lambda\varphi_1+(1-\lambda)\varphi_2)\|^2,$$

$$y(t+s\,;\,\lambda\varphi_1+(1-\lambda)\varphi_2)=\lambda y(t+s\,;\,\varphi_1)+(1-\lambda)\,y(t+s\,;\,\varphi_2),$$

$$\|y(t+s\,;\lambda\varphi_1+(1-\lambda)\varphi_2)\|\leqslant\lambda\|y(t+s\,;\,\varphi_1)\|+(1-\lambda)\|y(t+s\,;\,\varphi_2)\|,$$

$$\|y(t+s\,;\,\lambda\varphi_1+(1-\lambda)\varphi_2)\|^2\leqslant$$

$$\leqslant\lambda^2\|y(t+s\,;\,\varphi_1)\|^2+2\lambda(1-\lambda)\|y(t+s\,;\,\varphi_1)\|\,\|y(t+s\,;\,\varphi_2)\|+$$

$$+(1-\lambda)^2\|y(t+s\,;\,\varphi_2)\|^2\leqslant\lambda^2\|y(t+s\,;\,\varphi_1)\|^2+\lambda(\lambda-1)[\|y(t+s\,;\,\varphi_1)\|^2+$$

$$+\|y(t+s\,;\,\varphi_2)\|^2]+(1-\lambda)^2\|y(t+s\,;\,\varphi_2)\|^2=$$

$$=\lambda\|y(t+s\,;\,\varphi_1)\|^2+(1-\lambda)\|y(t+s\,;\,\varphi_2)\|^2,$$

$$\sup_{t\geqslant 0}\|y(t+s\,;\,\lambda\varphi_1+(1-\lambda)\varphi_2)\|^2\leqslant\lambda\sup_{t\geqslant 0}\|y(t+s\,;\varphi_1)\|^2+$$

$$+(1-\lambda)\sup_{t\geqslant 0}\|y(t+s\,;\,\varphi_2)\|^2.$$

De aici obținem

$$V[\lambda\varphi_1+(1-\lambda)\ \varphi_2]\leqslant\lambda\int_0^\infty\|y(t+s\,;\,\varphi_1)\|^2\,dt+(1-\lambda)\int_0^\infty\|y(t+s\,;\,\varphi_2)\|^2\,dt+$$

$$+\lambda\sup_{t\geqslant 0}\|y(t+s\,;\varphi_1)\|^2+(1-\lambda)\sup_{t\geqslant 0}\|y(t+s\,;\,\varphi_2)\|^2=\lambda V[\varphi_1]+(1-\lambda)V[\varphi_2]\leqslant C,$$

deci $V[\varphi]\leqslant C$ e convexă.

Rămîne de demonstrat ultima afirmație a lemei. Avem

$$V[y(t+s\,;t_0,\varphi)]=\int_0^\infty\|y(u+s\,;\,y(t+s\,;t_0,\varphi))\|^2\mathrm{d}u+$$

$$+\sup_{\sigma\geqslant 0}\|y(\sigma+s\,;y(t+s\,;t_0,\ \varphi))\|^2=\int_0^\infty\|y(t+u+s\,;t,\,y(t+s\,;\,t_0,\ \varphi))\|^2\,du+$$

$$+\sup_{\sigma\geqslant 0}\|\ y(t+\sigma+s\,;\,t,\ y(t+s\,;\ \ t_0,\varphi))\|^2=\int_0^\infty\|y(t+u+s\,;t_0,\varphi)\|^2\ du+$$

$$+\sup_{\sigma\geqslant 0}\|\ y(t+\sigma+s\,;\,t_0,\ \varphi)\|^2=\int_t^\infty\|\ y(u+s\,;t_0,\varphi)\|^2\,du+\sup_{\sigma\geqslant t}\|y(\sigma+s\,;\,t_0,\varphi)\|^2.$$

Din faptul că $\sup\limits_{\sigma\geqslant t}\|y(\sigma+s\,;t_0,\varphi)\|^2$ este o funcție monoton descrescătoare, rezultă că

$$\lim\sup_{h\to 0+}\frac{V[y(t+h+s\,;t_0,\varphi)]-V[y(t+s\,;t_0,\varphi)]}{h}\leqslant-\|y(t+s\,;\,t_0,\varphi)\|^2.$$

Considerăm sistemul

$$\dot z(t)=\varepsilon\{H_1z(t)+H_2z(t-\varepsilon\tau)\}+A[t,z(t),z(t-\varepsilon\tau)]\ \{H_1z(t)+H_2z(t-\varepsilon\tau)\}+$$
$$+\varepsilon\ \{E+A[t,\,z(t),\,z(t-\varepsilon\tau)]\}\ B\ [z(t),\,z(t-\varepsilon\tau)].$$

Avem

$$z(u\,;\,t,\ \varphi)=\varphi(t)+\int_t^u\varepsilon\,[E+A]\ [H_1z(v\,;\ t,\ \varphi)+H_2\ \varphi(v-\varepsilon\tau)+B]\mathrm{d}v$$

deci

$$|\,z(u\,;\,t,\ \varphi)\,|\leqslant\|\,\varphi\,\|+\varepsilon M\int_t^{t+h}|\,z(v\,;\,t,\ \varphi)\,|\,\mathrm{d}v+\varepsilon Mh\|\varphi\|+\varepsilon L\int_t^{t+h}|B\,|\mathrm{d}\,v.$$

Funcția

$$B^*(v)=|\ B\ [z(v\,;t,\,\varphi),\,\varphi(v-\varepsilon\tau)]\,|$$

e continuă și deci

$$\int_t^{t+h}B^*(v)\ \mathrm{d}v=hB^*(t)+\eta\,h$$

unde

$$\lim_{h\to 0}\eta = 0,\quad B^*(t) = |\,B[\varphi(t),\ \varphi(t-\varepsilon\tau)]\,| \leqslant 2M_2\|\varphi\|^{1+\beta}.$$

În definitiv obținem pentru $t \leqslant u \leqslant t+h$:

$$|\,z(u\,;t,\varphi)\,| \leqslant \{\|\varphi\| + \varepsilon h(M\,\|\varphi\| + 2M_2\,L\,\|\varphi\|^{1+\beta} + L\eta)\}\ e^{\varepsilon Mh}$$

de unde

$$\|z(t+h+s\,;t,\varphi)\| \leqslant \{\|\varphi\| + \varepsilon h(M\,\|\varphi\| + 2M_2\,L\,\|\varphi\|^{1+\beta} + L\eta)\}e^{\varepsilon Mh}.$$

Aceleași calcule dau

$$\|y(t+h+s\,;t,\varphi)\| \leqslant \{\|\varphi\| + \varepsilon h\,M\,\|\varphi\|\}e^{\varepsilon Mh}.$$

Mai departe,

$$|\,z(u\,;t,\varphi) - y(u\,;t,\varphi)\,| \leqslant \varepsilon M\int_t^{t+h} |z(v\,;t,\varphi) - y(v\,;t,\varphi)|\,dv +$$

$$+ 2MM_1\,h\varepsilon^{1+\alpha}\{\|\varphi\| + \varepsilon h(M\,\|\varphi\| + 2M_2\,L\,\|\varphi\|^{1+\beta} + L\eta)\}\ e^{\varepsilon Mh} +$$

$$+ 2\varepsilon\,LM_2\,h\,\|\varphi\|^{1+\beta} + L\varepsilon\,\eta h.$$

De aici, pentru $t \leqslant u \leqslant t+h$,

$$|\,x(u\,;t,\varphi) - y(u\,;t,\varphi)\,| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon h\,\{2MM_1\,\varepsilon^{\alpha}\,[\|\varphi\| + \varepsilon h(M\,\|\varphi\| + 2M_2\,L\,\|\varphi\|^{1+\beta} + L\eta)]e^{\varepsilon Mh} +$$

$$+ 2LM_2\|\varphi\|^{1+\beta} + L\eta\}\ e^{\varepsilon Mh}$$

și deci

$$\|z(t+h+s\,;t,\varphi) - y(t+h+s\,;t,\varphi)\| = \sup_{-\varepsilon\tau\leqslant s\leqslant 0} |\,z(t+h+s\,;t,\varphi) -$$

$$- y(t+h+s\,;t,\varphi)| = \sup_{-h\leqslant s\leqslant 0} |\,z(t+h+s\,;t,\varphi) - y(t+h+s\,;t,\varphi)\,| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon h\,\{2MM_1\,\varepsilon^{\alpha}[\,\|\varphi\| + \varepsilon h(M\,\|\varphi\| + 2M_2\,L\,\|\varphi\|^{1+\beta} + L\eta)]e^{\varepsilon Mh} +$$

$$+ 2LM_2\|\varphi\|^{1+\beta} + L\eta\}\ e^{\varepsilon Mh}.$$

De aici

$$|V[z(t+h+s\,;t,\varphi)] - V[y(t+h+s\,;t,\varphi)]\,| \leqslant$$

$$\leqslant L_0\left(1 + \frac{1}{\varepsilon\gamma_0}\right)[2\|\varphi\| + \varepsilon h(\ \ )]e^{\varepsilon Mh}\,\varepsilon h\,\{2MM_1\,\varepsilon^{\alpha}[\,\|\varphi\| + \varepsilon h(\ \ )]e^{\varepsilon Mh} +$$

$$+ 2LM_2\|\varphi\|^{1+\beta} + L\eta\}\ e^{\varepsilon Mh}$$

Deci

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{|V[z(t+h+s\,;t,\varphi)] - V[y(t+h+s\,;t,\varphi)]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant L_0\left(\varepsilon + \frac{1}{\gamma_0}\right)2\,\|\varphi\|[2MM_1\varepsilon^{\alpha}\,\|\varphi\| + 2LM_2\|\varphi\|^{1+\beta}].$$

Mai departe obținem

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V[z(t+h+s;\,t,\,\varphi)]-V[\varphi]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{h\to 0+} \frac{V[z(t+h+s;\,t,\,\varphi)]-V[y(t+h+s;\,t,\,\varphi)}{h} +$$

$$+ \limsup_{h\to 0+} \frac{V[y(t+h+s;\,t,\,\varphi)]-V[\varphi]}{h} \leqslant 4L_0\left(\varepsilon+\frac{1}{\gamma_0}\right)[MM_1\,\varepsilon^{\alpha}\|\varphi\|^2 +$$

$$+LM_2\|\varphi\|^{2+\beta}]-\|\varphi\|^2 = -\|\varphi\|^2\left[1-4L_0\left(\varepsilon+\frac{1}{\gamma_0}\right)MM_1\,\varepsilon^{\alpha} -\right.$$

$$\left.-4LM_2\,L_0\left(\varepsilon+\frac{1}{\gamma_0}\right)\|\varphi\|^{\beta}\right]$$

Pentru $\varepsilon < \varepsilon_0$ avem

$$4L_0\left(\varepsilon+\frac{1}{\gamma_0}\right)M\varepsilon^{\alpha} < \frac{1}{4}$$

și pentru $\|\varphi\| < \delta_0$ avem

$$4LM_2L_0\left(\varepsilon+\frac{1}{\gamma_0}\right)\|\varphi\|^{\beta} < \frac{1}{4}$$

deci

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V[z(t+h+s;\,t,\,\varphi)]-V[\varphi]}{h} \leqslant -\frac{1}{2}\|\varphi\|^2.$$

Lema e demonstrată.

LEMA 6. *Considerăm sistemul*

$$\dot{x}(t)=\varepsilon\;\{[E+A(t,\,x(t),\,x(t-\varepsilon\tau),\,\varepsilon)]\,[H_1\,x(t)+H_2\,x(t-\varepsilon\tau)+$$

$$+B(x(t),\,x(t-\varepsilon\tau))]+C(t,\,x(t),\,x(t-\varepsilon\tau),\,\varepsilon)\}$$

*unde $H_1$, $H_2$, $B$ sînt la fel ca în lema precedentă, $A(t,u,v,\varepsilon)$, $C(t,u,v,\varepsilon)$ sînt periodice în raport cu $t$ de perioadă $T$ și*

$$|A(t,u,v,\varepsilon)| < M_1\varepsilon^{\alpha},\ |C(t,u,v,\varepsilon)| < M_3\varepsilon^{1-\alpha},\ \alpha < \frac{1}{2}\cdot$$

*Atunci sistemul admite pentru $\varepsilon > 0$ suficient de mic, o soluție periodică de perioadă $T$ care pentru $\varepsilon \to 0$ tinde către zero.*

*Demonstrație.* Avem

$$x(u;\,t,\,\varphi)=\varphi(t)+\varepsilon\int_t^u\{[E+A]\,[H_1\,x(v;\,t,\,\varphi)+H_2\,\varphi(v-\varepsilon\tau)+B]+C\}\,dv,$$

$$z(u;t,\varphi)=\varphi(t)+\varepsilon\int_t^u[E+A]\,[H_1\,z(v;\,t,\,\varphi)+H_2\,\varphi(v-\varepsilon\tau)+B]\,dv,$$

$$| x(u;t,\varphi)-z(u;t,\varphi)| \leqslant \varepsilon M_4 \int_t^u |x(v;t,\varphi)-z(v;t,\varphi)| \, dv+\varepsilon^{\alpha+1} h\|\varphi\| +$$

$$+2M_2 L\|\varphi\|^{1+\beta} \varepsilon h + L\eta \varepsilon h + \varepsilon h M_3 \varepsilon^{1-\alpha},$$

$$| x(u;t,\varphi)-z(u;t,\varphi)| \leqslant \varepsilon h[M_3\varepsilon^{1-\alpha} + M\varepsilon^{\alpha}\|\varphi\| + 2M_2 L\|\varphi\|^{1+\beta}] e^{\varepsilon h M_4}.$$

Deci

$$\| x(t+h+s;t,\varphi)-z(t+h+s;t,\varphi)\| \leqslant \varepsilon h [M_3 \varepsilon^{1-\alpha} +$$

$$+ M\varepsilon^{\alpha}\|\varphi\| + 2M_2 L\|\varphi\|^{1+\beta}] e^{\varepsilon h M_4},$$

$$\| x(t+h+s;t,\varphi)\| \leqslant \| z(t+h+s;t,\varphi)\| + \varepsilon h e^{\varepsilon h M_4} [M_3 \varepsilon^{1-\alpha} +$$

$$+ M\varepsilon^{\alpha}\|\varphi\| + 2M_2 L\|\varphi\|^{1+\beta}] \leqslant \{\|\varphi\| + \varepsilon h(\ )\} e^{\varepsilon h M_5}.$$

De aici rezultă

$$| V[x(t+h+s;t,\varphi)-V[z(t+h+s;t,\varphi)]| \leqslant$$

$$\leqslant L_0\left(1+\frac{1}{\varepsilon\gamma_0}\right)\{2\|\varphi\| + 2\varepsilon h(\ )\} e^{\varepsilon h M_5} h\varepsilon [M_3\varepsilon^{1-\alpha} +$$

$$+ M\varepsilon^{\alpha}\|\varphi\| + 2M_2 L\|\varphi\|^{1+\beta}] e^{\varepsilon h M_4}$$

$$\lim_{h\to 0+} \sup \frac{V[x(t+h+s;t,\varphi)-V[z(t+h+s;t,\varphi)]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant 2L_0\left(\varepsilon+\frac{1}{\gamma_0}\right) M_6\|\varphi\| [\varepsilon^{1-\alpha} + \varepsilon^{\alpha}\|\varphi\| + \|\varphi\|^{1+\beta}].$$

Obținem în definitiv

$$\lim_{h\to 0+} \sup \frac{V[x(t+h+s;t,\varphi)]-V[\varphi]}{h} \leqslant 2L_0\left(\varepsilon+\frac{1}{\gamma_0}\right) M_6\|\varphi\| [\varepsilon^{1-\alpha} +$$

$$+ \varepsilon^{\alpha}\|\varphi\| + \|\varphi\|^{1+\beta}] - \frac{1}{2}\|\varphi\|^2 = \|\varphi\| [M_7\varepsilon^{1-\alpha} + M_7\varepsilon^{\alpha}\|\varphi\| +$$

$$+ M_7\|\varphi\|^{1+\beta} - \frac{1}{2}\|\varphi\|].$$

Pentru $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $\|\varphi\| < \delta_0$, avem

$$M_7\varepsilon^{\alpha}\|\varphi\| + M_7\|\varphi\|^{1+\beta} < \frac{1}{4}\|\varphi\|$$

și deci

$$\lim_{h\to 0+} \sup \frac{V[x(t+h+s;t,\varphi)]-V[\varphi]}{h} \leqslant \|\varphi\|\left[M_7\varepsilon^{1-\alpha} - \frac{1}{4}\|\varphi\|\right].$$

Fie acum $C=\delta_0^2$, $V[\varphi]\leqslant C$. Avem $V[x(t+s;\varphi)]\leqslant C$ pentru $t=0$. Dacă există $0<t_1<T$ astfel ca $V[x(t_1+s;\varphi)]>C$, există

$0 \leqslant t_2 < T$ astfel ca $V[x(t_2+s\,;\,\varphi)] = C$ şi $V[x(t_2+h+s\,;\,\varphi)] > C$ pentru $0 < h < \delta$, deci

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V[x(t_2+h+s\,;\,\varphi)] - V[x(t_2+s\,;\,\varphi)]}{h} \geqslant 0.$$

Dar

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V[x(t_2+h+s\,;\,\varphi)] - V[x(t_2+s\,;\,\varphi)]}{h} =$$

$$= \limsup_{h\to 0+} \frac{V[x(t_2+h+s\,;\,t_2,\,x(t_2+s\,;\,\varphi)] - V[x(t_2+s\,;\,\varphi)]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant \|x(t_2+s\,;\,\varphi)\| \left[M_7\,\varepsilon^{1-\alpha} - \frac{1}{4}\|x(t_2+s\,;\,\varphi)\|\right].$$

Din $V[x(t_2+s\,;\,\varphi)] = C$ rezultă

$$C \leqslant K^2\left(1+\frac{1}{2\varepsilon\gamma_0}\right)\|x(t_2+s\,;\,\varphi)\|^2$$

şi

$$\|x(t_2+s\,;\,\varphi)\|^2 \leqslant C = \delta_0^2,$$

deci

$$\|x(t_2+s\,;\,\varphi)\| \leqslant \delta_0$$

şi

$$\|x(t_2+s\,;\,\varphi)\| \geqslant \frac{\sqrt{C}}{K\sqrt{1+\dfrac{1}{2\varepsilon\gamma_0}}}\,;\; -\frac{1}{4}\|x(t_2+s\,;\,\varphi)\| \leqslant -\frac{1}{4K}\frac{\sqrt{2C\gamma_0}}{\sqrt{1+2\varepsilon\gamma_0}}\sqrt{\varepsilon}\,.$$

De aici obţinem

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V[x(t_2+h+s\,;\,t_2,\,x(t_2+s\,;\,\varphi))] - V[x(t_2+s\,;\,\varphi)]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant \|x(t_2+s\,;\,\varphi)\|\,[M_7\,\varepsilon^{1-\alpha} - M_8\sqrt{\varepsilon}\,].$$

Dar $\alpha < \frac{1}{2}$, $1-\alpha > \frac{1}{2}$, deci pentru $\varepsilon > 0$ suficient de mic avem $M_7\,\varepsilon^{1-\alpha} - M_8\sqrt{\varepsilon} < 0$ şi ajungem la o contradicţie.

Prin urmare, $V[x(t+s\,;\,\varphi)] \leqslant C$ pentru toţi $t \in [0,\,T)]$ şi $V[x(T+s\,;\,\varphi)] \leqslant C$.

Am stabilit astfel că mulţimea închisă, mărginită şi convexă $V[\varphi] \leqslant C$ este aplicată în ea însăşi de operatorul complet continuu $U[\varphi] = x(T+s\,;\varphi)$. De aici rezultă că există un punct fix al acestui operator; acestui punct fix îi corespunde o soluţie periodică a sistemului, de perioadă $T$. Calculele noastre arată că se poate lua $C = O(\varepsilon^{\alpha'})$, $\alpha' < 1-2\alpha$ de unde rezultă că soluţia periodică obţinută tinde către zero cînd $\varepsilon \to 0$.

*Demonstrația teoremei 4.32.* Facem în sistemul (77) schimbarea $z = \zeta^{\circ} + b$. Obținem sistemul

$$\dot{b}(t) = \varepsilon B(t, b(t), b(t-\varepsilon\tau), \varepsilon),$$

unde $B$ are aceleași proprietăți de regularitate ca și $Z$ și e periodică în $t$ cu perioada $T$. Fie

$$B_0(u, v, \varepsilon) = \frac{1}{T}\int_0^T B(t, u, v, \varepsilon)\,\mathrm{d}t.$$

Evident,

$$B_0(0, 0, 0) = 0.$$

Notăm

$$B^*(t, u, v, \varepsilon) = B(t, u, v, \varepsilon) - B_0(u, v, \varepsilon).$$

Avem

$$\frac{1}{T}\int_0^T B^*(t, u, v, \varepsilon)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Fie

$$B^*_\eta(t, u, v, \varepsilon) = \int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\eta(t-s)} B^*(s, u, v, \varepsilon)\,\mathrm{d}s.$$

Avem

$$B^*_\eta(t, u, v, \varepsilon) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\eta\sigma} B^*(t-\sigma; u, v, \varepsilon)\,\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \mathrm{e}^{-n\eta T}\int_{nT}^{(n+1)T} B^*(t-\sigma, u, v, \varepsilon)\,\mathrm{e}^{-\eta(\sigma-nT)}\,\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \mathrm{e}^{-n\eta T}\int_0^T \mathrm{e}^{-\eta\sigma} B^*(t-\sigma; u, v, \varepsilon)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\eta T}}\int_0^T \mathrm{e}^{-\eta s} B^*(t-s; u, v, \varepsilon)\,\mathrm{d}s.$$

Fie

$$B^{**}(\sigma; u, v, \varepsilon) = \int_0^\sigma B^*(\xi; u, v, \varepsilon)\,\mathrm{d}\xi.$$

Avem mai departe

$$B^*_\eta(t; u, v, \varepsilon) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\eta T}}\int_0^T \mathrm{e}^{-\eta s} B^*(t-s; u, v, \varepsilon)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \frac{-1}{1-\mathrm{e}^{-\eta T}}\int_t^{t-T} \mathrm{e}^{-\eta t}\,\mathrm{e}^{\eta\sigma} B^*(\sigma; u, v, \varepsilon)\,\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-\eta t}}{1-\mathrm{e}^{-\eta T}}\int_{t-T}^t \mathrm{e}^{\eta\sigma} B^*(\sigma; u, v, \varepsilon)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{e}^{-\eta t}}{1-\mathrm{e}^{-\eta T}}\int_{t-T}^t \mathrm{e}^{\eta\sigma}\,\mathrm{d}B^{**} =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-\eta t}}{1-\mathrm{e}^{-\eta T}}[\mathrm{e}^{\eta\sigma}B^{**}]\Big|_{t-T}^t - \frac{\eta\,\mathrm{e}^{-\eta t}}{1-\mathrm{e}^{-\eta T}}\int_{t-T}^t \mathrm{e}^{\eta\sigma} B^{**}(\sigma; u, v, \varepsilon)\,\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \frac{e^{-\eta t}}{1 - e^{-\eta T}} [e^{\eta t} B^{**}(t, u, v, \varepsilon) - e^{\eta t} e^{\eta T} B^{**}(t, u, v, \varepsilon)] -$$

$$- \frac{\eta e^{-\eta t}}{1 - e^{-\eta t}} \int_0^T e^{\eta(t-s)} B^{**}(t - s; u, v, \varepsilon) ds =$$

$$= B^{**}(t, u, v, \varepsilon) - \frac{\eta}{1 - e^{-\eta T}} \int_0^T e^{-\eta s} B^{**}(t - s; u, v, \varepsilon) ds.$$

Dar $B^*$ are valoare medie nulă, deci $B^{**}$ este o funcție periodică, deci $B^{**}$ e mărginită. Rezultă

$$| B^*_\eta(t, u, v, \varepsilon) | \leqslant M + M \frac{\eta}{1 - e^{-\eta T}} \int_0^T e^{-\eta s} ds = 2M.$$

Să observăm că

$$\frac{\partial}{\partial t} B^*_\eta(t, u, v, \varepsilon) = - \int_{-\infty}^t \eta e^{-\eta(t-s)} B^*(s, u, v, \varepsilon) ds + B^*(t, u, v, \varepsilon),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B^*_\eta(t, u, v, \varepsilon) = - \eta B^*_\eta(t, u, v, \varepsilon) + B^*(t, u, v, \varepsilon).$$

Mai departe

$$\frac{\partial}{\partial u} B^*_\eta(t, u, v, \varepsilon) = \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-s)} \frac{\partial}{\partial u} B^*(s, u, v, \varepsilon) ds,$$

$$\frac{\partial}{\partial u} B^*(s, u, v, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial u} B(s, u, v, \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial u} B_0(u, v, \varepsilon).$$

Dar

$$\frac{\partial}{\partial u} B_0(u, v, \varepsilon) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial u} B(t, u, v, \varepsilon) dt$$

deci

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial u} B^*(s, u, v, \varepsilon) ds = 0.$$

De aici rezultă că matricea $\frac{\partial}{\partial u} B^*(t, u, v, \varepsilon)$ are valoare medie nulă și deci se pot repeta pentru ea toate calculele pe care le-am făcut pentru vectorul $B^*(t, u, v, \varepsilon)$. În definitiv obținem

$$\left| \frac{\partial}{\partial u} B^*_\eta(t, u, v, \varepsilon) \right| < M_1$$

și analog

$$\left| \frac{\partial}{\partial v} B^*_\eta(t, u, v, \varepsilon) \right| < M_2.$$

Să facem acum în sistem schimbarea de variabile

$$b(t) = h(t) + \varepsilon B^*_\eta(t, h(t), h(t), \varepsilon).$$

Obţinem

$$\dot h(t) + \varepsilon \frac{\partial B^*_\eta(t, h(t), h(t), \varepsilon)}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial B^*_\eta(t, h(t), h(t), \varepsilon)}{\partial u} \dot h(t) +$$

$$+ \varepsilon \frac{\partial B^*_\eta(t, h(t), h(t), \varepsilon)}{\partial v} \dot h(t) = \varepsilon B[t, h(t) + \varepsilon B^*_\eta, h(t-\varepsilon\tau) + \varepsilon B^*_\eta, \varepsilon] =$$

$$= \varepsilon B_0[h(t) + \varepsilon B^*_\eta, h(t-\varepsilon\tau) + \varepsilon B^*_\eta, \varepsilon] +$$

$$+ \varepsilon B^*[t, h(t) + \varepsilon B^*_\eta, h(t-\varepsilon\tau) + \varepsilon B^*_\eta, \varepsilon],$$

$$B_0[h(t) + \varepsilon B^*_\eta, h(t-\varepsilon\tau) + \varepsilon B^*_\eta, \varepsilon] = B_0[h(t), h(t-\varepsilon\tau), \varepsilon)] + O(\varepsilon) =$$

$$= H_1 h(t) + H_2 h(t-\varepsilon\tau) + B_1[h(t), h(t-\varepsilon\tau)] + O(\varepsilon),$$

unde

$$H_1 = \frac{\partial}{\partial u} B_0(0, 0, 0), \quad H_2 = \frac{\partial}{\partial v} B_0(0, 0, 0),$$

deci din

$$B_0(u, v, \varepsilon) = \frac{1}{T}\int_0^T B(t, u, v, \varepsilon)\, dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T Z(t, \zeta^\circ + u, \zeta^\circ + v, \varepsilon)\, dt = Z_0(\zeta^\circ + u, \zeta^\circ + v, \varepsilon)$$

obţinem

$$H_1 = \frac{\partial}{\partial u} Z_0(\zeta^\circ, \zeta^\circ, 0), \quad H_2 = \frac{\partial}{\partial v} Z_0(\zeta^\circ, \zeta^\circ, 0).$$

$$B^*[t, h(t) + \varepsilon B^*_\eta, h(t-\varepsilon\tau) + \varepsilon B^*_\eta, \varepsilon] =$$

$$= B^*[t, h(t) + \varepsilon B^*_\eta, h(t) + \varepsilon B^*_\eta, \varepsilon] + O(\varepsilon) = B^*(t, h(t), h(t), \varepsilon) + O(\varepsilon).$$

Avem

$$\left(E + \varepsilon \frac{\partial B^*_\eta}{\partial u} + \varepsilon \frac{\partial B^*_\eta}{\partial v}\right) \dot h(t) = \varepsilon H_1 h(t) + \varepsilon H_2 h(t-\varepsilon\tau) + \varepsilon B_1[h(t), h(t-\varepsilon\tau)] +$$

$$+ \varepsilon B^*(t, h(t), h(t), \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} B^*_\eta(t, h(t), h(t), \varepsilon) + \varepsilon O(\varepsilon).$$

Dar

$$\left[E + \varepsilon \frac{\partial B^*_\eta}{\partial u} + \varepsilon \frac{\partial B^*}{\partial v}\right]^{-1} = E + O(\varepsilon)$$

$$B^*(t, h(t), h(t), \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial t} B^*_\eta(t, h(t), h(t), \varepsilon) = \eta B^*_\eta(t, h(t), h(t), \varepsilon),$$

Fie $\eta = \varepsilon$. Obținem în definitiv sistemul

$$\dot{h}(t) = \varepsilon \{[E + O(\varepsilon)] [H_1 h(t) + H_2 h(t - \varepsilon\tau) + B_1 [h(t), h(t - \varepsilon\tau)]] + O(\varepsilon)\}.$$

Acest ultim sistem verifică condițiile din lema 6, deci pentru $\varepsilon > 0$ suficient de mic are o soluție periodică $h(t)$ de perioadă $T$ care pentru $\varepsilon \to 0$ tinde către zero. Dar $B_\varepsilon^*(t, u, v, \varepsilon)$ este funcție periodică de perioadă $T$, deci obținem o soluție $b(t)$ periodică de perioadă $T$ care pentru $\varepsilon \to 0$ tinde către zero. Dar aceasta înseamnă că sistemul (77) are o soluție periodică $z(t)$ de perioadă $T$ care pentru $\varepsilon \to 0$ tinde către $\zeta^\circ$.

Teorema e demonstrată.

Să punem în evidență o consecință a acestei teoreme.

Considerăm sistemul

$$\dot{x}(t) = X_0(t, x) + \varepsilon X_1 [t, x(t), x(t - \varepsilon\tau), \varepsilon], \tag{79}$$

unde $X_0$ și $X_1$ sînt periodice în raport cu $t$ de perioadă $T$.

Presupunem că soluția generală a sistemului

$$\dot{x}(t) = X_0(t, x)$$

e periodică de perioadă $T$. Fie $x_0(t, h)$ această soluție.

Facem schimbarea de variabile $x = x_0(t, z)$. Obținem

$$\frac{\partial x_0(t, z)}{\partial t} + \frac{\partial x_0}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = X_0 [t, x_0(t, z)] +$$
$$+ \varepsilon X_1 [t, x_0(t, z(t)), x_0(t - \varepsilon\tau, z(t - \varepsilon\tau))].$$

Dar

$$\frac{\partial x_0(t, z)}{\partial t} = X_0 [t, x_0(t, z)];$$

$x_0(t, h)$ este soluția generală, deci matricea $\frac{\partial x_0}{\partial z}$ are inversă. De aici obținem

$$\dot{z}(t) = \varepsilon \left[\frac{\partial x_0(t, z(t))}{\partial z}\right]^{-1} X_1 [t, x_0(t, z(t)), x_0(t - \varepsilon\tau, z(t - \varepsilon\tau)), \varepsilon].$$

Dacă aplicăm teorema 4.31, obținem următorul rezultat: Fie $\zeta^\circ$ o soluție a sistemului

$$Z_0(\zeta^\circ, \zeta^\circ, 0) \equiv \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\partial x_0(t, \zeta^0)}{\partial z}\right)^{-1} X_1 [t, x_0(t, \zeta^\circ), x_0(t, \zeta^\circ), 0] \, dt = 0$$

astfel ca matricea $\frac{\partial Z_0(\zeta^\circ, \zeta^\circ, 0)}{\partial u} + \frac{\partial Z_0(\zeta^\circ, \zeta^\circ, 0)}{\partial v}$ să aibă valorile proprii cu părți reale negative; atunci sistemul (79) are o soluție periodică de perioadă $T$ care pentru $\varepsilon \to 0$, tinde către soluția $x_0(t, \zeta^\circ)$ a sistemului generator. Să observăm că în cazul cînd $X_0$ și $X_1$ sînt analitice, acest rezultat decurge din teorema 4.25 fără a presupune că întîrzierea este mică.

TEOREMA 4.33. *Se consideră sistemul* (79) *și se presupune că $X_0$ și $X_1$ sînt aproape-periodice în t, uniform în raport cu celelalte variabile și că au derivate parțiale continue pînă la ordinul al doilea inclusiv. Presupunem că sistemul*

$$\dot{x} = X_0(t, x)$$

*are soluția generală $x_0(t, h)$ aproape-periodică în t, uniform în raport cu h. Fie*

$$Z(t, u, v, \varepsilon) = \left[\frac{\partial x_0(t, u)}{\partial u}\right]^{-1} X_1[t, x_0(t, u), x_0(t - \varepsilon\tau, v), \varepsilon].$$

*Notăm*

$$Z_0(u, v, \varepsilon) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T Z(t, u, v, \varepsilon)\,dt.$$

*Fie $\zeta^\circ$ o soluție a ecuației $Z_0(u, u, 0) = 0$. Dacă valorile proprii ale matricii $\frac{\partial}{\partial u} Z_0(\zeta^\circ, \zeta^\circ, 0) + \frac{\partial}{\partial v} Z_0(\zeta^\circ, \zeta^\circ, 0)$ au părți reale negative, atunci există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încît pentru $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ sistemul* (79) *admite o soluție aproape-periodică unică, $x(t, \varepsilon)$ cu proprietatea*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x(t, \varepsilon) = x_0(t, \zeta^\circ).$$

*Demonstrație.* După schimbarea de variabile $x = x_0(t, z)$ *se capătă sistemul*

$$\dot{z}(t) = \varepsilon Z(t, z(t), z(t - \varepsilon\tau), \varepsilon)$$

iar după noua schimbare de variabile $z = \zeta^\circ + b$ se capătă

$$\frac{db(t)}{dt} = \varepsilon B[t, b(t), b(t - \varepsilon\tau), \varepsilon].$$

Notăm

$$B_0(u, v, \varepsilon) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T B(t, u, v, \varepsilon)\,dt,$$

$$B^*(t, u, v, \varepsilon) = B(t, u, v, \varepsilon) - B_0(u, b, v, \varepsilon).$$

Avem

$$B_0(0, 0, 0) = 0, \ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T B^*(t, u, v, \varepsilon)\,dt = 0$$

Fie

$$B^*_\varepsilon(t, u, v, \varepsilon) = \int_{-\infty}^t e^{-\varepsilon(t-s)} B^*(s, u, v, \varepsilon)\,ds.$$

Atunci $B_\varepsilon^*$ este o funcție aproape-periodică de $t$ și pe baza unei leme a lui N. N. Bogoliubov (Cap. III) avem

$$|B_\varepsilon^*| \leqslant \frac{\zeta(\varepsilon)}{\varepsilon},$$

unde $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \zeta(\varepsilon) = 0$.

Facem noua schimbare de variabile

$$b(t) = h(t) + \varepsilon B_\varepsilon^*(t, h(t), h(t), \varepsilon).$$

Obținem

$$\dot{h}(t) + \varepsilon \frac{\partial B_\varepsilon^*}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial B_\varepsilon^*}{\partial u} \dot{h}(t) + \varepsilon \frac{\partial B_\varepsilon^*}{\partial v} \dot{h}(t) = \varepsilon B_0 + \varepsilon B^*.$$

Dar

$$B_0 [h(t) + \varepsilon B_\varepsilon^*(t, h(t), h(t), \varepsilon), h(t - \varepsilon\tau) +$$

$$+ B_\varepsilon^*(t - \varepsilon\tau, h(t - \varepsilon\tau), h(t - \varepsilon\tau), \varepsilon), \varepsilon] = B_0[h(t), h(t - \varepsilon\tau), \varepsilon] +$$

$$+ O(\zeta(\varepsilon)) = H_1 h(t) + H_2(h(t - \varepsilon\tau) + B_1[h(t), h(t - \varepsilon\tau)] + O(\zeta(\varepsilon)) + O(\varepsilon),$$

unde

$$H_1 = \frac{\partial Z_0}{\partial u}(\zeta^\circ, \zeta^\circ, 0), \; H_2 = \frac{\partial Z_0}{\partial v}(\zeta^\circ, \zeta^\circ, 0),$$

$$|B_1(u, v)| \leqslant \beta(|u| + |v|)^2, \; |B_1(u_1, v_1) - B_1(u_2, v_2)| \leqslant$$

$$\leqslant \beta(|u_1| + |v_1| + |u_2| + |v_2|)(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|).$$

Mai departe,

$$B^*[t, h(t) + \varepsilon B_\varepsilon^*(t, h(t), h(t), \varepsilon), h(t - \varepsilon\tau) + \varepsilon B_\varepsilon^*(t -$$

$$- \varepsilon\tau, h(t - \varepsilon\tau), h(t - \varepsilon\tau), \varepsilon), \varepsilon] = B^*[t, h(t) +$$

$$+ \varepsilon B_\varepsilon^*(t, h(t), h(t), \varepsilon), h(t) + \varepsilon B_\varepsilon^*(t, h(t), h(t), \varepsilon), \varepsilon] +$$

$$+ O(\varepsilon) + O(\zeta(\varepsilon)) = B^*[t, h(t), h(t), \varepsilon] + O(\varepsilon) + O(\zeta(\varepsilon)).$$

Din

$$\frac{\partial}{\partial t} B_\varepsilon^*(t, u, v, \varepsilon) = B^*(t, u, ,v, \varepsilon) - \varepsilon B_\varepsilon^*(t, u, v, \varepsilon)$$

rezultă

$$\frac{\partial}{\partial t} B_\varepsilon^*[t, h(t), h(t), \varepsilon] = B^*[t, h(t), h(t), \varepsilon] - \varepsilon B_\varepsilon^*[t, h(t), h(t), \varepsilon]$$

și deci

$$B^*[t, h(t), h(t), \varepsilon] - \frac{\partial}{\partial t} B_\varepsilon^*[t, h(t), h(t), \varepsilon] = O(\zeta(\varepsilon)).$$

Mai departe, din

$$\varepsilon\left(\left|\frac{\partial B_\varepsilon^*}{\partial v_\tau}\right|+\left|\frac{\partial B_\varepsilon^*}{\partial v}\right|\right)<\zeta_1(\varepsilon)$$

deducem

$$\left[E+\varepsilon\frac{\partial B_\varepsilon^*}{\partial v}+\varepsilon\frac{\partial B_\varepsilon^*}{\partial v}\right]^{-1}=E+O(\zeta_2(\varepsilon)),$$

unde

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\zeta_2(\varepsilon)=0.$$

În definitiv obţinem

$$\dot h(t)=\varepsilon \dot h_1 h(t)+\varepsilon H_2 h(t-\varepsilon\tau)+\varepsilon B_1[h(t),h(t-\varepsilon\tau)]+$$
$$+\varepsilon\Gamma[t,h(t),h(t-\varepsilon\tau),\varepsilon],$$

unde $H_1=\dfrac{\partial Z_0(\zeta^\circ,\zeta^\circ,0)}{\partial u}$, $H_2=\dfrac{\partial Z_0(\zeta^\circ,\zeta^\circ,0)}{\partial v}$, $B_1$ verifică inegalităţile scrise mai sus, iar $|\Gamma(t,u,v,\varepsilon)|<\gamma(\varepsilon)$ cu $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\gamma(\varepsilon)=0$, $\Gamma$ fiind aproape-periodică în $t$, uniform în raport cu celelalte variabile.

Demonstrăm că pentru $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, acest sistem admite o soluţie aproape-periodică unică, care pentru $\varepsilon\to 0$ tinde către zero.

Din faptul că valorile proprii ale matricii $H_1+H_2$ au părţi reale negative, deducem, pe baza lemelor 4 şi 5 că există o funcţională $V[\varphi]$ cu proprietăţile :

1° $$\frac{1}{\varepsilon}\|\varphi\|^2<V[\varphi]\leqslant\frac{K_1}{\varepsilon}\|\varphi\|^2;$$

2° $$|V[\varphi_1]-V[\varphi_2]|\leqslant\frac{L_0}{\varepsilon}(\|\varphi_1\|+\|\varphi_2\|)\|\varphi_1-\varphi_2\|;$$

3° $$\lim_{h\to 0+}\sup\frac{V[y(t+h+s;t_0,\varphi)]-V[y(t+s;t_0,\varphi)]}{h}\leqslant$$
$$\leqslant-\|y(t+s;t_0,\varphi)\|^2,$$

unde $y(t;t_0,\varphi)$ e soluţia sistemului (78).

De aici, ca în demonstraţia teoremei 4.28, se deduce că pentru orice $f(t)$ aproape-periodică sistemul

$$\dot x(t)=\varepsilon H_1 x(t)+\varepsilon H_2 x(t-\varepsilon\tau)+f(t)$$

admite o soluţie aproape-periodică unică $x_0(t)$ pentru care are loc evaluarea

$$|x_0(t)|<\frac{L}{\varepsilon}\sup|f|.$$

Fie $h_0(t)$ soluția aproape-periodică a sistemului

$$\dot{h}(t) = \varepsilon H_1 h(t) + \varepsilon H_2 h(t - \varepsilon\tau) + \varepsilon \Gamma(t, 0, 0, \varepsilon).$$

Avem

$$|h_0(t)| \leqslant \frac{L}{\varepsilon} \varepsilon \gamma(\varepsilon) = L\gamma(\varepsilon).$$

Fie mai departe $h_k(t)$ soluția aproape-periodică a sistemului

$$\dot{h}(t) = \varepsilon H_1 h(t) + \varepsilon H_2 h(t - \varepsilon\tau) - \varepsilon B_1 [h_{k-1}(t), h_{k-1}(t - \varepsilon\tau)] +$$
$$+ \varepsilon \Gamma [t, h_{k-1}(t), h_{k-1}(t - \varepsilon\tau), \varepsilon].$$

Presupunem, prin inducție,

$$|h_{k-1}(t)| < 2L\gamma(\varepsilon).$$

Atunci

$$|B_1 [h_{k-1}(t), h_{k-1}(t - \varepsilon\tau)]| < 16\beta L^2 \gamma^2(\varepsilon),$$

deci

$$|h_k(t)| < \frac{L}{\varepsilon} \varepsilon \{16\beta L^2 \gamma^2(\varepsilon) + \gamma(\varepsilon)\} = L\{16\beta L^2 \gamma^2(\varepsilon) + \gamma(\varepsilon)\}.$$

Dacă $\gamma(\varepsilon) < \frac{1}{16\beta L^2}$, deducem $|h_k(t)| < 2L\gamma(\varepsilon)$ și evaluarea este demonstrată. Fie $l_k(t) = h_k(t) - h_{k-1}(t)$. Avem

$$\dot{l}_{k+1}(t) = \varepsilon H_1 l_{k+1}(t) + \varepsilon H_2 l_{k+1}(t - \varepsilon\tau) +$$
$$+ \varepsilon B_1 [h_k(t), h_k(t - \varepsilon\tau)] - \varepsilon B_1 [h_{k-1}(t), h_{k-1}(t - \varepsilon\tau)] +$$
$$+ \varepsilon \Gamma [t, h_k(t), h_k(t - \varepsilon\tau), \varepsilon] - \varepsilon \Gamma [t, h_{k-1}(t), h_{k-1}(t - \varepsilon\tau), \varepsilon].$$

Conform ipotezelor

$$|\varepsilon B_1[h_k(t), h_k(t-\varepsilon\tau)] - \varepsilon B_1[h_{k-1}(t), h_{k-1}(t-\varepsilon\tau)]| \leqslant 16\varepsilon\beta L\gamma(\varepsilon) \sup |l_k|.$$

De aici rezultă

$$|l_{k+1}(t)| \leqslant \frac{L}{\varepsilon} \varepsilon \{16\beta L\gamma(\varepsilon) \sup |l_k| + 2\gamma(\varepsilon)\}.$$

Avem $|l_0| = |h_0| \leqslant L\gamma(\varepsilon)$; presupunem că $|l_k| \leqslant 3L\gamma(\varepsilon)$. Rezultă $|l_{k+1}(t)| \leqslant L\{48\beta L^2\gamma^2(\varepsilon) + 2\gamma(\varepsilon)\}$; dacă $\gamma(\varepsilon) < \frac{1}{48\beta^2}$, deducem $|l_{k+1}(t)| < 3L\gamma(\varepsilon)$ și evaluarea e stabilită.

De aici decurge convergența uniformă a aproximațiilor succesive, deci existența soluției aproape-periodice a sistemului în $h$. Ținînd seama de schimbările de variabile efectuate, deducem existența unei soluții aproape-periodice a sistemului (79) cu toate proprietățile cerute. Teorema e demonstrată.

## § 15. ALTE TEOREME RELATIVE LA SOLUȚII PERIODICE ȘI APROAPE-PERIODICE ALE SISTEMELOR CU ÎNTÎRZIERE

Vom da în încheiere alte cîteva teoreme relative la soluțiile periodice și aproape-periodice ale sistemelor cu argument întîrziat.

TEOREMA 4.34. *Considerăm sistemul general* (52). *Dacă pentru* $\mu = 0$ *sistemul admite o soluție periodică* $x_0(t)$, *de perioadă* $\omega > \tau$, *uniform asimptotic stabilă, atunci pentru* $|\mu|$ *suficient de mic sistemul* (52) *admite o soluție periodică* $x(t,\mu)$ *cu proprietatea*

$$\lim_{\mu\to 0} x\,(t,\,\mu) = x_0\,(t).$$

*Demonstrație.* Fie $U_\omega^\mu$ operatorul definit de relația

$$U_\omega^\mu\,\varphi = x\,(t+s,\;\varphi,\,\mu),$$

unde $x(t,\varphi,\mu)$ este soluția sistemului (52) care pe $[-\tau,0]$ coincide cu $\varphi$. Vom demonstra că $U_\omega^\mu$ are un punct fix cu ajutorul teremei lui F. Browder. Nu restrîngem generalitatea luînd $x_0(t) \equiv 0$, căci ajungem la aceasta printr-o simplă schimbare de variabile care conservă proprietățile sistemului. Stabilitatea asimptotică uniformă înseamnă existența unui număr $\delta_0 > 0$ și a două funcții $\delta(\varepsilon)$ și $T(\varepsilon)$ astfel încît dacă $\|\varphi\| < \delta(\varepsilon)$, atunci $|x\,(t,\,\varphi,\,0)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant -\tau$ și dacă $\|\varphi\| < \delta_0$, $t > T\,(\varepsilon)$, atunci $|x\,(t,\,\varphi,\,0)| < \varepsilon$. Fie $\delta_1 = \delta\left(\frac{1}{2}\,h\right)$, $0 < \eta < \min\left\{\delta_0,\,\delta\left(\frac{1}{2}\,\delta_1\right)\right\}$, $T = T\left[\frac{1}{2}\,\delta\left(\frac{1}{2}\,\eta\right)\right]$, $m$ cel mai mic număr natural pentru care $m\,\omega > T+\tau$. Fie $S$ sfera $\|\varphi\| < \delta_1$. Atunci $|x\,(t,\,\varphi,\,0)| < \frac{1}{2}\,h$ pentru $\varphi \in S$ și $t > -\tau$. Dacă $|\mu|$ e suficient de mic, rezultă $|x\,(t,\,\varphi,\,\mu)| < h$ pentru $\varphi \in S$, $-\tau \leqslant t \leqslant m\omega$. De aici rezultă că pentru $\varphi \in S$ avem $\|U_\omega^\mu\,\varphi\| < h$ și ținînd seama și de sistemul (52) rezultă că operatorul $U_\omega^\mu$ este compact pe $S$. Din evaluarea obținută rezultă între altele și prelungibilitatea soluțiior cu $\varphi\in S$, deci operatorul e definit pentru toți $\varphi\in S$. Fie $S_1$ sfera $\|\varphi\|<\eta$ și $S_0$ sfera $\|\varphi\| \leqslant \frac{3}{4}\,\delta\left(\frac{1}{2}\,\eta\right)$. Pentru $\|\varphi\|<\eta$, $t\geqslant-\tau$ avem $|x\,(t,\,\varphi,\,0)| < \frac{1}{2}\,\delta_1$ deoarece $\eta < \delta\left(\frac{1}{2}\,\delta_1\right)$; pentru $|\mu|$ suficient de mic rezultă $|x(t,\,\varphi,\mu)| < \delta_1$ pentru $-\tau \leqslant t \leqslant m\omega$. De aici se deduce $[U_\omega^\mu]^j\,(S_1) \subset S$ pentru $0 \leqslant j \leqslant m$, căci $[U_\omega^\mu]^j\,(\varphi) = x(j\omega+s,\;\varphi,\;\mu)$. [Din $\|\varphi\| \leqslant \frac{3}{4}\,\delta\left(\frac{1}{2}\,\eta\right)$, $t \geqslant -\tau$ rezultă $|x(t,\;\varphi,\;0)| < \frac{1}{2}\,\eta$, deci pentru $|\mu|$ suficient de mic se capătă $|x\,(t,\,\varphi,\,\mu)| < \eta$

dacă $\|\varphi\| \leqslant \frac{3}{4}\delta\left(\frac{1}{2}\eta\right)$, $-\tau \leqslant t \leqslant m\omega$, deci $[U^{\mu}_{\omega}]^j(S_0) \subset S_1$ pentru $0 \leqslant j \leqslant m$.

Din $\eta < \delta_0$ rezultă că pentru $\varphi \in S_1$, $t > T$ avem $|x(t, \varphi, 0)| < \frac{1}{2}\delta\left(\frac{1}{2}\eta\right)$, deci pentru $|\mu|$ suficient de mic $|x(t, \varphi, \mu)| \leqslant \frac{3}{4}\delta\left(\frac{1}{2}\mu\right)$ dacă $\varphi \in S_1$, $m\omega - \tau \leqslant t \leqslant m\omega$, adică $[U^{\mu}_{\omega}]^m(S_1) \subset S_0$. Condițiile teoremei lui F. Browder sînt îndeplinite, operatorul $U^{\mu}_{\omega}$ are un punct fix, deci sistemul (52) are o soluție periodică cu proprietatea din enunț.

*Definiție. O soluție $x_0(t)$ a sistemului general (2) se numește stabilă (T) dacă există $\delta > 0$ astfel încît $\sup\limits_{t-\tau \leqslant s \leqslant t} |x(s) - x_0(s)| < \delta$ să implice $\lim\limits_{t\to\infty} \sup\limits_{t-\tau\leqslant s\leqslant t} |x(s) - x_0(s)| = 0$, oricare ar fi soluția $x(t)$ a sistemului.*

TEOREMA 4.35. *Dacă f este periodică în t cu perioadă $\omega$ și dacă sistemul (2) admite o soluție mărginită, stabilă (T), atunci ea admite o soluție periodică de perioadă $k\omega$.*

*Demonstrație.* Fie $x_0(t)$ soluția mărginită, stabilă (T). Considerăm familia de funcții $\varphi_n(s) = x_0(s + n\omega)$, $s \in [-\tau, 0]$. Avem $|\varphi_n(s)| < M$ și pentru $n$ suficient de mare rezultă și $|\dot\varphi_n(s)| < L(M)$, deci mulțimea $\{\varphi_n(s)\}$ este compactă. De aici rezultă că există $n_1$ și $n_2$ astfel ca $\max\limits_{-\tau\leqslant s\leqslant 0} |\varphi_{n_1}(s) - \varphi_{n_2}(s)| < \delta$. Fie $n_2 > n_1, k = n_2 - n_1$. Considerăm soluția $x_0(t + k\omega)$; avem $\max\limits_{n_1\omega-\tau\leqslant t\leqslant n_1\omega} |x_0(t + k\omega) - x_0(t)| = \max\limits_{-\tau\leqslant s\leqslant 0} |x_0(s + n_1\omega + k\omega) - x_0(s + n_1\omega)| =$

$$= \max_{-\tau\leqslant s\leqslant 0} | x_0(s + n_2\omega) - x_0(s + n_1\omega)| = \max_{-\tau\leqslant s\leqslant 0} |\varphi_{n_2}(s) - \varphi_{n_1}(s)| < \delta.$$

Deoarece soluția $x_0(t)$ este stabilă (T), rezultă că

$$\lim_{t\to\infty} \max_{t-\tau\leqslant s\leqslant t} | x_0(s + k\omega) - x_0(s)| = 0.$$

Din faptul că mulțimea $\{\varphi_n(s)\}$ este compactă, rezultă că există un punct limită $\varphi^*$; fie $\varphi^*(s) = \lim\limits_{j\to\infty} \varphi_{n_j}$ și $x^*(t) = x(t; 0, \varphi^*(s))$.

Atunci

$$x^*(t) = \lim_{j\to\infty} x_0(t + n_j\omega)$$

deoarece

$$x_0(t + n_j\omega) = x(t; 0, x_0(s + n_j\omega)) = x(t; 0, \varphi_{n_j}(s)).$$

Pentru $t = s + k\omega$ obținem

$$\lim_{j\to\infty} x_0(s + k\omega + n_j\omega) = x^*(s + \omega).$$

deci

$$\lim_{j\to\infty} \varphi_{n_j+k}(s) = x^*(s + k\omega).$$

Dar din

$$\lim_{t\to\infty} \max_{t-\tau\leqslant s\leqslant t} |x_0(s+k\omega) - x_0(s)| = 0$$

rezultă

$$\lim_{j\to\infty} \max_{-\tau\leqslant s\leqslant 0} |\varphi_{n_j+k}(s) - \varphi_{n_j}(s)| = 0.$$

Din

$$|\varphi_{n_j+k}(s) - \varphi^*(s)| \leqslant |\varphi_{n_j+k}(s) - \varphi_{n_j}(s)| + |\varphi_{n_j}(s) - \varphi^*(s)|$$

rezultă

$$\lim_{j\to\infty} \varphi_{n_j+k}(s) = \varphi^*(s)$$

şi aceasta înseamnă că

$$x^*(s+k\omega) = \varphi^*(s),$$

deci soluția $x^*(t)$ este periodică cu perioada $k\omega$.

În acelaşi fel se demonstrează şi următoarea propoziție.

*Dacă sistemul (2) admite o soluție mărginită $x_0(t)$ astfel ca*

$$\lim_{t\to\infty} [x_0(t+\omega) - x_0(t)] = 0,$$

*atunci el admite o soluție periodică de perioadă $\omega$.*

*Demonstrație.* Mulțimea $\{\varphi_n(s)\}$ e compactă; fie

$$\varphi^*(s) = \lim_{j\to\infty} \varphi_{n_j}(s).$$

Din

$$\lim_{j\to\infty} [x_0(s + nj\,\omega + \omega) - x_0(s + n_j\,\omega)] = 0$$

rezultă că

$$\varphi^*(s) = \lim_{j\to\infty} \varphi_{n_j+1}(s).$$

De aici demonstrația decurge ca mai sus cu $k = 1$:

$$x(t; 0, \varphi^*(s)) = \lim_{j\to\infty} x(t; 0, \varphi_{n_j}) = \lim_{j\to\infty} x(t; 0, \varphi_{n_j+1}).$$

Dar

$$x(t; 0, \varphi_{n_j}) = x_0(t + n_j\,\omega)$$

şi deci

$$x(t; 0, \varphi^*) = \lim_{j\to\infty} x_0(t + n_j\,\omega) = \lim_{j\to\infty} x_0(t + \omega + n_j\,\omega).$$

De aici, pentru $t = s + \omega$, se capătă $x(s+\omega; 0, \varphi^*) = \lim_{j\to\infty} x_0(s + \omega + n_j\,\omega) = x(s; 0, \varphi^*) = \varphi^*(s)$, ceea ce arată că soluția $x(t; 0, \varphi^*)$ e periodică de perioadă $\omega$.

TEOREMA 4.36. *Dacă $f$ este periodică în $t$, orice soluție mărginită şi uniform stabilă a sistemului* (2) *este asimptotic aproape-periodică.*

Pentru demonstrarea acestei teoreme avem nevoie de o anumită pregătire.

DEFINIŢIE. *Fie $U$ o transformare continuă a unui spaţiu metric în el însuşi. Transformarea $U$ se numeşte asimptotic aproape-periodică în punctul $p$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există întregii pozitivi $l$ şi $N$ astfel încît între oricare $l+1$ întregi pozitivi consecutivi să existe cel puţin un întreg $\tau$ pentru care $\rho(U^n p, U^{n+\tau} p) < \varepsilon$ dacă $n \geqslant N$.*

LEMĂ. *Dacă din orice şir de puncte $\{U^{n+h_m} p\}$, $(m = 1,2, \ldots)$ se poate extrage un subşir convergent uniform în raport cu $n$, atunci $U$ este asimptotic aproape-periodică în punctul $p$.*

*Demonstraţie.* Presupunem că $U$ nu este asimptotic aproape-periodică în $p$; atunci există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încît pentru orice cuplu $l, N$ există un interval de numere pozitive $L_{l,N}$ de lungime $l$ astfel încît pentru orice $\tau \in L_{l,N}$ să avem $\rho(U^n p, U^{n+\tau} p) \geqslant \varepsilon$ pentru cel puţin un $n \geqslant N$. Fie $L_1' = L_{1,1}$ şi $h_1 \in L_1'$; alegem pe $h_2$ întreg astfel ca $h_2 - h_1$ să fie în $L_2' = L_{2,2}$. Alegem mai departe un interval $L_3' = L_{\nu_3,\nu_3}$ astfel ca $\nu_3 > 2(h_2 - h_1)$; putem găsi un întreg $h_3$ astfel încît $h_3 - h_1$ şi $h_3 - h_2$ să fie în $L_3'$. În general alegem pe $L_{m+1}' = L_{\nu_{m+1},\nu_{m+1}}$ astfel încît $\nu_{m+1} > \max\limits_{1 < \lambda \leqslant m} 2(h_\lambda - h_1)$, $\nu_{m+1} > \nu_m$; e suficient de exemplu să luăm drept $h_{m+1} - h_1$ unul din întregii imediat vecini mijlocului lui $L_{m+1}'$. Considerăm şirul

$$U^{n+h_1} p,\ U^{n+h_2} p, \ldots, U^{n+h_m} p, \ldots;$$

conform ipotezei, din acest şir se poate extrage un subşir

$$U^{n+k_1} p,\quad U^{n+k_2} p, \ldots, U^{n+k_m} p, \ldots$$

convergent uniform în raport cu $n$; se poate deci găsi $R$ astfel ca

$$\rho\,(U^{n+k_{r+s}} p,\quad U^{n+k_r} p) < \varepsilon_0 \text{ pentru } r \geqslant R,\ s = 1,2, \ldots,$$

oricare ar fi $n$. Înlocuind pe $n$ cu $n - k_r$, rezultă că pentru $r \geqslant R$, $s = 1,2,3, \ldots$ şi $n > k_r$ are loc relaţia

$$\rho\,(U^{n+k_{r+s}-k_r} p,\ U^n p) < \varepsilon_0.$$

Notînd $k_{r+s} - k_r = \tau_s$, avem

$$\rho\,(U^{n+\tau_s} p,\ U^n\ p) < \varepsilon_0 \text{ pentru } n > k_r;$$

$\tau_s$ se află în intervalul $L_{m_{r+s}}'$ corespunzător lui $k_{r+s}$. Lăsăm pe $r$ fix, cu $r \geqslant R$ şi alegem pe $s$ destul de mare pentru ca $\nu_{m_{r+s}} > k_r$. Notăm $N = \nu_{m_{r+s}}$. Avem $\rho(U^{n+\tau} p, U^n p) < \varepsilon_0$ pentru $n > N$ şi $\tau \in L_{N,N}$ ceea ce contrazice felul cum au fost alese intervalele $L_{l,N}$. Lema este astfel demonstrată.

*Demonstraţia teoremei 4.36.* Fie $x_0(t)$ o soluţie mărginită, uniform stabilă a sistemului (2), $\varphi_0(s) = x_0(s)$, $s \in [-\tau, 0]$. Există $\delta(\varepsilon)$ astfel ca din $\|x_0(t_0 + s) - \psi(u)\| < \delta$ să rezulte $|x(t; t_0, \psi) - x_0(t)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0$. Pentru $t_0 = n\omega$ deducem că $\|x_0(n\omega + s) - \psi(u)\| < \delta$ implică

$| x(t; n\omega, \psi) - x_0(t) | < \varepsilon$ pentru $t \geqslant n\omega$ şi deci

$$|x(t + n\omega;\ n\omega, \psi) - x_0(t + n\omega)| < \varepsilon \text{ pentru } t \geqslant 0.$$

Dar $x(t + n\omega; n\omega, \psi) = x(t, 0, \psi^*)$, unde $\psi^*(s) = \psi(n\omega + s)$, $s \in [-\tau, 0]$, deoarece în ambii membri avem soluţii ale sistemului (2) (din cauza ipotezei că $f$ e periodică), şi cele două soluţii coincid pentru $t \in [-\tau, 0]$. Prin urmare, din

$$\| x_0(n\omega + s) - \psi^*(s) \| < \delta$$

rezultă

$$| x(t, 0, \psi^*) - x_0(t + n\omega) | < \varepsilon.$$

Considerăm operatorul $U\varphi = x(s + \omega; 0, \varphi)$. Avem

$$x(t; 0, U\varphi) = x(t; 0, x(s + \omega; 0, \varphi)) = x(t + \omega; 0, \varphi)$$

şi în general

$$x(t; 0, U^n\varphi) = x(t + n\omega; 0, \varphi), \quad x(s + n\omega; 0, \varphi) = U^n\varphi.$$

Din

$$\| x_0(n\omega + s) - \psi^* s) \| < \delta$$

rezultă

$$| x(t, 0, \psi^*) - x_0(t + n\omega) | < \varepsilon$$

şi de aici

$$\| x(s + k\omega, 0, \psi^*) - x_0(s + (n + k)\omega) \| < \varepsilon.$$

Aceasta înseamnă că din

$$\| U^n \varphi_0 - \psi^* \| < \delta$$

rezultă

$$\| U^k \psi^* - U^{n+k} \varphi_0 \| < \varepsilon, \quad k > \frac{\tau}{\omega}.$$

Fie $h_1, h_2, \ldots$ un şir de numere naturale, $\lim_{m \to \infty} h_m = \infty$. Mulţimea $\{U^{h_k}\varphi_0\}$ este compactă datorită faptului că soluţia $x_0(t)$ a fost presupusă mărginită. Fie $k_m$ un subşir astfel ca

$$\lim_{m \to \infty} U^{k_m} \varphi_0 = \varphi_0^*.$$

Avem

$$\| U^{l+k_m} \varphi_0 - U^l \varphi_0^* \| = \| U^l U^{k_m} \varphi_0 - U^l \varphi_0^* \|.$$

Pentru $m$ destul de mare avem

$$\| U^{k_m} \varphi_0 - \varphi_0^* \| < \delta$$

şi deci

$$\| U^{l+k_m} \varphi_0 - U^l \varphi_0^* \| < \varepsilon$$

pentru $l > \dfrac{\tau}{\omega}$. Aceasta înseamnă că

$$\lim_{m \to \infty} U^{l+k_m} \varphi_0 = U^l \varphi_0^*$$

uniform în raport cu $l$, pentru $l > \frac{\tau}{\omega}$. De aici pe baza lemei rezultă că $U$ este asimptotic aproape-periodică în punctul $\varphi_0$. Rămîne să deducem că soluția $x_0(t)$ este asimptotic aproape periodică. Pentru orice $\eta > 0$ există $l$ și $N$ astfel ca între $l + 1$ întregi consecutivi să putem găsi un întreg $m$ astfel ca

$$\|U^n \varphi_0 - U^{n+m} \varphi_0\| < \eta$$

dacă $n \geqslant N$; rezultă

$$\|x_0(s + n\omega) - x_0(s + (n + m)\omega)\| < \eta.$$

Fie $t$ suficient de mare, $t = t' + k\omega$, $0 \leqslant t' < \omega$; avem

$$x(t + s; 0, \varphi_0) = x(t' + k\omega + s; 0, \varphi_0) =$$

$$= x(t' + s; 0, x(k\omega + s; 0, \varphi_0)) = x(t' + s; 0, U^k \varphi_0).$$

Fie $\varepsilon > 0$; există $\eta > 0$ astfel ca din $\|\varphi - \psi\| < \eta$ să rezulte

$$\|x(t + s; 0, \varphi) - x(t + s; 0, \psi)\| < \varepsilon \quad \text{pentru} \quad 0 \leqslant t \leqslant \omega.$$

Fie $k > N(\eta)$; atunci $\|x(t + s;\ 0, \varphi_0) - x(t + s + m\omega;\ 0, \varphi_0)\| =$
$= \|x(t' + s; 0, U^k \varphi_0) - x(t' + s; 0\ U^{k+m} \varphi_0)\| < \varepsilon$ deoarece
$\|U^k \varphi_0 - U^{k+m} \varphi_0\| < \eta.$

Prin urmare

$$|x_0(t) - x_0(t + m\omega)| < \varepsilon$$

pentru $t > (N + 1)\,\omega$. Mulțimea $m\omega$ este relativ densă, deci $x_0(t)$ este asimptotic aproape-periodică.

Fără modificări esențiale în demonstrație, rezultatele din §11, capitolul III, relative la perturbațiile singulare ale sistemelor neautonome, se extind la sisteme cu argument întîrziat de forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[t, x(t), x(t-\tau), y(t), y(t-\tau), \varepsilon],$$
$$\varepsilon \frac{dy(t)}{dt} = g[t, x(t), y t), \varepsilon], \tag{80}$$

unde $f$ și $g$ sînt, în raport cu $t$, periodice, respectiv aproape-periodice (în cazul periodic, perioada va fi presupusă ca de obicei $\omega > \tau$).

Pentru $\varepsilon = 0$ se obține sistemul

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[t, x(t), x(t - \tau), y(t), y(t - \tau), 0], \tag{81}$$
$$g[t, x(t), y(t), 0] \equiv 0.$$

Presupunem că acest sistem admite o soluție $[u(t), v(t)]$ periodică, respectiv aproape-periodică.

Se notează

$$U(t) = g'_y[t, u(t), v(t), 0])^{-1} g'_x[t, u(t), v(t), 0]$$

$$A_1(t) = f'_x - f'_y\, U(t),\ B_1(t) = f'_{x_\tau} - f'_{y_\tau}\, U(t-\tau),\ A_2(t) = f'_y$$

$$B_2(t) = f'_{y_\tau},\ Q(t) = g'_y,$$

unde derivatele parțiale sînt luate în punctul

$$[t, u(t), u(t-\tau), v(t), v(t-\tau), 0].$$

TEOREMA 4.37. *Dacă sistemul* (81) *admite o soluție periodică, respectiv aproape-periodică* $[u(t), v(t)]$ *astfel ca* $\frac{Q+Q^*}{2} \leqslant -\mu E$ *și dacă soluția banală a sistemului*

$$\frac{d\xi}{dt} = A_1(t)\,\xi(t) + B_1(t)\,\xi(t-\tau) \tag{82}$$

*este uniform asimptotic stabilă, sistemul* (80) *admite o soluție periodică, respectiv aproape-periodică unică* $x(t, \varepsilon)$, $y(t, \varepsilon)$ *astfel ca*

$$x(t, \varepsilon) = u(t) + \varepsilon\xi^*(t, \varepsilon), \quad y(t, \varepsilon) = v(t) + \varepsilon\eta^*(t, \varepsilon) - \varepsilon U(t)\xi^*(t, \varepsilon).$$

TEOREMA 4.38. *Presupunem că sistemul* (81) *admite o familie de soluții periodice de perioadă* $\omega > \tau$, $[u(t, c), v(t, c)]$ *și că pentru soluția corespunzătoare valorii* $c = c_0$ *avem* $\frac{Q+Q^*}{2} \leqslant -\mu E$.

*Dacă sistemul* (80) *admite o soluție periodică de perioadă* $\omega$ *de forma*

$$x(t, \varepsilon) = u(t, c_0) + \varepsilon\xi^*(t, \varepsilon),$$
$$y(t, \varepsilon) = v(t, c_0) + \varepsilon\eta^*(t, \varepsilon) - \varepsilon U(t)\,\xi^*(t, \varepsilon),$$

*atunci*

$$\int_0^\omega q_j(t, c_0)\,\{A_2(t, c_0)\,\eta^{**}(t, c_0) + B_2(t, c_0)\,\eta^{**}(t-\tau, c_0) + f'_\varepsilon\}\,dt = 0$$

*pentru toate soluțiile periodice independente* $q_j(t, c_0)$ *de perioadă* $\omega$ *ale sistemului adjunct sistemului* (82).

*Funcția* $\eta^{**}(t, c_0)$ *este dată de formula*

$$\eta^{**}(t, c_0) = -Q^{-1}(t, c_0)\left[g'_\varepsilon - \frac{dv(t, c_0)}{dt}\right].$$

## COMENTARII BIBLIOGRAFICE

Expuneri de ansamblu relative la sistemele cu întîrziere se găsesc în [65], [66]. Rezultate cu privire la teoria stabilității sistemelor cu întîrziere precum şi inegalitatea fundamentală din § 1 se găsesc în monografia [15]. Rezultatele din §§ 1,2 au fost publicate în [67], [68], [69], [70]. Rezultatele din § 3 sînt publicate în [71], cele din § 4 parțial în [72], iar cele din § 5 într-o lucrare comună cu V. M. Popov [73]. Rezultatele din § 6 sînt publicate în [74], [75], [76], iar cele din §§ 7, 8, 9, 10 în [77], [78]. Pentru cazul sistemelor liniare cu coeficienți constanți rezultatele au fost date de S. N. Simanov în [79], [80]. Teoria sistemelor cu parametru mic se găseşte în [67] şi în [81], [82]. Pentru sisteme cvasiliniare rezultatele au fost stabilite de S. N. Simanov [83]. Rezultatele din § 13 sînt publicate în [49], iar cele relative la metoda mediei în [84], [85]. Teorema 4.33 se află în [86]. Teoremele 4.34 şi 4. 35 se află în [67] iar teorema 4.36 în [87].

ANEXĂ

## I. ELEMENTE DE TEORIA TRANSFORMATEI FOURIER

Fie $f$ o funcție de modul integrabil, $f \in L^1(-\infty, +\infty)$. Numim transformata Fourier a funcției $f$ funcția

$$\Phi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha t} f(t)\, dt, \ \alpha \text{ real.}$$

Stabilim următoarele proprietăți:

1° Funcția $\Phi$ este *mărginită*, căci

$$|\Phi(\alpha)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty.$$

2° Funcția $\Phi$ este *continuă*, căci

$$|e^{-iht} - 1| = |\cos ht - i \sin ht - 1| = \left| -2\sin^2 \frac{ht}{2} - 2i \sin\frac{ht}{2}\cos\frac{ht}{2}\right| =$$

$$= \left|2\sin\frac{ht}{2}\right| \left| -\sin\frac{ht}{2} - i\cos\frac{ht}{2}\right| = \left|2\sin\frac{ht}{2}\right|$$

de unde

$$|\Phi(\alpha + h) - \Phi(\alpha)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\alpha+h)t} f(t)\, dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} f(t)\, dt\right| =$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t}(e^{-iht} - 1) f(t)\, dt\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-iht} - 1|\, |f(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \left|\sin\frac{ht}{2}\right| dt \leqslant 2\int_{-\infty}^{-R} |f(t)|\, dt + 2\int_{-R}^{R} |f(t)| \left|\sin\frac{ht}{2}\right| dt +$$

$$+ 2\int_{R}^{\infty} |f(t)|\, dt \leqslant 2\int_{-\infty}^{-R} |f(t)|\, dt + 2\int_{R}^{\infty} |f(t)|\, dt + \frac{2\,|h|\,R}{2}\int_{-R}^{R} |f(t)|\, dt.$$

Pentru $\varepsilon > 0$ există $R_0$ astfel încît dacă $R > R_0$ să rezulte

$$\int_{-\infty}^{-R} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{6}, \quad \int_{R}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{6}$$

Fixăm pe $R > R_0$ şi alegem $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{3R\int_{-R}^{R}|f(t)|\,\mathrm{d}t}$. Rezultă că dacă $|h| < \delta(\varepsilon)$, atunci $|h|\ R\int_{-R}^{R}|f(t)|\,\mathrm{d}t < \dfrac{\varepsilon}{3}$. În definitiv, pentru $|h| < \delta(\varepsilon)$ rezultă $|\Phi(\alpha + h) - \Phi(\alpha)| < \varepsilon$, deci $\Phi$ este *uniform continuă pe toată axa*

3° Dacă $f \in L^1$ şi $itf(t) \in L^1$, $\Phi'(\alpha)$ există şi este transformata Fourier a funcţiei $-itf(t)$:

$$\frac{\Phi(\alpha+h)-\Phi(\alpha)}{h} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha t}(e^{-iht}-1)}{h} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t}\frac{e^{-iht}-1}{h} f(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} f_h(t)\,\mathrm{d}t,$$

unde am notat

$$f_h(t) = \frac{e^{-iht}-1}{h} f(t).$$

Se vede că

$$\lim_{h\to 0} f_h(t) = -itf(t),$$

$$|f_h(t)| \leqslant \frac{|e^{-iht}-1|}{|h|}|f(t)| = \frac{2\left|\sin\frac{ht}{2}\right|}{|h|}|f(t)| \leqslant |t|\,|f(t)| \in L^1$$

deci $f_h(t) \in L^1$. Rezultă că putem trece la limită sub semnul de integrare şi obţinem

$$\Phi'(\alpha) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t}\, itf(t)\,\mathrm{d}t.$$

4° Dacă $f' \in L^1, f \in L^1$, atunci transformata Fourier a lui $f'$ este $i\alpha\Phi(\alpha)$. Avem, evident,

$$f(X) - f(x) = \int_x^X f'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{(teorema lui Leibniz-Newton)},$$

deci, deoarece $f' \in L^1$, rezultă

$$\lim_{X\to\infty} f(X) = l.$$

Dar $f \in L^1$ şi din

$$\lim_{X\to\infty} f(X) = l,$$

rezultă obligatoriu că $l = 0$. Putem deci scrie că

$$f(x) = -\int_x^{\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Mai departe

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\alpha t} f'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x_1\to\infty\\ x_2\to\infty}} \int_{-x_1}^{x_2} \mathrm{e}^{-i\alpha t} f'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x_1\to\infty\\ x_2\to\infty}} \left\{ \mathrm{e}^{-i\alpha t} f(t) \Big|_{-x_1}^{x_2} + \right.$$

$$\left. + i\alpha \int_{-x_1}^{x_2} \mathrm{e}^{-i\alpha t} f(t)\,\mathrm{d}t \right\} = i\alpha\Phi(\alpha).$$

DEFINIŢIE. *Fie* $f, g \in L^1$. *Funcţia*

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(x-y)\,\mathrm{d}y$$

*se numeşte produsul de compoziţie al funcţiilor f şi g.*

TEOREMA 1. *Dacă* $f, g \in L^1$, *atunci h e definit pentru aproape orice x real,* $h \in L^2$ *şi avem*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f|\,\mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} |g|\,\mathrm{d}t.$$

*Transformata Fourier a lui h este produsul transformatelor Fourier ale funcţiilor f şi g.*

*Demonstraţie.* Avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)|\,|g(t)|\,\mathrm{d}x = |g(t)| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)|\,\mathrm{d}x = |g(t)| \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

deci

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, g(t)\,\mathrm{d}x \right| < L\,|g(t)|$$

deci

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, g(t)\,\mathrm{d}x \in L^1$. Rezultă că $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, g(t)\,\mathrm{d}x$ există şi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)|\,|g(t)|\,\mathrm{d}x < \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\,\mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Funcţia $f$ e măsurabilă, deci $f(x-t)$ e măsurabilă în spaţiul produs al variabilelor $(x, t)$. Se poate aplica teorema lui Fubini şi avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)|\,|g(t)|\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)|\,|g(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant$$

$$\geqslant \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Rezultă că $h$ există aproape peste tot (teorema lui Fubini),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, g(t)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, g(t)\, \mathrm{d}t, \quad h \in L^1$$

şi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, h(x)\, |\, \mathrm{d}x \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\, g(t)\, |\, \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} |\, f(t)\, |\, \mathrm{d}t.$$

Mai departe

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\alpha x}\, h(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\alpha x}\, \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, \mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\alpha(x-y)} f(x-y)\, \mathrm{e}^{-i\alpha y}\, g(y)\, \mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\alpha y}\, g(y)\, \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\alpha(x-y)} f(x-y)\, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\alpha y}\, g(y)\, \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\alpha t} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

TEOREMA 2. *Fie* $f_1, f_2 \in L^1$, $\Phi_1(\alpha)$, $\Phi_2(\alpha)$ *transformatele Fourier corespunzătoare. Atunci*

$$\Phi_1(y)\, f_2(y) \in L^1, \quad \Phi_2(y)\, f_1(y) \in L^1$$

*şi în plus*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1 f_2\, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2 f_1\, \mathrm{d}y.$$

*Demonstraţie*. Prima afirmaţie este imediată, deoarece $\Phi_1$ şi $\Phi_2$ sînt mărginite;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(y) f_2(y)\, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)\, \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-iyx} f_1(x)\, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ixy} f_1(x) f_2(y)\, \mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ixy} f_1(x) f_2(y)\, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ixy} f_2(y)\, \mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(x) f_1(x)\, \mathrm{d}x.$$

TEOREMA 3. *Fie* $f \in L^1 \cap L^2$. *Atunci* $\Phi \in L^2$ şi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, \Phi(x)\, |^2\, \mathrm{d}x = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\, f(x)\, |^2\, \mathrm{d}x.$$

*Demonstrație*. Fie $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y)\bar{f}(y)\mathrm{d}y$. Integrala există datorită faptului că $f \in L^2$. Avem

$$|h(x)|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+y)|^2 \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{f}(y)|^2 \mathrm{d}y \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 \mathrm{d}y\right)^2 < \infty$$

deci $h$ este mărginită. Funcția $h$ este și continuă, căci

$$|h(x+\delta) - h(x)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x+\delta+y)\bar{f}(y)\,\mathrm{d}y - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)\bar{f}(y)\mathrm{d}y\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} [f(x+\delta+y) - f(x+y)]\bar{f}(y)\mathrm{d}y\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+\delta+y) - f(x+y)| \cdot |\bar{f}(y)|\mathrm{d}y \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+y+\delta) - f(x+y)|\,\mathrm{d}y \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{f}(y)|^2 \mathrm{d}y\right\}^{1/2}.$$

Dar pentru funcțiile din $L^2$ avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+y+\delta) - f(x+y)|^2 \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t+\delta) - f(t)|^2 \mathrm{d}t$$

oricît de mică dacă $\delta$ e suficient de mic, de unde rezultă continuitatea funcției $h$.

Mai departe

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)\bar{f}(y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-z)\bar{f}(-z)\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-z)g(z)\mathrm{d}z,$$

unde am notat $g(z) = \bar{f}(-z)$.

Rezultă că $h$ este produsul de compoziție al funcțiilor $f$ și $g$, deci transformata Fourier a lui $h$ există și coincide cu produsul transformatelor funcțiilor $f$ și $g$.

Transformata Fourier a lui $g$ se calculează în modul următor:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\alpha t} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\alpha t}\bar{f}(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\alpha s}\bar{f}(s)\,\mathrm{d}s = \bar{\Phi}(\alpha).$$

Rezultă că transformata Fourier a funcției $h$ este

$$\Phi(\alpha)\,\bar{\Phi}(\alpha) = |\Phi(\alpha)|^2$$

Fie $\gamma(x) = \mathrm{e}^{-\varepsilon x^2}$. Avem

$$\gamma'(x) = -2\varepsilon x \mathrm{e}^{-\varepsilon x^2} = 2\varepsilon i\; ix\; \gamma(x).$$

Notăm

$$\Psi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\alpha t}\gamma(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pe baza proprietăților 3° și 4° avem

$$i\alpha\Psi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t}\gamma'(t)\,dt = 2\varepsilon i\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} it\gamma(t)\,dt = -2\varepsilon i\Psi'(\alpha).$$

Rezultă

$$\Psi'(\alpha) = -\frac{\alpha}{2\varepsilon}\Psi(\alpha), \quad \frac{\Psi'(\alpha)}{\Psi(\alpha)} = -\frac{\alpha}{2\varepsilon}$$

deci

$$\Psi(\alpha) = Ce^{-\frac{\alpha^2}{4\varepsilon}}; \; C = \Psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\,.$$

Rezultă

$$\Psi(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\, e^{-\frac{\alpha^2}{4\varepsilon}}.$$

Aplicăm funcțiilor $\gamma$ și $h$ teorema 2.
Rezultă

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(\alpha)|^2 e^{-\varepsilon\alpha^2}\,d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)e^{-\frac{\alpha^2}{4\varepsilon}}\,d\alpha = 2\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(2\sqrt{\varepsilon}\,y)e^{-y^2}\,dy.$$

Pentru $\varepsilon \to 0$ obținem

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(\alpha)|^2\,d\alpha = 2\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(0)e^{-y^2}\,dy = 2\sqrt{\pi}\,h(0)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = 2\pi h(0).$$

Dar

$$h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\bar{f}(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|^2\,dy.$$

Teorema e demonstrată.

TEOREMA 4. *Fie $f_1, f_2 \in L^1 \cap L^2$, iar $\Phi_1$, $\Phi_2$ transformatele lor Fourier. Atunci*

$$\int_{-\infty}^{\infty}(f_1\bar{f_2} + f_2\bar{f_1})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\Phi_1\bar{\Phi}_2 + \Phi_2\bar{\Phi}_1)\,dt.$$

*Demonstrație.* Pe baza teoremei precedente,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f_1 + f_2|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_1 + \Phi_2|^2\,dt,$$

sau

$$\int_{-\infty}^{\infty}(f_1 + f_2)(\bar{f_1} + \bar{f_2})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\Phi_1 + \Phi_2)(\bar{\Phi}_1 + \bar{\Phi}_2)\,dt.$$

Prin urmare

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_1|^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} |f_2|^2 \, dt + \int_{-\infty}^{\infty} (f_1 \bar{f}_2 + f_2 \bar{f}_1) \, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} | \Phi_1 |^2 dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} | \Phi_2 |^2 \, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ( \Phi_1 \overline{\Phi}_2 + \Phi_2 \overline{\Phi}_1) \, dt.$$

Ţinînd seama de teorema precedentă, rezultă formula din enunţ.
CONSECINŢĂ. Dacă $f_1$ şi $f_2$ sînt reale, formula devine

$$2\int_{-\infty}^{\infty} f_1 f_2 \, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (2 \, \mathcal{Re} \, \Phi_1 \overline{\Phi}_2) \, dt,$$

deci

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1 f_2 \, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{Re} \, \Phi_1(\alpha) \overline{\Phi}_2(\alpha) \, d\alpha.$$

Dar

$$\Phi_2(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} f_2(t) \, dt,$$

deci

$$\overline{\Phi}_2(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t} f_2(t) \, dt = \Phi_2(-\alpha),$$

deoarece $f_2$ e reală
Rezultă în definitiv că dacă $f_1$ şi $f_2$ sînt reale,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1 \, f_2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{Re} \;\; \Phi_1(\alpha) \, \Phi_2(-\alpha) \, d\alpha.$$

Dacă funcţiile $f_1$ şi $f_2$ sînt date numai pe $[0,\infty)$, le prelungim cu valoarea nulă pe $(-\infty, 0)$ şi formula precedentă devine

$$\int_{0}^{\infty} f_1 f_2 \, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{Re} \, \Phi_1(\alpha) \, \Phi_2(-\alpha) \, d\alpha.$$

*Observaţie*. Dacă $f$ e definită pe $(0,\infty)$ şi e derivabilă, cu derivata în $L^1$, rezultă

$$\int_{0}^{\infty} e^{-i\alpha t} f'(t) \, dt = e^{-i\alpha t} f(t) \Big|_{0}^{\infty} + i\alpha \int_{0}^{\infty} e^{-i\alpha t} f(t) \, dt = -f(0) + i \, \alpha \, \Phi(\alpha).$$

## II. PERMUTAREA ORDINII DE INTEGRARE LA INTEGRALA STIELTJES

În cele ce urmează vom reproduce o teoremă a lui H. E. Bray, relativă la permutarea ordinii de integrare în teoria integralei Stieltjes, care s-a folosit în repetate rînduri în teoria sistemelor generale cu întîrziere.

TEOREMĂ. *Dacă* $\varphi(s)$ *este continuă în* $[a, b]$, $\gamma(x)$ *cu variație mărginită în* $[c, d]$, $\alpha(x, s)$ *continuă în* $x$ *pentru* $s \in [a, b]$ *și cu variație mărginită în raport cu* $s$, *uniform pentru* $x \in [c, d]$, *integralele*

$$\int_c^d \left[\int_a^b \varphi(s)\, d_s\, \alpha(x, s)\right] d\gamma(x) \text{ și } \int_a^b \varphi(s)\, d_s \int_c^d \alpha(x, s)\, d\gamma(x)$$

*există și sînt egale.*

*Demonstrație.* Fie

$$\Phi(x) = \int_a^b \varphi(s) d_s\, \alpha(x, s), \quad \psi(s) = \int_c^d \alpha(x, s)\, d\gamma(x).$$

Se verifică ușor că $\psi$ este cu variație mărginită și $\Phi$ este continuă. De aici rezultă existența celor două integrale. Prin calcul direct se verifică formula

$$\sum_{j=0}^{m} \left[\sum_{i=0}^{n} \varphi(s_i) \{\alpha(x_j, s_{i+1}) - \alpha(x_j, s_i)\}\right] [\gamma(x_{j+1}) - \gamma(x_j)] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \varphi(s_i) \left[\sum_{j=0}^{m} \alpha(x_j, s_{i+1}) \{\gamma(x_{j+1}) - \gamma(x_j)\} - \sum_{j=0}^{m} \alpha(x_j, s_i) \{\gamma(x_{j+1}) - \gamma(x_j)\}\right]$$

Fie $\varepsilon > 0$. Pentru diviziuni de normă suficient de mică avem

$$\left|\int_c^d \Phi(x)\, d\gamma(x) - \sum_{j=0}^{m} \Phi(x_j) \{\gamma(x_{j+1}) - \gamma(x_j)\}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\left|\sum_{j=0}^{m} \Phi(x_j) \{\gamma(x_{j+1}) - \gamma(x_j)\} - \sum_{j=0}^{m} \left[\sum_{i=0}^{n} \varphi(s_i)\{\alpha(x_j, s_{i+1}) - \alpha(x_j, s_i)\}\right] \{\gamma(x_{j+1}) - \right.$$

$$\left. - \gamma(x_j)\}\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Rezultă

$$\left|\int_c^d \Phi(x)\, d\gamma(x) - \sum_{j=0}^{m} \left[\sum_{j=0}^{n} \varphi(s_i)\{\alpha(x_j, s_{i+1}) - \alpha(x_j, s_i)\}\right]\left[\gamma(x_{j+1}) - \gamma(x_j)\right]\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

La fel, pentru diviziuni de normă destul de mică

$$\left|\int_a^b \varphi(s)\, d\psi(s) - \sum_{i=0}^{n'} \varphi(s_i) [\psi(s_{i+1}) - \psi(s_i)]\right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\left|\sum_{i=0}^{n'} \varphi(s_i)[\psi(s_{i+1}) - \psi(s_i)] - \sum_{i=0}^{n'} \varphi(s_i) \left[\sum_{j=0}^{m'} \alpha(x_j, s_{i+1}) \{\gamma(x_{j+1}) - \gamma(x_j)\right\} - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=0}^{m'} \alpha(x_j, s_i)\{\gamma(x_{j+1}) - \gamma(x_j)\}\right]\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

deci

$$\left|\int_a^b \varphi(s)\, d\psi(s) - \sum_{i=0}^{n'} \varphi(s_i) \left[\sum_{j=0}^{m'} \alpha(x_j, s_{i+1}) \{\gamma(x_{j+1}) - \gamma(x_j)\} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{j=0}^{m'} \alpha(x_j, s_i) \{\gamma(x_{j+1}) - \gamma(x_j)\}\right]\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

În definitiv, pentru diviziuni de normă suficient de mică, convenabil alese,

$$\left|\int_c^d \Phi(x)\,\mathrm{d}\gamma(x) - \int_a^b \varphi(s)\,\mathrm{d}\psi(s)\right| < \varepsilon,$$

deci

$$\int_c^d \Phi(x)\,\mathrm{d}\gamma(x) = \int_a^b \varphi(s)\,\mathrm{d}\psi(s).$$

Teorema este astfel demonstrată.

Să observăm că aceleaşi calcule rămîn valabile în cazul cînd funcţiile care intervin au valori matriciale pentru care înmulţirea este permisă. De asemenea se demonstrează la fel formula de forma

$$\int_a^b y(\alpha)\left[\int_c^d x(s)\,\mathrm{d}_s\eta(\alpha, s-\alpha)\right]\mathrm{d}\alpha = \int_c^d x(s)\,\mathrm{d}_s\int_a^b y(\alpha)\,\eta(\alpha, s-\alpha)\,\mathrm{d}\alpha.$$

Presupunînd $\eta(\alpha, s) \equiv 0$ pentru $s \geqslant 0$, are loc formula

$$\int_a^b y(\alpha)\left[\int_{-A}^{\alpha} x(s)\,\mathrm{d}_s\,\eta(\alpha, s-\alpha)\right]\mathrm{d}\alpha = \int_{-A}^{a} x(s)\,\mathrm{d}_s\int_a^b y(\alpha)\,\eta(\alpha, s-\alpha)\mathrm{d}\alpha +$$
$$+ \int_a^b x(s)\,\mathrm{d}_s\int_s^b y(\alpha)\,\eta(\alpha, s-\alpha)\,\mathrm{d}\alpha.$$

Într-adevăr, ţinînd seama de condiţia impusă lui $\eta$ deducem că

$$\int_\alpha^b x(s)\,\mathrm{d}_s\,\eta(\alpha, s-\alpha) = 0 \quad \text{pentru} \quad a \leqslant \alpha \leqslant b,$$

deci

$$\int_a^b y(\alpha)\left[\int_{-A}^{\alpha} x(s)\,\mathrm{d}_s\,\eta(\alpha, s-\alpha)\right]\mathrm{d}\alpha = \int_a^b y(\alpha)\left[\int_{-A} x(s)\,\mathrm{d}_s\,\eta(\alpha, s-\alpha)\right]\mathrm{d}\alpha =$$
$$= \int_{-A}^{b} x(s)\,\mathrm{d}_s\int_a^b y(\alpha)\,\eta(\alpha, s-\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \int_{-A}^{a} x(s)\,\mathrm{d}_s\int_a^b y(\alpha)\,\eta(\alpha, s-\alpha)\,\mathrm{d}\alpha +$$
$$+ \int_a^b x(s)\,\mathrm{d}_s\int_a^b y(\alpha)\,\eta(\alpha, s-\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \int_{-A}^{a} x(s)\,\mathrm{d}_s\int_a^b y(\alpha)\,\eta(\alpha, s-\alpha)\,\mathrm{d}\alpha +$$
$$+ \int_a^b x(s)\,\mathrm{d}_s\int_s^b y(\alpha)\,\eta(\alpha, s-\alpha)\,\mathrm{d}\alpha,$$

deoarece pentru $s \geqslant a$ şi $a \leqslant \alpha \leqslant s$ avem $s - \alpha \geqslant 0$ şi $\eta(\alpha, s-\alpha) \equiv 0$. Ultima formulă obţinută este cea folosită în mod sistematic în teoria sistemelor cu întîrziere.

## III. TEORIA STABILITĂȚII SISTEMELOR LINIARE STAȚIONARE CU ÎNTÎRZIERE

În cele ce urmează vom prezenta, după N. N. Krasovski, teoria generală a stabilității sistemelor liniare staționare cu întîrziere, bazată pe teoria semigrupurilor.

Se consideră un sistem de forma

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\tau}^{0} x_j(t+s)\, d\eta_{ij}(s).$$

Dacă $d\eta_{ij}=0$ pentru $s \neq h_{ij}$, $d\eta_{ij}=a_{ij}$ pentru $s = -\tau_{ij}$ se obține un sistem de forma

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_j(t-\tau_{ij}).$$

Considerăm operatorul $T(t)$ definit pe spațiul funcțiilor vectoriale continue pe $[-\tau,0]$ prin relația

$$T(t)\,\varphi = x(t+s\,;\,\varphi).$$

Deoarece sistemul este liniar, operatorul $T(t)$ este liniar. În plus, ținînd seama de faptul că sistemul este staționar

$$T(t_1+t_2)\,\varphi = x(t_1+t_2+s\,;\,\varphi) = x(t_1+s\,;\,x(t_2+s\,;\,\varphi)) =$$

$$= T(t_1)\,x(t_2+s\,;\,\varphi) = T(t_1)\,T(t_2)\,\varphi.$$

Într-adevăr, o dată cu $x(t;\varphi)$ este soluție și $x(t+t_2\,;\,\varphi)$; pe $[-\tau,0]$ soluția $x(t+t_2\,;\,\varphi)$ coincide cu $x(t_2+s\,;\varphi)$, deci $x(t+t_2\,;\varphi)=x(t\,;x(t_2+s\,;\varphi))$.

Punînd aici $t = t_1 + s$ se capătă relația pe care am folosit-o.

Relația

$$T(t_1+t_2) = T(t_1)\,T(t_2), \quad t_1 \geqslant 0, \quad t_2 \geqslant 0,$$

arată că $T(t)$ formează un *semigrup*.

Ținînd seama de inegalitatea fundamentală (3) din capitolul IV rezultă

$$\|T(t)\varphi\| \leqslant e^{Lt}\,\|\varphi\|, \quad \text{pentru} \quad t \geqslant 0.$$

Conform definiției operatorului $T(t)$, rezultă și

$$\lim_{t\to 0+} T(t) = I,$$

unde $I$ este operatorul identic, iar limita este în topologia tare, adică

$$\lim_{t\to 0+} \|T(t)\,\varphi - \varphi\| = 0$$

pentru orice $\varphi$ din spațiul considerat.

Introducem operatorul infinitezimal generator al semigrupului, definit prin

$$A\varphi = \lim_{\xi \to 0+} \frac{1}{\xi}[T(\xi)\,\varphi - \varphi].$$

Ținînd seama de definiția operatorului $T$ rezultă

$$A\varphi = \lim_{\xi \to 0+} \frac{1}{\xi}[x(\xi + s\,;\,\varphi) - \varphi].$$

Dacă $\varphi$ este derivabilă și $s < 0$, pentru $\xi + s < 0$ avem

$$x(\xi + s\,;\,\varphi) = \varphi(\xi + s)$$

și deci dacă $\psi(s) = A\,\varphi$, avem

$$\psi(s) = \lim_{\xi \to 0+} \frac{1}{\xi}[\varphi(\xi + s) - \varphi(s)] = \varphi'(s),$$

unde $\varphi'(s)$ este derivata la dreapta a funcției $\varphi$.

Pentru $s = 0$, $x(\xi\,;\,\varphi)$ este soluție a sistemului, $x(0\,;\,\varphi) = \varphi(0)$ și

$$\lim_{\xi \to 0+} \frac{1}{\xi}[x(\xi\,;\,\varphi) - x(0\,;\,\varphi)] = x'[0\,;\,\varphi].$$

Conform sistemului rezultă

$$x'[0\,;\,\varphi] = \int_{-\tau}^{0} \varphi(s)\,d\eta(s).$$

Prin urmare, operatorul $A$ este sigur definit pe mulțimea funcțiilor care admit derivată la dreapta și dacă $\varphi$ este o asemenea funcție iar $\psi = A\,\varphi$, atunci

$$\psi(s) = \varphi'(s) \quad -\tau \leqslant s < 0,$$

$$\psi(0) = \int_{-\tau}^{0} \varphi(s)\,d\,\eta(s).$$

Să determinăm spectrul operatorului $A$, adică mulțimea valorilor $\lambda$ pentru care operatorul $\lambda I - A$ nu admite un invers mărginit. Dacă $\chi = (\lambda I - A)\,\varphi$, atunci

$$\chi(s) = \lambda\,\varphi(s) - \varphi'(s) \text{ pentru } -\tau \leqslant s < 0,$$

$$\chi(0) = \lambda\,\varphi(0) - \int_{-\tau}^{0} \varphi(s)\,d\,\eta(s).$$

Căutăm valorile $\lambda$ pentru care aceste relații nu pot fi rezolvate unic în raport cu $\varphi$ cînd $\chi$ este dată continuă.

Prima relație dă

$$\varphi(s) = \varphi_0 e^{\lambda s} - \int_0^s e^{\lambda(s-\sigma)} \chi(\sigma) d\sigma.$$

Înlocuind pe $\varphi$ în cea de-a doua relație se obține

$$\chi(0) = \lambda \varphi_0 - \int_{-\tau}^0 \left[\varphi_0 e^{\lambda s} - \int_0^s e^{\lambda(s-\sigma)} \chi(\sigma) d\sigma\right] d\eta(s) =$$

$$= \lambda \varphi_0 - \varphi_0 \int_{-\tau}^0 e^{\lambda s} d\eta(s) + \int_{-\tau}^0 \left[\int_0^s e^{\lambda(s-\sigma)} \chi(\sigma) d\sigma\right] d\eta(s).$$

Deci pentru determinarea valorilor $\varphi_0$, se obține sistemul liniar

$$\varphi_0 \left(\int_{-\tau}^0 e^{\lambda s} d\eta(s) - \lambda E\right) = \int_{-\tau}^0 \left[\int_0^s e^{\lambda(s-\sigma)} \chi(\sigma) d\sigma\right] d\eta(s) - \chi(0).$$

Rezultă de aici că valorile $\lambda$ pentru care sistemul nu admite soluție unică sînt soluțiile ecuației

$$\det\left(\int_{-\tau}^0 e^{\lambda s} d\eta(s) - \lambda E\right) = 0.$$

În cazul particular al sistemelor cu argument întîrziat se obține ecuația

$$\det(a_{ij} e^{-\lambda \tau_{ij}} - \lambda \delta_{ij}) = 0.$$

TEOREMĂ. *Dacă spectrul operatorului $A$ se află în semiplanul* $\mathcal{Re}\, \lambda \leqslant -\gamma$, $\gamma > 0$, *soluțiile sistemului verifică inegalitatea* $\| x(t+s;\varphi)\| \leqslant \leqslant Be^{-\alpha t} \|\varphi\|$ *pentru* $t \geqslant 0$, *unde se poate lua* $\alpha = q\gamma$, $0 < q < 1$ *arbitrar.*

*Demonstrație.* Fie $z(t;\varphi) = e^{\gamma t} x(t;\varphi)$. Avem

$$\frac{dz}{dt} = \gamma e^{\gamma t} x(t;\varphi) + e^{\gamma t} \frac{dx}{dt} = \gamma z(t;\varphi) + e^{\gamma t} \int_{-\tau}^0 x(t+s;\varphi) d\eta(s),$$

deci

$$\frac{dz(t;\varphi)}{dt} = \gamma z(t;\varphi) + e^{\gamma t} \int_{-\tau}^0 e^{-\gamma(t+s)} z(t+s;\varphi) d\eta(s).$$

Rezultă că $z(t;\varphi)$ este soluție a sistemului

$$\frac{dz}{dt} = \gamma z + \int_{-\tau}^0 z(t+s) e^{-\gamma s} d\eta(s).$$

Acest sistem definește și el un semigrup de operatori $T_0(t)$, al cărui operator infinitezimal generator este dat de :

$$A_0 \varphi = \begin{cases} \varphi'(s) & -\tau \leqslant s < 0 \\ \gamma \varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \varphi(s) e^{-\gamma s} d\eta(s). \end{cases}$$

Pentru $T_0\ (t)$ are loc, la fel ca pentru $T\ (t)$, o evaluare de forma

$$\| T_0\ (t) \| \leqslant e^{L_0 t}.$$

Aceleaşi calcule ca mai sus permit să se obţină spectrul operatorului $A_0$. Se formează ecuaţiile

$$\chi\ (s) = \lambda\ \varphi\ (s) - \varphi'\ (s) \text{ pentru } -\tau \leqslant s < 0,$$

$$\chi\ (0) = \lambda\ \varphi\ (0) - \gamma\ \varphi\ (0) - \int_{-\tau}^{0} \varphi\ (s)\ e^{-\gamma s}\, d\eta\ (s).$$

Rezultă

$$\varphi\ (s) = \varphi_0\, e^{\lambda s} - \int_0^s e^{\lambda(s-\sigma)}\ \chi\ (\sigma)\ d\sigma$$

şi

$$\chi\ (0) = (\lambda - \gamma)\ \varphi_0 - \int_{-\tau}^{0} \left[\varphi_0\, e^{\lambda s} - \int_0^s e^{\lambda\ (s-\sigma)}\ \chi\ (\sigma)\, d\sigma\right] e^{-\gamma s}\, d\eta\ (s)$$

de unde se capătă pentru $\varphi_0$ sistemul

$$\varphi_0 \left(\int_{-\tau}^{0} e^{(\lambda-\gamma)s}\ d\eta\ (s) - (\lambda - \gamma) E\right) = \int_{-\tau}^{0} \left[\int_0^s e^{\lambda\ (s-\sigma)}\ \chi\ (\sigma)\ d\sigma\right] e^{-\gamma s}\, d\eta\ (s).$$

Prin urmare, spectrul lui $A_0$ e dat de ecuaţia

$$\det\left(\int_{-\tau}^{0} e^{(\lambda-\gamma)\,s}\ d\ \eta\ (s) - (\lambda - \gamma)\ E\right) = 0.$$

Se vede deci că dacă $\lambda$ aparţine spectrului lui $A_0$, atunci $\lambda - \gamma$ aparţine spectrului lui $A$ deci, conform ipotezei, $\mathcal{R}e\ (\lambda - \gamma) \leqslant -\gamma$, de unde rezultă $\mathcal{R}e\ \lambda \leqslant 0$.

Prin urmare, spectrul operatorului $A_0$ se află în semiplanul $\mathcal{R}e\ \lambda \leqslant 0$. Ţinînd seama de evaluarea pentru operatorul $T_0(t)$ se deduce, pe baza unei teoreme generale din teoria semigrupurilor,

$$T_0\ (\xi)\ \varphi = \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 - i\omega}^{\gamma_1 + i\omega} e^{\lambda\xi} R\ (\lambda,\ A_0)\ \varphi\ d\lambda,$$

unde $\gamma_1 > L_0$, $\varphi$ este derivabilă, iar $R\ (\lambda, A_0)$ este rezolventa operatorului $A_0$. Din calculele făcute pentru determinarea spectrului lui $A_0$ se deduce că rezolventa se defineşte prin formulele

$$R(\lambda, A_0)\varphi = \begin{cases} \left(\int_{-\tau}^{0} e^{(\lambda-\gamma)\sigma}\, d\eta(\sigma) - (\lambda-\gamma) E\right)^{-1} \int_{-\tau}^{0} \left[\int_0^\sigma e^{\lambda(\sigma-\zeta)} \varphi(\zeta) d\zeta\right] e^{-\gamma\sigma} d\eta(\sigma) e^{\lambda s} - \\ \qquad - \int_0^s e^{\lambda\ (s-\sigma)}\ \varphi\ (\sigma)\ d\sigma, \qquad\qquad -\tau \leqslant s < 0 \\ \left(\int_{-\tau}^{0} e^{(\lambda-\gamma)\sigma} d\eta\ (\sigma) - (\lambda - \gamma)\ E\right)^{-1} \int_{-\tau}^{0} \left[\int_0^\sigma e^{\lambda(\sigma-\zeta)} \varphi\ (\zeta)\ d\zeta\right] e^{-\gamma\sigma} d\eta(\sigma). \end{cases}$$

Din aceste formule ținînd seama că spectrul lui $A_0$ se află în $\mathcal{Re}\ \lambda \leqslant 0$, rezultă că pentru orice $\gamma_2 > 0$ există $P(\gamma_2)$ astfel ca $\| R(\lambda, A_0) \| \leqslant P(\gamma_2)$ pentru $\gamma_1 \leqslant \mathcal{Re}\ \lambda \leqslant L_0 + 1$.

Din teoria generală a semigrupurilor rezultă că

$$R(\lambda, A_0)\varphi = \frac{\varphi}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} A_0 \varphi + \frac{1}{\lambda^2} R(\lambda, A_0) A_0^2 \varphi$$

pentru toate funcțiile $\varphi$ care aparțin domeniului de definiție al lui $A_0$ și $A_0^2$.

De aici rezultă că pentru funcțiile din domeniul lui $A_0^2$:

$$T_0(\xi)\varphi = \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2 - i\omega}^{\gamma_2 + i\omega} e^{\lambda\xi} R(\lambda, A_0)\varphi \, d\lambda$$

pentru orice $\gamma_2 > 0$. Înlocuind expresia rezolventei deducem

$$T_0(\xi)\varphi = \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\gamma_2 - i\omega}^{\gamma_2 + i\omega} e^{\lambda\xi} \frac{\varphi}{\lambda} d\lambda + \int_{\gamma_2 - i\omega}^{\gamma_2 + i\omega} e^{\lambda\xi} \frac{A_0\varphi}{\lambda} d\lambda + \right.$$

$$\left. + \int_{\gamma_2 - i\omega}^{\gamma_2 + i\omega} e^{\lambda\xi} \frac{R(\lambda, A_0)A_0^2\varphi}{\lambda^2} d\lambda\right].$$

Din această formulă se obține evaluarea

$$\| T_0(\xi)\varphi \| \leqslant (\|\varphi\| + P_1 \|A_0\varphi\| + P_2 \|A_0^2\varphi\|)\, e^{(\gamma_2+\beta)\xi},$$

unde $\beta > 0$ e oricît de mic.

Să demonstrăm acum că funcția $z(3\tau + s; \varphi)$ este, pentru orice $\varphi$ conținută în domeniul lui $A_0^2$ și în plus există $N_1$, $N_2$ astfel ca

$$\| A_0 z(3\tau + s; \varphi) \| \leqslant N_1 \|\varphi\|, \quad \|A_0^2 z(3\tau + s; \varphi)\| \leqslant N_2 \|\varphi\|.$$

Într-adevăr, soluția $z(t; \varphi)$ este pentru $t > 0$ derivabilă, iar din sistem rezultă că $\frac{dz}{dt}$ este continuă pentru $t > \tau$.

De aici rezultă

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \gamma \frac{dz}{dt} + \int_{-\tau}^{0} \frac{dz(t+s)}{dt} e^{-\gamma s} d\eta(s)$$

pentru $t > 2\tau$.

Prin urmare $z(3\tau + s; \varphi)$ este de două ori derivabilă și în plus

$$\left.\frac{dz(3\tau + s; \varphi)}{ds}\right|_{s=0} = \gamma z(3\tau; \varphi) + \int_{-\tau}^{0} z(3\tau + \sigma; \varphi) e^{-\gamma\sigma} d\eta(\sigma),$$

$$\left.\frac{d^2z(3\tau + s; \varphi)}{ds^2}\right|_{s=0} = \gamma \left.\frac{dz(3\tau + s; \varphi)}{ds}\right|_{s=0} + \int_{-\tau}^{0} \frac{dz(3\tau + \sigma; \varphi)}{ds} e^{-\gamma\sigma} d\eta(\sigma).$$

Aceste formule arată că $z(3\tau + s; \varphi)$ aparţine domeniului lui $A_0^2$. Evaluările dorite rezultă imediat din egalitatea fundamentală (3) din capitolul IV.

Deducem în definitiv evaluarea

$$\| T_0(\xi) z(3\tau + s; \varphi) \| \leqslant P_3 e^{(\gamma_2+\beta)\xi} \| \varphi \|.$$

Dar

$$z(3\tau + s; \varphi) = T_0(3\tau)\varphi$$

şi

$$T_0(\xi) z(3\tau + s; \varphi) = T_0(\xi) T_0(3\tau)\varphi = T_0(\xi + 3\tau)\varphi.$$

Punînd $\xi + 3\tau = t$ deducem

$$\| T_0(t)\varphi \| \leqslant P_3 e^{(\gamma_2+\beta)(t-3\tau)} \| \varphi \| \text{ pentru } t \geqslant 3\tau.$$

Ţinînd seama de evaluarea pentru $0 < t \leqslant 3\tau$, obţinem în definitiv

$$\| T_0(t)\varphi \| \leqslant Q e^{(\gamma_2+\beta)t} \| \varphi \| \text{ pentru } t > 0$$

deci

$$\| z(t + s; \varphi) \| \leqslant Q e^{(\gamma_2+\beta)t} \| \varphi \|.$$

De aici se obţine însă imediat

$$\| x(t + s; \varphi) \| \leqslant Q e^{\gamma\tau} e^{-(\gamma-\gamma_2-\beta)t} \| \varphi \| = B e^{-\alpha t}$$

Teorema este demonstrată.

## COMENTARII BIBLIOGRAFICE

Anexa II este reprodusă după lucrarea lui H. Bray [88], iar anexa III după [15].

# BIBLIOGRAFIE


1. I. G. PETROVSKI, *Prelegeri asupra teoriei ecuaţiilor diferenţiale ordinare.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1952.
2. V. V. STEPANOV, *Curs de ecuaţii diferenţiale.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1955.
3. В. В. НЕМЫЦКИЙ, В. В. СТЕПАНОВ, *Качественная теория дифференциальных уравнений.* Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1949.
4. E. A. CODDINGTON, N. LEVINSON, *Theory of Ordinary Differential Equations.* Mc. Graw-Hill Book Comp. New York, Toronto, London, 1955. (Există traducere în l. rusă: Изд. Иностранной Литературы, Москва, 1958).
5. S. LEFSCHETZ, *Differential Equations: Geometric Theory.* Interscience Publishers, New York, London, 1957. (Există traducere în limba rusă: *Геометрическая теория дифференциальных уравнений.* Изд. Иностр. Лит., Москва, 1961).
6. Л. С. ПОНТРЯГИН, *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Физматиздат, Москва, 1961.
7. T. WAZEWSKI, *Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications.* Annales de la Soc. Polonaise de Math., **XXIII** 112—166 (1950).
8. А. М. ЛЯПУНОВ, *Общая задача об устойчивости движения.* Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1950.
9. И. Г. МАЛКИН, *Теория устойчивости движения.* Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1962.
10. J. L. MASSERA, *Contribution to Stability Theory.* Annals of Math., **65**, *1*, 182—206 (July 1956).
11. К. П. ПЕРСИДСКИЙ, *Об устойчивости по первому приближению.* Мат. Сборник, **40**, 284—293 (1933).
12. В. В. РУМЯНЦЕВ, *Об устойчивости движения относительно части переменных.* Вестник Московского Университета. Серия Мат. и Мех., *4*, 9—16 (1957).
13. A. HALANAY, *Generalizarea unei teoreme a lui K. P. Persidski.* Comunicările Acad. R.P.R., *12*, 1065—1068 (1960).
14. И. Г. МАЛКИН, *К вопросу об обратимости теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.* Прикладная Мат. и Мех., (1954), **18**, 129—138.
15. Н. Н. КРАСОВСКИЙ, *Некоторые задачи теории устойчивости движения.* Физматиздат, Москва, 1959.
16. К. КОРДУЛЯНУ, *Применение дифференциальных неравенств к теории устойчивости.* Analele ştiinţifice ale Univ. Al. Cuza din Iaşi (seria nouă) Secţiunea I (Matematică, Fizică, Chimie), **VI** *1*, 47—58 (1960).
17. I. G. MALKIN, *Das Existenz-Problem von Ljapunovschen Funktionen.* Известия Физмат. общества, Казань, **III**, *4*, 51—62; III, *5*, 63—84. (1931)
18. I. M. GHELFAND, *Lecţii de algebră liniară.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1953.
19. W. HAHN, *Eine Bemerkung zur zweiten Methode von Ljapunov.* Math. Nachrichten, **14**, 349—354 (1956).

20. R. BELLMAN, *Stability Theory of Differential Equations*. New York, Toronto, London, 1953. (Există traducere în l. rusă. Изд. Иностранной литерутауры, Москва, 1954).
21. Е. А. БАРБАШИН, *О двух схемах доказательства теорем об устойчивости по первому приближению*. Докл. АН СССР, **111**, 9—11 (1956)
22. A. HALANAY, *Cîteva observații asupra stabilității asimptotice*, Analele Univ. „C. I. Parhon", București, Seria Științelor Naturii, *9*, 31—38 (1956).
23. — *Un criteriu de stabilitate*. Comunicările Acad. R.P.R., **IX**, *3*, 209—214 (1959).
24. Н. Н. БАУТИН, *О поведении динамических систем вблизи границ области устойчивости*. Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1949.
25. T. HACKER, *Stability of Partially Controlled Motions of an Aircraft*. Journal of the Aerospace Sciences, **28** *1*, 15—27 (Jan. 1961).
26. В. Е. ГЕРМАИДЗЕ, *Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях*. Прикладная Мат. и Мех., **21** (1957), *6*.
27. ИВО ВРКОЧ, *Интегральная устойчивость*. Чехословацкий Мат. Журнал, **9** (84), (1959), 71—128.
28. KYUZO HAYASHY, *On the Strong Stability and Boundedness of Solutions of Ordinary Differential Equations*. Memoirs of the College of Science, Univ. of Kyoto, Series A, Mathematics, **XXXII**, *2* (1959).
29. Н. П. ЕРУГИН, *Приводимые системы*. Труды Мат. Инст. им. Стеклова, **13** (1946).
30. И. М. ГЕЛЬФАНД, В. Б. ЛИДСКИЙ, *О структуре областей устойчивости канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами*. Успехи Мат. Наук, **10**, 3—40 (1955).
31. М. Г. КРЕЙН, *Основные положения теории λ-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами*. АН СССР, Памяти А. А. Андронова, Москва, 1955, р. 413—498.
32. В. А. ЯКУБОВИЧ, *Замечание к некоторым работам по системам линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами*. Прикладная Мат. и Мех., **21**, 707—713 (1957).
33. O. PERRON, *Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen*, Math. Zeitschrift, **32**, 703—728 (1930).
34. R. BELLMAN, *On an Application of a Banach-Steinhaus Theorem to the Study of the Boundedness of Solutions of Nonlinear Differential and Difference Equations*. Ann. of Math., **49**, 515—522 (1948).
35. M. REGHIȘ, *Asupra stabilității neuniforme în spații generale*. Lucrările științifice ale Institutului pedagogic Timișoara, (1960), Matematică-Fizică, 153—169.
36. А. И. ЛУРЬЕ, В. Н. ПОСТНИКОВ, *Об устойчивости одного класса регулируемых систем*. Прикладная мат. и мех., **9** (1945).
37. А. И. ЛУРЬЕ, *Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования*. Гостехиздат, Москва, 1951.
38. А. М. ЛЕТОВ, *Устойчивость нелинейных регулируемых систем*. Гостехиздат, Москва, 1955.
39. В. А. ЯКУБОВИЧ, *Об устойчивости в целом невозмущенного движения для уравнений непрямого автоматического регулирования*. Вестник Ленинградского Университета, **19**. Сер. Мат. Мех. и астр. *4*, 172—176 (1957).
40. — *О нелинейных дифференциальных уравнениях систем автоматического регулирования с одним регулирующим органом*. Вестник Лен. Унив. № 7, Сер. Мат. мех. астр. *2*, 120—153 (1960).
41. S. LEFSCHETZ, *An Application of the Direct Method of Liapunov*. Bol. de la Sociedad Matematica Mexicana, Sec. serie **5**, *2*, 139—143 (1960).
42. V. M. POPOV, *Nouveaux critériums de stabilité pour les systèmes automatiques non linéaires*. Revue d'électrotechnique et d'énergétique, Acad. R.P.R., **V**, *1*, 73—88 (1960).
43. В. М. ПОПОВ, *Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования*. Автоматика и Телемеханика, **XXII**, *8*, 961—979 (1961).
44. В. М. ПОПОВ, *Об одном критическом случае абсолютной устойчивости*. Автоматика и Телемеханика, **XXIII** *1*, 3—24 (1962).
45. — *К вопросу о практической устойчивости систем автоматического регулирования, содержащих элемент с неоднозначной нелинейностью*. Revue d'électrotechnique et d'énergétique, Acad. R.P.R., **VI**, *1*, 81—101 (1959).

46. В. А. ЯКУБОВИЧ, *Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования.* Докл. АН СССР, **143**, *6*, 1304—1307 (1962).
47. J. L. MASSERA, *The Existence of Periodic Solutions of Systems of Differential Equations.* Duke Math. Journal, **17**, 457—475 (1950).
48. А. ХАЛАНАЙ, *Почти-периодические решения нелинейных систем с малым параметром.* Журнал чистой и прикладной математики. Acad., R.P.R., **I**, *2*, 49—60 (1956)
49. — *Периодические и почти-периодические решения систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.* Revue de math. pures et appliquées, Acad. R.P.R., **IV**, *4*, 686—691 (1959).
50. J. L. MASSERA, J. J. SCHÄFFER, *Linear Differential Equations and Functional Analysis* I. Ann. of Math., **67**, *3*, 517—573 (May 1958).
51. I. BARBĂLAT, A. HALANAY, *Solutions périodiques des systèmes d'équations différentielles non linéaires.* Revue de math. pures et appliquées, Acad. R.P.R., **III**, *3*, 395—411 (1958).
52. И. Г. МАЛКИН, *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний.* Гостехиздат, Москва, 1956.
53. Н. Н. БОГОЛЮБОВ, *О некоторых статистических методах в математической физике.* Изд. Акад. Наук Укр. ССР, 1945.
54. Н. Н. БОГОЛЮБОВ, Ю. А. МИТРОПОЛЬСКИЙ, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* Физматгиз, Москва, 1958.
55. A. HALANAY, *Solutions périodiques des systèmes non linéaires à petit paramètre.* Rendi-, conti dell'Accad. Naz. dei Lincei. Classe de Sci. Fis. Mat. naturali, Serie VIII, XXII, fasc. *1*,30—32 (1957).
56. И. БЕРШТЕЙН, А. ХАЛАНАЙ, *Индекс особой точки и существование периодических решений систем с малым параметром.* Докл. АН СССР, **111**, *5*, 923—925, (1956).
57. F. BROWDER, *On a Generalisation of the Schauder fixed-point theorem,* Duke Math. Journal, **26**, *2*, 291—303 (1959).
58. M. URABE, *Geometric Study of Nonlinear Autonomous System.* Funkcialaj Ekvacioj, 1, 1—84 (1958).
59. O. VEJVODA, *On the Existence and Stability of the Periodic Solution of the Second kind of a Certain Mechanical System.* Чехословацкий Мат. Журнал., 390—415. 9 (84), (1959).
60. L. CESARI, *Existence Theorems for Periodic Solutions of Non linear Lipschitzian Differential Systems and Fixed Point Theorems.* Contributions to the Theory of Non linear Oscillations, vol. V, Princeton, 1960, p. 115—172.
61. N. LEVINSON, *Small Periodic Perturbations of an Autonomous System with a Stable Orbit.* Ann. of math., **52**, 727—738 (1950).
62. L. FLATTO, N. LEVINSON, *Periodic Solutions of Singularly Perturbed Equations.* Journal of math. mech., **4**, 943—950 (1955).
63. J. K. HALE-G. SEIFERT, *Bounded and Almost Periodic Solutions of Singularly Perturbed Equations.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, **3**, *1*, 18—24 (August 1961).
64. Н. Д. АНОСОВ, *О предельных циклах систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных.* Мат. Сборник, **50**, *3*, 299—334 (1960).
65. А. Д. МЫШКИС, *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.* Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1951.
66. Л. Э. ЭЛЬСГОЛЬЦ, *Качественные методы в математическом анализе.* Гостехиздат, Москва, 1955.
67. А. ХАЛАНАЙ, *Некоторые качественные вопросы в теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.* Revue de math. pures et appliquées, Acad. R.P.R., **II**, 127—144 (1957).
68. — *Теоремы устойчивости для систем с запаздывающим аргументом.* Revue de math. pures et appliquées, Acad. R.P.R., **III**, *2*, 207—216, (1958).
69. — *Критерии устойчивости для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.* Revue de math. pures et appliquées, Acad. R.P.R.,

V, *2*, 367 — 374 (1960); *Criterii de stabilitate pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale cu argument întîrziat.* Comunicările Acad. R.P.R., **10**, *8*, 635—642 (1960).

70. А. ХАЛАНАИ, *Интегральная устойчивость в случае систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.* Revue de math. pures et appliquées, Acad. R.P.R., V *3—4*, 541—548 (1960); *Stabilitatea integrală la sistemele de ecuaţii diferenţiale cu argument întîrziat.* Studii şi cercetări matematice, **XI**, *2*, 429—438 (1960).

71. — *Условие Перрона в теории общих систем с последействием.* Mathematica **2** (25), *2*, 257—267 (1960).

72. — *Inegalităţi diferenţiale cu întîrziere şi o aplicaţie a lor la o problemă din teoria stabilităţii sistemelor cu întîrziere.* Comunicările Acad. R.P.R., **XI**, *11*, 1305—1310 (1961).

73. В. М. ПОПОВ, А. ХАЛАНАЙ, *Об устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования с запаздыванием.* Автоматика и Телемеханика, **XXIII**, *7*, (1962).

74. A. HALANAY, *Solutions périodiques des systèmes linéaires à argument retardé.* C. R. Acad. Sci. Paris, **249**, *25* (1959).

75. — *Sur les systèmes d'équations différentielles linéaires à argument retardé.* C. R. Acad. Sci. Paris, **250**, 797—798 (1960).

76. — *Solutions périodiques des systèmes généraux à retardement,* C.R. Acad Sci. Paris, **250**, 3557—3559 (1960).

77. — *Периодические решения линейных систем с запаздыванием.* Revue de math. pures et appliquées, **VI**, *1*, 141—158 (1961); *Soluţii periodice la sistemele liniare cu întîrziere.* Studii şi cercetări matematice **XII**, *2*, 367—391 (1961).

78. — *Теория устойчивости линейных периодических систем с запаздыванием.* Revue de math. pures et appliquées, Acad. R.P.R., **VI**, *4*, 633—653 (1961).

79. С. Н. ШИМАНОВ, *К теории колебаний квазилинейных систем с запаздыванием.* Прикладная Мат. и Мех., **23**, *5*, 836—844 (1959).

80. — *О почти-периодических колебаниях квазилинейных систем с запаздыванием времени в случае вырождения.* Докл. АН СССР, **133**, I, 36—39 (1960).

81. А. ХАЛАНАЙ, *Периодические решения систем с запаздыванием с малым параметром в критическом случае.* Revue de math. pures et appliquées, Acad. R.P.R., **VI**, *3*, 487—491 (1961).

82. — *Автономные системы с запаздывающим аргументом с малым параметром.* Revue de math. pures et appliquées, Acad. R.P.R., **VII**, *1*, 81—89 (1962).

83. С. Н. ШИМАНОВ, *Колебания квазилинейных автономных систем с запаздыванием.* Изв. высших учебных заведений, Радиофизика, *3*, 456—466 (1960).

84. А. ХАЛАНАЙ, *Метод усреднения для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.* Revue de math. pures et appliquées, Acad. R.P.R., **VI**, *3*, 467—483 (1959).

85. — *Почти-периодические решения систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.* Revue de math. pures et appliquées, Acad. R.P.R., **V**, *1*, 75—79 (1960); *Soluţii aproape-periodice la sisteme de ecuaţii diferenţiale cu argument întîrziat cu parametru mic.* Comunicările Acad. R.P.R., **XI**, *12*, 1237—1242 (1959).

86. — *Асимптотическая устойчивость и малые возмущения периодических систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.* Успехи Мат. Наук, **XVII**, *1* (103), 231—233 (1962).

87. A. HALANAY, *Perturbations singulières des systèmes à retardement.* C. R. Acad. Sci. Paris, **253**, 1649—1650 (1961); *Сингулярные возмущения систем с запаздыванием.* Revue de math. pures et appliquées, Acad. R.P.R., **VII**, *2* (1962).

88. H. E. BRAY, *Elementary Properties on the Stieltjes Integral.* Ann. of math., series **II**, **20**, 177—186 (1918—1919).

